

# COURS DE PHYSIQUE THÉORIQUE



COURS DE  
PHYSIQUE THÉORIQUE

---

LES  
TENSEURS EN MÉCANIQUE  
ET EN ÉLASTICITÉ

PAR

LÉON BRILLOUIN

*Professeur au Collège de France*

---

NEW YORK  
DOVER PUBLICATIONS

*Tous droits de reproduction, de  
traduction et d'adaptation réservés  
pour tous pays*

---

---

*Copyright 1938 by Masson et Cie*

---

---

*First American Edition . . . 1946*

*By special arrangement  
with MASSON ET Cie*



# TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
PRÉFACE .....	I
CHAPITRE PREMIER. — REMARQUES GÉNÉRALES.....	5
1. — Introduction .....	5
2. — Le rôle des tenseurs et leur utilité.....	5
3. — Quelques exemples de tenseurs.....	7
4. — Le tenseur des efforts en élasticité.....	9
5. — Comment se transforme le tenseur des efforts, lors d'un changement d'axes cartésiens .....	11
6. — Tenseurs du second ordre; symétrie ou antisymétrie; cas de dégénérescence .....	13
7. — Qu'est-ce qu'une matrice? .....	15
8. — Différentes sortes d'espaces de référence : espace vectoriel affine, espace métrique .....	16
9. — Les diagrammes thermodynamiques, comme exemples de géo- métrie affine .....	19
CHAPITRE II. — GÉOMÉTRIE VECTORIELLE. DÉFINITION DES TENSEURS.....	23
1. — Les axiomes de la géométrie vectorielle.....	23
2. — Changements d'axes rectilignes .....	25
3. — Covariance et contravariance (axes rectilignes) .....	27
4. — Sommations et indices muets .....	29
5. — Vecteur covariant et forme linéaire; espace dualistique....	30
6. — Définition générale d'un tenseur.....	31
7. — Modes de formation des tenseurs; opérations d'algèbre élé- mentaire .....	33
8. — La multiplication contractée; un critérium du caractère ten- soriel .....	34
9. — Exemples : force, quantité de mouvement, vitesse.....	36
10. — Distinction entre tenseurs et matrices.....	36
11. — Axes curvilignes .....	37
12. — Symétrie et antisymétrie.....	39
13. — Exemples de tenseurs antisymétriques formés au moyen de produits de vecteurs; produits extérieurs.....	41
14. — Remarques sur l'emploi des tenseurs de symétrie définie et la règle du $\delta$ .....	42

	Pages
CHAPITRE III. — LES PSEUDO-TENSEURS EN GÉOMÉTRIE VECTORIELLE. DENSITÉS ET CAPACITÉS TENSORIELLES .....	45
1. — Utilité et rôle des pseudo-tenseurs.....	45
2. — Réduction des tenseurs antisymétriques à des pseudo-tenseurs d'ordre différent; pseudo-scalaires .....	45
3. — Autre exemple de pseudo-scalaire; densités et capacités scalaires .....	47
4. — Densités et capacités tensorielles.....	48
5. — Exemple de pseudo-tenseurs; l'élément de volume représente le type des capacités scalaires.....	49
6. — Le tenseur antisymétrique à deux indices, dans l'espace tridimensionnel, se ramène à un pseudo-tenseur.....	50
7. — Résumé des résultats généraux.....	52
8. — Les pseudo-tenseurs redonnent les vecteurs axiaux, pour l'espace euclidien tridimensionnel .....	54
9. — Méthode générale de formation des pseudo-tenseurs des deux types, capacités ou densités.....	56
10. — Exemples de ces transformations.....	58
CHAPITRE IV. — LES PRINCIPAUX OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS UTILISABLES EN GÉOMÉTRIE VECTORIELLE .....	59
1. — Introduction .....	59
2. — Définitions usuelles des opérateurs : gradient, rotationnel, divergence, laplacien $\Delta$ .....	60
3. — Nature des précautions à prendre.....	62
4. — Gradient et rotationnel .....	63
5. — Sens géométrique du rotationnel pour trois dimensions.....	66
6. — Le rotationnel, pour un nombre quelconque de dimensions..	68
7. — L'opération de divergence .....	69
8. — Confirmation algébrique du rôle de l'opérateur divergence..	71
9. — La divergence appliquée à des densités tensorielles d'ordre supérieur à 1 .....	72
10. — Exemples de divergences; autre mode d'écriture.....	73
CHAPITRE V. — POSTULAT DE TRANSPORT PARALLÈLE; DÉRIVÉE COVARIANTE EN GÉOMÉTRIE AFFINE .....	75
1. — Méthode de H. Weyl.....	75
2. — Postulat de transport parallèle; coordonnées géodésiques....	75
3. — Dérivée covariante d'un vecteur contravariant ou covariant..	78
4. — Dérivée covariante d'un tenseur quelconque.....	80
5. — Dérivées covariantes des pseudo-tenseurs.....	82
6. — Remarques sur les divergences de densités tensorielles d'ordre quelconque .....	84
7. — Dérivée absolue d'un vecteur; lignes géodésiques.....	85
8. — Le transport d'une quantité à distance finie et les conditions d'intégrabilité .....	86
9. — Transport d'un tenseur à distance, cas d'intégrabilité.....	87
10. — Transport en circuit fermé d'un tenseur quelconque ou d'un pseudo-tenseur .....	90
11. — Signification géométrique de ces formules; courbure de l'espace	91
12. — Un espace à courbure nulle est linéaire.....	92

	Pages
CHAPITRE VI. — GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE, ESPACE DE RIEMANN.....	94
1. — Définitions élémentaires .....	94
2. — Définition générale, tenseur métrique fondamental.....	95
3. — Exemples simples; coordonnées curvilignes dans l'espace euclidien à trois dimensions .....	97
4. — Interprétation des $g_{ik}$ ; leur sens géométrique.....	100
5. — Déplacements d'indices; composantes covariantes ou contravariantes d'un même vecteur ou tenseur; valeur absolue; produit scalaire .....	101
6. — Sens géométrique de ces opérations; composantes d'un vecteur suivant le contour des axes et projections normales..	104
7. — Espace euclidien tangent; réduction du tableau des $g_{ik}$ à la forme diagonale .....	106
8. — Comment se transforme le déterminant $g$ lors d'un changement d'axes? .....	108
9. — Les expressions $ g ^{\frac{1}{2}}$ et $ g ^{-\frac{1}{2}}$ sont les types des densités et capacités scalaires .....	109
CHAPITRE VII. — LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET LA DÉRIVÉE COVARIANTE EN GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE.....	111
1. — Extension des formules du chapitre IV.....	111
2. — L'opérateur laplacien $\Delta$ .....	112
3. — Exemples d'application .....	113
4. — Comparaison entre les notations vectorielles usuelles et les notations tensorielles; différences essentielles des définitions .....	114
5. — Le problème du transport des étalons de longueur; invariance de jauge .....	116
6. — Dérivées covariantes en géométrie métrique, dans l'espace de Riemann. Symboles de Christoffel.....	118
7. — Les dérivées covariantes des $g^{ik}$ et du déterminant $g$ sont nulles; toutes les densités ou capacités scalaires ont des dérivées covariantes nulles .....	120
8. — Conséquences géométriques et signification des règles de transport parallèle. Coordonnées géodésiques.....	122
9. — Propriétés des géodésiques, longueur minima.....	123
10. — Exemples .....	125
11. — La courbure d'un espace de Riemann. Tenseur de Riemann-Christoffel .....	129
12. — Le tenseur contracté de Ricci et Einstein et le transport des pseudo-tenseurs en circuit fermé.....	132
13. — Les identités de Bianchi .....	133
14. — Coordonnées normales de Riemann; un espace à courbure nulle est euclidien .....	134
15. — Courbure riemannienne; courbure moyenne de Ricci.....	136
CHAPITRE VIII. — LA MÉCANIQUE RATIONNELLE ET L'EMPLOI DES GÉOMÉTRIES DE RIEMANN .....	137
1. — Utilité de la géométrie de Riemann en mécanique classique..	137
2. — Principe de D'Alembert .....	138
3. — Équations de Lagrange .....	140

	Pages
4. — Cas des liaisons indépendantes du temps.....	142
5. — Interprétation géométrique .....	143
6. — Liaisons indépendantes du temps avec énergie potentielle; comment ramener le problème mécanique à une recherche de géodésiques? .....	146
7. — Utilisation de géodésiques dans l'espace-temps; allusion à la mécanique relativiste .....	148
8. — Liaisons holonomes dépendant du temps, ou systèmes de réf- érence en mouvement .....	150
9. — Les systèmes à liaisons variables; interprétation géométrique dans l'espace-temps .....	152
10. — Discussion et exemples .....	154
11. — Principe de moindre action de Lagrange.....	159
12. — Systèmes conservatifs à liaisons holonomes indépendantes du temps ....	162
13. — La mécanique rationnelle comparée à une optique géométri- que; principe de Maupertuis et principe de Fermat.....	166
14. — Équations de Hamilton; forme générale.....	167
15. — Équations de Hamilton; systèmes conservatifs .....	170
16. — Discussion et exemples .....	174
17. — Quelques conséquences et extensions du principe de moindre action .....	176
18. — Une analogie thermo-dynamique; distinction entre chaleur et travail mécanique .....	179
19. — Une très lente transformation conduit à la formule de Boltzmann .....	181
20. — Transformation adiabatique; invariant adiabatique d'Ehren- fest .....	183
21. — Pressions de radiation .....	185
 CHAPITRE IX. — LE PASSAGE A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.....	 188
1. — L'introduction des quanta en physique .....	188
2. — Énergie, fréquence et masse.....	189
3. — Attribution de la fréquence $\nu$ aux ondes de Hamilton, lon- gueur d'onde et quantité de mouvement.....	190
4. — Optique physique et optique géométrique; principe de Fer- mat .....	193
5. — Formation d'une équation ondulatoire pour la mécanique....	197
6. — Méthode générale de formation de l'équation d'onde, en mécanique de Schrödinger .....	199
7. — Les règles de commutation .....	207
8. — Propagation d'un groupe d'ondes; vitesse de phase et vitesse de groupe .....	203
9. — Groupes d'ondes dans l'espace .....	206
10. — Groupes d'ondes en mécanique ondulatoire.....	209
 CHAPITRE X. — ÉLASTICITÉ.....	 212
1. — Les tenseurs en élasticité.....	212
2. — Rappel de quelques définitions.....	213
3. — Les tensions élastiques .....	215
4. — Force résultante sur un élément de volume.....	218
5. — Étude des déformations. en axes cartésiens .....	220

# TABLE DES MATIÈRES

IX

	Pages
6. — Les déformations, définition générale.....	223
7. — Corps isotrope; invariants de la déformation.....	226
8. — Définition d'une énergie potentielle, pour un solide déformé.....	228
9. — Les coefficients d'élasticité, coefficients de Voigt; notations de Lamé; relations de Cauchy.....	233
10. — Relation entre les forces et les déformations.....	237
11. — Le milieu solide en mouvement; coordonnées d'Euler.....	240
12. — Exemple d'étude d'un corps initialement déformé; rôle d'une pression initiale interne ou externe sur les propriétés élastiques .....	242
13. — Équations de mouvement en coordonnées de Lagrange; formules de Boussinesq .....	246
14. — Un principe général de minimum.....	250
CHAPITRE XI. — ONDES ÉLASTIQUES DANS LES SOLIDES.....	251
1. — Propagation des ondes élastiques dans un cristal.....	251
2. — Vibrations propres d'un volume parallélépipédique rectangle; conditions cycliques .....	255
3. — Réflexion d'une onde élastique sur une paroi plane.....	261
4. — Dénombrement des vibrations propres d'un volume solide limité .....	264
5. — Étude directe des interférences et ondes stationnaires dans la réflexion sur des miroirs orthogonaux.....	268
6. — Vibrations propres d'un solide, enfermé dans une enceinte parallélépipédique rectangle, à parois rigides lisses.....	273
7. — Influence des termes d'ordre supérieur et perturbations dans la propagation des ondes.....	278
8. — Exemples de ces effets secondaires sur des ondes libres.....	280
9. — Cas des ondes stationnaires .....	283
10. — Pression de radiation pour les ondes stationnaires.....	284
11. — Le calcul des pressions de radiation par la formule de Boltzmann-Ehrenfest .....	288
12. — Le tenseur des tensions de radiation dans une onde libre.....	290
13. — Exemples d'application de ces tenseurs.....	292
14. — Valeurs moyennes, pour ondes élastiques complètement diffusées .....	295
15. — Ondes élastiques dans un fluide; le liquide considéré comme cas particulier des solides .....	298
16. — Les conditions de mesure des pressions de radiation; pression sur une palette immergée.....	302
17. — Que peut-on dire sur les coefficients d'élasticité A, B, C de la seconde approximation ? .....	305
CHAPITRE XII. — LA THÉORIE DES SOLIDES ET LES QUANTA.....	308
1. — Introduction, analyse de l'agitation thermique des solides..	308
2. — Interprétation de la dilatation thermique des solides.....	309
3. — Vibrations d'une corde à structure discontinue; fréquence limite .....	312
4. — Diverses extensions possibles; exemple de vibrations d'une file d'atomes .....	315
5. — Dénombrement des vibrations propres; passage au réseau à deux dimensions .....	318

	Pages
6. — Réseau cristallin à trois dimensions; ses vibrations propres..	321
7. — Hypothèses simplificatrices pour un solide isotrope; méthode de Debye .....	324
8. — Les quanta et l'énergie d'agitation thermique d'un solide..	327
9. — Discussion; comparaisons avec l'expérience.....	332
10. — Les pressions de radiation et la dilatation thermique du solide.	335
11. — Comparaison avec l'expérience; dilatation thermique.....	337
12. — Thermodynamique du solide idéal.....	339
13. — Discussion et rappel des points essentiels.....	342
14. — Essai d'extension de la théorie au cas des liquides.....	346
TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES.....	351

## PREFACE TO FIRST AMERICAN PRINTING

*I would not miss the opportunity of presenting to the American public this new edition of my book on tensors, and I want to thank very sincerely my colleague, Dr. W. Prager, and Dover Publications for their suggestion to reprint the book in America. As a matter of fact, this book was very little known in this country; it was published just before the war, and very few copies reached the United States.*

*The book was quite a success in France; I was surprised to learn recently that the original French edition was practically sold out. I am still wondering how French students, under the strain of war and foreign occupation, managed to find time to study analytical geometry, mechanics and elasticity! Anyhow, the new edition will appear simultaneously in New York and in Paris.*

*The book was originally planned as a first volume for a treatise on theoretical physics, with the second volume devoted to tensor methods in electromagnetism and relativity. This series was based upon the excellent treatise on classical physics published by my friend G. Bruhat. It is a shock for me to remember that G. Bruhat was among the many colleagues who died in captivity.*

*Many of my lectures at Brown University were based upon this book, especially the discussion of general theorems of mechanics, which is given in Chapter VIII. This part contains many personal contributions, with an attempt at classifying and visualizing the geometrical meaning of a number of different "minimum principles" found in analytical mechanics.*

*The quantum theory of solids, which is discussed in Chapter XII, makes use of some general properties of waves in crystal structures. A more complete discussion of these problems may now be found in my book on "Wave Propagation in Periodic Structures", recently published by McGraw Hill and Co.*

New York, December 18, 1945.

*L. Brillouin*

rieurement la métrique aux problèmes particuliers que l'on veut étudier<sup>(1)</sup>. Langevin avait donné des exemples de problèmes d'électricité dans les cristaux, pour lesquels il calquait sa métrique sur le tenseur du pouvoir diélectrique ; je montre dans les chapitres VIII et IX comment l'étude de la Mécanique, classique et ondulatoire, se trouve simplifiée par l'emploi d'une métrique basée sur la forme de l'énergie cinétique, suivant une méthode brillamment présentée par Schrödinger.

En rappelant les principes de mécanique rationnelle, j'ai dû comparer les divers procédés au moyen desquels on peut ramener un problème de mécanique à la recherche d'une géodésique. La plupart des auteurs se contentent, à ce sujet, de former un principe de minimum, et de le transcrire sous la forme de longueur minima d'une géodésique convenable ; cela suffit évidemment comme démonstration, mais le lecteur n'est pas très renseigné ! Il ignore pourquoi ce type de réduction peut se faire de plusieurs manières distinctes, et quelles sont les conditions exactes que l'on sous-entend dans chaque cas. J'ai donc discuté, un peu longuement, tous ces cas de réduction, écrit les équations détaillées, et précisé le sens de la méthode de transformation. J'ai spécialement insisté sur les géodésiques de l'espace-temps, de manière à préparer les transcriptions relativistes, et à montrer les limites de validité de la mécanique classique.

Comme autre application des méthodes tensorielles, j'ai choisi l'élasticité, dont j'ai essayé de traiter complètement les problèmes classiques ; je signalerai, à ce sujet, l'emploi systématique des formules rigoureuses pour les déformations, au lieu des expressions approchées dont on se contente trop souvent, et qui sont l'origine de nombreuses erreurs ou obscurités. J'ai poussé assez loin l'étude des propagations d'ondes élastiques et des pressions ou tensions provoquées par ces radiations ; ce sont de délicats problèmes, mais fort importants par leurs conséquences variées ; le grand développement des méthodes de mesure par vibrations ultra-sonores a ramené l'attention sur ces questions.

Ces études d'élasticité et de vibration auraient paru un peu rébarbatives, si je n'y avais joint une application très importante, en développant la théorie quantique moderne du corps solide. C'est une question qui m'a très longtemps préoccupé, et je crois en avoir donné, cette fois, un exposé aussi rigoureux que possible ; je signa-

(1) Van Duyl se sert d'une méthode analogue pour le calcul des vibrations de quartz piézoélectriques. (*Physica*, t. 3, 1936, p. 317).



lerai particulièrement la discussion relative à la dilatation thermique et à l'équation d'état du corps solide (Chap. XII, § 12); on y trouvera la solution correcte de toute une série de problèmes que l'on avait souvent mal posés, de sorte qu'il y restait beaucoup de contradictions; j'indique aussi, en passant, d'autres problèmes fort intéressants et non encore résolus.

J'espère que cet exposé rendra service au lecteur et ne le rebutera pas trop! Je dois en tous cas remercier la Librairie Masson pour le soin qu'elle a mis à présenter ce volume; remercier aussi mon collègue et ami Bruhat pour l'insistance avec laquelle il m'a convaincu de commencer la rédaction de ce *Traité de physique théorique*. Un tel travail m'eût paru impossible à entreprendre, si je n'avais déjà pu m'appuyer sur un exposé très complet de la physique générale, tel qu'en fournissent les divers cours de Bruhat, et je ne me fais pas faute d'y renvoyer souvent le lecteur. Enfin, pour le travail ingrat de correction des épreuves, je suis heureux d'avoir trouvé l'aide dévouée de MM. J. Winter et J. Mariani, et je leur en exprime ici toute ma reconnaissance.

Paris, le 1<sup>er</sup> décembre 1936.

#### QUELQUES TRAITÉS GÉNÉRAUX SUR LES TENSEURS

- H. WEYL. — *Temps, espace, matière*. Blanchard, Paris, 1922.  
 A. S. EDDINGTON. — *Espace, temps et gravitation*. Hermann, Paris, 1921.  
 H. GALBRUN. — *Introduction à la théorie de la Relativité*. Gauthier-Villars, Paris, 1923.  
 E. CARTAN. — *Leçons sur les invariants intégraux*. Hermann, Paris, 1922.  
 — *La géométrie des espaces de Riemann*. *Mémorial Sc. math.*, fasc. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1925.  
 — *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris, 1928.  
 G. JUVET. — *Introduction au Calcul tensoriel*. Blanchard, Paris, 1922.  
 P. APPELL et R. THIRY. — *Mécanique rationnelle*, t. 5. Gauthier-Villars, Paris, 1933.  
 TH. DE DONDER. — *Théorie invariante du calcul des variations*. 2<sup>e</sup> édition. Gauthier-Villars, Paris, 1935.  
 L. P. EISENHART. — *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, 1926.

•

•

•

•

## CHAPITRE PREMIER

# REMARQUES GÉNÉRALES ET PREMIERS EXEMPLES

### *I. — Introduction.*

La physique théorique moderne fait grand usage des notions mathématiques de tenseurs et de matrices. C'est à propos de la Relativité que ces grandeurs ont été, tout d'abord, reconnues essentielles, et surtout les tenseurs, sans lesquels cette théorie ne peut être expliquée ; quant aux matrices, elles jouent un rôle de premier plan dans la mécanique quantique ; certains traités de mécanique des quanta ont même été écrits uniquement avec usage des matrices, sans qu'on s'y serve de la notion d'ondes associées. Il semble préférable, pour une discussion méthodique, de partir du point de vue ondulatoire, et de retrouver ensuite les matrices ; on ne peut en tous cas pas se passer de cette notion, qui s'est révélée absolument indispensable.

Pour la logique, il y a avantage à rapprocher les deux notions, matrices et tenseurs. Il y a, en effet, de grandes parentés entre ces grandeurs, de sorte qu'on évite des redites ; mais surtout, cette introduction parallèle permet de faire ressortir clairement les différences entre matrices et tenseurs, et d'éviter des confusions dangereuses. Quitte à alourdir un peu l'exposé, nous donnerons d'assez nombreux exemples, de manière à nous familiariser peu à peu avec les notions nouvelles, et à en apprendre progressivement le maniement.

### *II. — Le rôle des tenseurs et leur utilité.*

Lorsqu'on définit une grandeur, en physique, il faut s'efforcer de présenter la définition sous une forme précise et générale. En particulier, l'on doit rechercher immédiatement comment cette grandeur nouvelle dépend du choix particulier des unités fondamentales ; c'est à quoi répondent les *équations de dimension*, qui nous renseignent sur la manière dont se modifie le nombre, qui représente la valeur absolue de la grandeur étudiée, lorsqu'on change d'unités. Chacun sait l'importance de ces considérations, et combien essentielle est la règle, d'après laquelle on ne doit écrire une égalité qu'entre des quantités ayant les mêmes dimensions : cette règle est indispensable

pour que l'égalité garde un sens invariant, et puisse être valable dans tous les systèmes d'unités.

Les changements d'unités ne sont pas les seules transformations que l'on puisse faire subir à notre mode de représentation des faits physiques. Nous pouvons aussi procéder à des changements de systèmes de référence, c'est-à-dire à des transformations de coordonnées. Il est souvent commode d'énoncer les lois, en premier lieu, dans un système particulier : ainsi, pour repérer un point dans l'espace, se sert-on fréquemment de trois axes rectangulaires  $x, y, z$  (axes de Descartes, ou système *cartésien*) ; mais rien n'oblige à ce choix très spécial ; certains problèmes, par leur nature même, seront plus faciles à traiter dans d'autres systèmes de coordonnées : pour étudier les vibrations d'une plaque circulaire, on préférera des coordonnées circulaires ; s'il s'agit des vibrations d'une sphère, les coordonnées sphériques s'imposent, etc.

Il faut donc savoir comment se transforment les diverses grandeurs physiques, lors de tels changements d'axes de référence.

Une première étape, dans cette voie, a été réalisée par le *calcul vectoriel* ; les physiciens ont vite compris la nécessité de distinguer une *grandeur scalaire* (masse, densité, énergie...) et une quantité *vectorielle* (force, vitesse, accélération...).

Un *scalaire* est défini par un seul nombre, qui représente la valeur absolue ; si l'on procède à des changements d'axes, sans toucher aux unités fondamentales, le scalaire reste invariant ; il est insensible à ces modifications du système de référence, et son équation de dimension suffit à le définir. Le mot scalaire rappelle l'image d'une échelle, d'une règle graduée, sur laquelle on lit un nombre qui mesure la grandeur scalaire.

Un *vecteur* exige des connaissances plus étendues ; sa valeur absolue ne suffit pas à le définir ; il faut encore donner ses composantes ; dans l'espace ordinaire à 3 dimensions, le vecteur possède 3 composantes ; nous aurons à envisager, d'une manière plus générale, des espaces ayant un nombre quelconque  $r$  de dimensions. Un vecteur sera défini par les valeurs de ses  $r$  composantes. La physique classique, dans presque tous ses chapitres, se contente de l'emploi des vecteurs, dont elle distingue d'ailleurs deux sortes : vecteurs polaires et vecteurs axiaux. Nous aurons à revenir sur ce point, car le vecteur type est le vecteur polaire, tandis que le vecteur axial dissimule une grandeur plus compliquée, et qui n'est analogue à un vecteur que dans le cas très spécial de l'espace à trois dimensions.

Pourtant, certains chapitres de la physique, comme l'élasticité, obligent déjà à l'introduction de grandeurs de nature nouvelle, plus complexes que les vecteurs : lorsqu'on recherche les efforts ou tensions à l'intérieur d'un solide déformé, on trouve un ensemble de 6 nombres, inséparables les uns des autres, et qui se comportent comme les 6 composantes d'une certaine grandeur nouvelle. Les physiciens ont longtemps hésité à donner un nom à cette entité ; mais les études de physique cristalline ont révélé l'existence d'un grand nombre d'exemples analogues. Le célèbre cristallographe et physicien Voigt reconnut le premier la parenté de ces diverses grandeurs, insista sur leurs caractères communs, et les baptisa « *tenseurs* ». Ce mot rappelle nettement l'origine des tenseurs, puisque le premier identifié avait été le système des tensions dans un solide déformé.

Ces premiers tenseurs n'étaient que les plus simples, les premiers membres d'une nombreuse famille, et l'on a maintenant défini toute une série de tenseurs de divers ordres et de types différents.

Il est indispensable de classer les grandeurs physiques suivant leur nature vectorielle ou tensorielle, car lors d'un changement de système de référence, ces quantités se transforment suivant des lois très différentes. Nous aurons donc à énoncer, tout comme pour les équations de dimension, la règle absolue que voici :

*Une égalité ne peut avoir de sens, que si ses deux membres sont de même nature tensorielle*; si cette condition n'est pas réalisée, un simple changement de système de référence brisera la relation, qui n'aura qu'un caractère fortuit et accidentel.

### III. — Quelques exemples de tenseurs.

Avant de passer à des définitions plus précises, montrons sur quelques exemples ce que sont les tenseurs les plus courants en physique; ce premier classement n'aura rien de rigoureux, et nous aurons par la suite à le reviser et préciser en de nombreux points; il nous servira seulement pour une première orientation.

Un *tenseur d'ordre zéro*, c'est ce que nous appelions préalablement un *scalaire*; une telle quantité est mesurée par un nombre unique : la masse, la température, l'énergie sont des scalaires; la pression dans un fluide parfait, le volume, la densité nous apparaissent aussi, au premier abord, comme des scalaires. Un examen plus attentif nous obligera plus tard à quelques précautions supplémentaires à leur sujet.

Un *tenseur du premier ordre* n'est autre qu'un *vecteur polaire*. Dans un espace à  $r$  dimensions, ce vecteur sera représenté par un jeu de  $r$  composantes. Lorsqu'on changera de système de coordonnées, ces composantes se transformeront d'une manière analogue aux coordonnées elles-mêmes; une vitesse, une force, un champ électrique sont des tenseurs de premier ordre. Tant que nous nous contenterons de passer des coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  à d'autres coordonnées cartésiennes (axes rectilignes orthogonaux) les définitions usuelles des vecteurs nous suffiront. Mais lorsqu'il faudra envisager des axes obliques ou des coordonnées curvilignes, nous aurons à reprendre de très près toutes les définitions, et certaines particularités dans le choix des composantes joueront un rôle essentiel.

Nous avons déjà indiqué le caractère particulier de ce que l'on appelle les *vecteurs axiaux*. Un vecteur polaire se transforme comme les coordonnées, dans tous les changements d'axes cartésiens, même si le sens de rotation des axes est modifié. Au contraire, un *vecteur axial* est sensible à ce sens de rotation; il se comporte

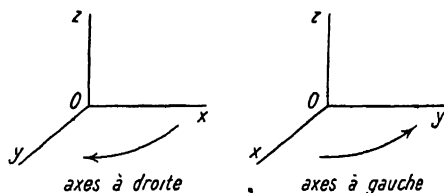


Fig. 1.1.

comme un vecteur, tant qu'on ne change pas le sens des axes ; si l'on passe d'un système d'axes à droite à un système d'axes à gauche (fig. 1. 1), le tenseur axial change de signe.

Le type du tenseur axial, c'est le produit vectoriel. Prenons deux vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , construisons le parallélogramme de côtés  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , et sur la normale à ce parallélogramme, portons une longueur  $p$  égale à la surface du parallélogramme. Cette longueur sera portée dans un sens tel que le trièdre  $a, b, p$  forme un *système d'axes à gauche*. Nous aurons ainsi défini le vecteur axial  $\vec{p}$ , comme produit vectoriel des vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  (G. Bruhat,

*Cours de Mécanique physique*, Masson, 1934, p. 6) :

$$(1.1) \quad \vec{p} = [\vec{a} \times \vec{b}].$$

On emploie souvent une flèche incurvée pour marquer le vecteur axial et le distinguer du vecteur polaire, caractérisé par une flèche rectiligne. La

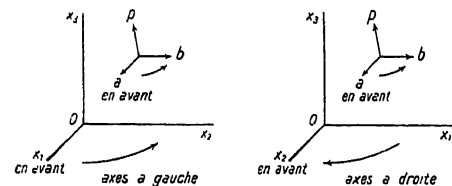


Fig. 1. 2.

figure (1. 2) représente cette construction, tandis que la figure (1. 3) illustre le fait qu'en changeant l'ordre des vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  on change le signe du vecteur produit :

$$(1.2) \quad \vec{p}' = [\vec{b} \times \vec{a}] = -[\vec{a} \times \vec{b}] = -\vec{p}.$$

Pour se rappeler le sens de rotation, de nombreux moyens mnémotechniques sont employés :

1<sup>o</sup> *règle des trois doigts* : le pouce, l'index et le troisième doigt de la main droite forment un trièdre à gauche ; si  $\vec{a}$  est pris le long du pouce, et  $\vec{b}$  suivant l'index, le produit vectoriel  $\vec{p}$  sera dirigé suivant le troisième doigt ;

2<sup>o</sup> *règle du tire-bouchon* : en tournant la poignée d'un tire-bouchon dans le sens  $a \rightarrow b$ , on l'enfonce suivant la direction  $p$  ;

3<sup>o</sup> La *règle du bonhomme d'Ampère* revient au même.

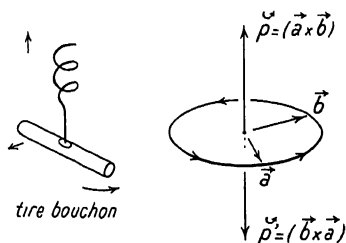


Fig. 1. 3.

Dans un système d'axes à gauche (fig. 1. 2) les composantes du produit vectoriel  $\vec{p}$  sont :

$$(1.3) \quad p_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad p_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \quad p_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Mais si l'on a un système d'axes à droite (fig. 1. 2), les signes sont changés, puisque le système d'axes tourne en sens inverse du produit vectoriel ; ce retournement des axes produit le même résultat que l'échange des vecteurs  $a$  et  $b$ , qui retournait le sens du trièdre  $abp$  (fig. 1. 3) :

$$(1.4) \quad \pi_1 = -a_2 b_3 + a_3 b_2 \quad \pi_2 = -a_3 b_1 + a_1 b_3 \quad \pi_3 = -a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

Ces définitions jouent dans un grand nombre de lois physiques. On les reconnaît à l'emploi, dans les énoncés, d'une des règles mnémotechniques ci-dessus.

Un autre exemple de vecteur axial est donné par l'opération de *curl* ou *rotationnel*. Donnons-nous

un champ de vecteurs  $\vec{A}$ , qui dépendent des coordonnées. Le rotationnel de  $\vec{A}$  est un vec-

teur  $\vec{u}$  tel que le flux de  $\vec{u}$  au travers d'une surface  $S$  soit égal au travail (à la circulation, dit-on aussi) de  $\vec{A}$  le long du contour fermé qui limite  $S$ . Les signes sont choisis de façon que le flux positif et le sens de rotation positif se correspondent par la règle du tire-bouchon :

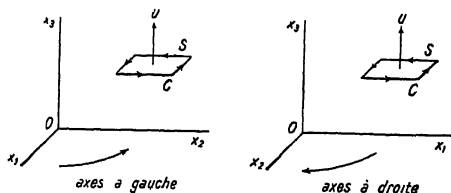


Fig. 1. 4.

$$(1.5) \quad \text{flux de } \vec{u} = \int_S \vec{A} d\vec{l}$$

$$\vec{u} = \text{rot } \vec{A}.$$

Cette définition conduit aux formules suivantes (G. Bruhat, *Cours d'Electricité*, 3<sup>e</sup> éd. Masson, 1934, p. 183) dans un système d'axes à gauche :

$$u_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \quad u_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \quad u_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}.$$

Dans un système d'axes à droite, il faudrait inverser les signes, tout comme pour le produit vectoriel, et pour les mêmes raisons.

Ces vecteurs axiaux sont, nous le verrons ultérieurement, un cas particulier de tenseurs du second ordre ; nous indiquerons rapidement ce fait au § 6 de ce chapitre, mais la démonstration rigoureuse ne pourra être donnée qu'au chapitre III, §§ 6 à 8.

Un *tenseur du second ordre* se représente en général par un tableau de  $r^2$  composantes, si  $r$  est le nombre de dimensions de l'espace. Chaque composante est caractérisée par deux indices  $i, k$  qui peuvent prendre toutes les valeurs 1, 2 ... jusqu'à  $r$ . Ainsi, dans l'espace à trois dimensions, le tableau comportera 9 composantes :

$$(1.6) \quad (t_{ik}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

#### IV. — Le tenseur des efforts en élasticité.

L'exemple le plus connu est celui du système des efforts (tensions) dans un corps solide déformé (G. Bruhat, *Cours de Mécanique physique*. Masson, 1934, ch. XXIX, p. 671). Nous nous limiterons, pour le moment, au cas d'un trièdre de référence *trirectangle*, formé par les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$ .

que cette surface forme un tétraèdre avec les plans  $x_1x_2x_3$  des anciennes coordonnées (fig. 1. 7).

Les faces du tétraèdre seront les projections de  $dS_L$  sur les trois plans :

$$\begin{aligned}
 (1. 15) \quad dS_3 &= dS_L \cos (\widehat{X_L O x_3}) = dS_L \beta_{13} && \text{face dans le plan } x_1x_2 \\
 dS_1 &= dS_L \cos (\widehat{X_L O x_1}) = dS_L \beta_{11} && \text{face dans le plan } x_2x_3 \\
 dS_2 &= dS_L \beta_{12} && \text{face dans le plan } x_3x_1
 \end{aligned}$$

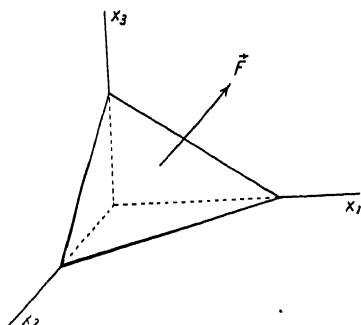


Fig. 1. 7.

A travers un élément de surface  $dS_L$  s'exerce une force  $d\vec{f}$  dont les composantes sont :

$$(1. 16) \quad df_k = t_{ik} dS_i$$

les  $t_{ik}$  étant les composantes du tableau (1. 8), dont la formule (1. 7) résume la signification physique.

L'équilibre du tétraèdre de la figure (1. 7) exige que les forces, s'exerçant sur la face  $dS_L$  oblique, compensent exactement les forces au travers des autres faces.

Appelons  $dF_k$  les 3 composantes ( $k = 1, 2$  ou  $3$ ) de la force  $d\vec{F}$  au travers de  $dS_L$ ; l'équilibre donnera :

$$(1. 17) \quad dF_k = \sum_i t_{ik} dS_i = dS_L [\beta_{L1} t_{1k} + \beta_{L2} t_{2k} + \beta_{L3} t_{3k}].$$

Cette formule correspond bien à celles de Bruhat (*Mécanique*, p. 673). Les cosinus directeurs  $\beta_{L1}$ ,  $\beta_{L2}$  et  $\beta_{L3}$  de la normale à la surface  $dS_L$  sont notés  $p$ ,  $q$ ,  $r$  chez Bruhat; les conventions  $t_{ik}$  pour les composantes du tenseur des efforts permettent de regrouper en une seule formule ce que Bruhat écrit en trois formules, à cause de ses notations  $N$  et  $T$  non symétriques.

La formule (1. 17) nous donne, pour la surface  $dS_L$ , les composantes  $dF_k$  de la force  $d\vec{F}$  projetée sur les anciens axes  $x_1x_2x_3$ . Pour achever la transformation, il nous faut trouver maintenant les projections de cette force  $d\vec{F}$  sur les nouveaux axes  $X_1X_2X_3$ . La projection de  $d\vec{F}$  (force exercée au travers de  $dS_L$  normal à  $X_L$ ) sur l'axe  $X_M$  va nous donner la composante  $T_{LM}$  du tenseur transformé :

$$\begin{aligned}
 (1. 18) \quad T_{LM} &= \text{proj}_M dF = dF_1 \beta_{M1} + dF_2 \beta_{M2} + dF_3 \beta_{M3} \\
 &= \beta_{M1} \beta_{L1} t_{11} + \beta_{M1} \beta_{L2} t_{21} + \beta_{M1} \beta_{L3} t_{31} + \dots \\
 &= \sum_{k=1} \sum_{i=1} \beta_{Mk} \beta_{Li} t_{ik}.
 \end{aligned}$$

La somme comprend 9 termes ( $i = 1, 2, 3$  et  $k = 1, 2, 3$ ) de sorte que chaque nouvelle composante  $T_{LM}$  du tenseur transformé s'exprime par une combinaison linéaire des 9 composantes initiales.

Ces formules (1. 18) sont caractéristiques de la transformation d'un tenseur



du second ordre, pour des changements d'axes cartésiens. Nous aurons à en rechercher la généralisation pour des axes obliques ou des coordonnées curvilignes quelconques.

# VI. — Tenseurs du second ordre; symétrie ou antisymétrie ; cas de dégénérescence.

Ce premier examen du tenseur des efforts nous a déjà permis d'observer un cas de réduction du nombre des composantes indépendantes. La symétrie du tenseur ( $t_{ik} = t_{ki}$ ) a ramené de 9 à 6 les composantes distinctes. Un autre cas, très important aussi, est celui de l'*antisymétrie* caractérisée par les relations :

$$(1. 19) \quad t_{ik} = -t_{ki} \quad t_{ii} = -t_{ii} = 0.$$

Une condition de ce genre annule les composantes suivant la diagonale, et nous laisse, dans l'espace ordinaire à 3 dimensions, un tenseur ainsi construit :

$$(1. 20) \quad \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste que 3 composantes indépendantes; dans un bon nombre de problèmes, ce tenseur du second ordre pourra être assimilé à un vecteur; ses propriétés ne sont pourtant pas exactement celles d'un vecteur scalaire, mais nous verrons que c'est un *vecteur axial* auquel nous serons ainsi ramené. Le vecteur axial est une représentation commode d'un tenseur antisymétrique du 2<sup>e</sup> ordre.

Il est facile de voir qu'une telle réduction est toute fortuite et ne se produit que dans un espace à 3 dimensions. Dans un plan (2 dimensions), un vecteur possède 2 composantes; un tenseur antisymétrique du second ordre s'écrit :

$$(1. 21) \quad \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ -t_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

et n'a plus qu'une seule composante indépendante. L'analogie entre tenseur antisymétrique et vecteur ne pourra donc pas être valable dans un plan.

Nous pouvons nous intéresser à des espaces comportant plus de 3 dimensions. En relativité, il est d'usage courant de traiter le temps comme une quatrième coordonnée, analogue aux 3 coordonnées d'espace. Au lieu de considérer séparément, le temps d'une part, et l'espace d'autre part, on raisonne sur « l'univers à 4 dimensions  $x, y, z$  et  $t$  ». Dans cet univers quadridimensionnel, un vecteur possède 4 composantes. Que donne un tenseur du 2<sup>e</sup> ordre antisymétrique ? Le tableau :

$$(1. 22) \quad \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} & t_{24} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 & t_{34} \\ -t_{14} & -t_{24} & -t_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

fait apparaître 6 composantes indépendantes. Lorsque de telles grandeurs ont été trouvées pour la première fois, on leur a d'abord donné le nom de *sixti-vecteur* (ou en allemand « Sechservektor ») ; mais ces dénominations sont maintenant tombées en désuétude, et l'usage des notations tensorielles a été trouvé bien plus avantageux.

Comme exemple de ce genre, citons l'ensemble des 6 composantes de champ électrique et d'induction magnétique. Dans l'univers à 4 dimensions, ces 6 quantités constituent un véritable tenseur antisymétrique du second ordre.

En général, dans un *espace à  $r$  dimensions* :

un vecteur possède  $r$  composantes ;

un tenseur du 2<sup>e</sup> ordre possède  $r^2$  composantes ;

un tenseur du 2<sup>e</sup> ordre symétrique en a  $\frac{r(r+1)}{2}$  ;

et un tenseur du 2<sup>e</sup> ordre antisymétrique  $\frac{r(r-1)}{2}$ .

Disons tout de suite que le nombre des composantes ne suffit pas à caractériser un tenseur ; ce qui est essentiel, c'est la nature des transformations que subissent ces composantes lors d'un changement de système de référence ; les exemples précédents sont seulement donnés à titre de première indication ; nous verrons plus loin les définitions précises.

Les propriétés particulières de certains corps physiques peuvent se traduire par des relations simplifiant beaucoup l'aspect de certains tenseurs. Nous avons défini le tenseur des efforts  $t_{ik}$  (éq. 1. 8) dans un corps continu déformé ; prenons-le sous la forme particulière (1. 11) qui distingue nettement les composantes normales et tangentiellles. Considérons maintenant l'exemple d'un fluide ; nous savons que, dans un tel corps, les efforts tangentiels s'annulent ; quelle que soit l'orientation d'un élément de surface, tracé au milieu d'un fluide au repos, la force s'exerçant au travers de cet élément de surface  $dS$  est toujours normale ; si  $p$  est la pression, l'effort de traction sera  $-pdS$ . Les définitions usuelles, pour les efforts, consistent à considérer des tractions, comme nous l'avons fait au paragraphe 4. Dans ces conditions, le tenseur des efforts se simplifie ainsi :

$$(1. 23) \quad \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Il ne reste qu'une seule composante indépendante, la pression  $p$ . C'est un cas de *dégénérescence*. Le tenseur n'est plus caractérisé que par un nombre unique ; dans les applications, on pourra le traiter comme un scalaire.

Ainsi donc, pour une théorie précise et complète, il est indispensable de reconnaître, d'une manière aussi générale que possible, les propriétés tensorielles de toutes les grandeurs physiques. Les méthodes de calcul tensoriel nous permettront de mettre toutes les équations de la physique sous une forme très condensée et très maniable, tout en laissant bien en évidence la nature des transformations qui se produisent lorsqu'on change de système de référence.

Comme pour les équations de dimension, nous poserons d'une manière

absolue la condition d'*homogénéité des formules*. Une équation n'aura de sens que si ses deux membres sont des tenseurs de même nature.

Pour les applications usuelles, nous devons souligner tous les cas de réduction, les conditions de symétrie ou les exemples de dégénérescence ; ces conditions permettront d'importantes simplifications dans un grand nombre de problèmes.

Nous nous sommes arrêtés aux tenseurs du second ordre ; mais nous aurons à considérer aussi des tenseurs d'ordre supérieur, dont les définitions seront précisées ultérieurement.

## VII. — Qu'est-ce qu'une matrice ?

Prenons un vecteur  $\vec{v}$  dans un espace à  $r$  dimensions ; appelons  $v_1, v_2 \dots v_r$  ses composantes ; considérons un autre vecteur  $\vec{u}$  dans un espace différent, comportant  $s$  dimensions, et soient  $u_1, u_2 \dots u_s$  les composantes. Nous pourrions avoir à étudier une loi qui se traduise par une relation linéaire entre ces deux vecteurs ; nous écrirons alors une série de  $r$  équations exprimant les  $v_i$  en fonction des  $u_k$  :

$$(1. 24) \quad v_i = \sum_k a_{ik} u_k$$

ou, symboliquement :

$$\vec{v} = A\vec{u}.$$

Les équations (1. 24) comportent  $r.s$  coefficients, que nous pouvons écrire sous forme d'un tableau rectangulaire :

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\dots$	$u_k$	$\dots$	$u_s$
$v_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\dots$	$a_{1k}$	$\dots$	$a_{1s}$
$v_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$\dots$	$a_{2k}$	$\dots$	$a_{2s}$
$\dots$	$\dots$						
$v_i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$\dots$	$a_{ik}$	$\dots$	$a_{is}$
$\dots$	$\dots$						
$v_r$	$a_{r1}$	$a_{r2}$	$a_{r3}$	$\dots$	$a_{rk}$	$\dots$	$a_{rs}$

Le tableau comporte  $r$  lignes, classées suivant  $v_1, v_2 \dots v_r$  et  $s$  colonnes, suivant  $u_1 \dots u_k \dots u_s$ . C'est ce qu'on appelle une matrice ; nous représenterons cette grandeur en inscrivant seulement le terme général :

$$(1. 25) \quad \text{matrice } A = \| a_{ik} \| = (a_{ik}).$$

L'écriture avec deux barres, ou bien avec une parenthèse nous permettra de distinguer la matrice d'un déterminant.

Le cas le plus fréquent sera celui d'une *matrice carrée* possédant autant

de lignes que de colonnes ( $r = s$ ). Une telle matrice permet d'établir une correspondance linéaire entre deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  pris dans un même espace à  $r$  dimensions.

Représentons  $\vec{u}$  par un vecteur  $OP$  et  $\vec{v}$  par  $OP'$ ; les formules (1. 24) de la matrice font correspondre à tout point  $P$  de l'espace un autre point  $P'$  (fig. 1. 8). Les mêmes équations peuvent être interprétées autrement; nous pouvons admettre que  $u_1, u_2 \dots u_r$  sont les composantes d'un vecteur  $OP$  dans un premier système d'axes ( $Oxyz \dots$ ) et que les composantes  $v_1, v_2 \dots v_r$  représentent le *même vecteur* dans un autre système d'axes, de même origine  $O$  que le premier  $OXYZ \dots$ ; c'est ce que schématise la figure (1. 9).

Suivant les problèmes, la matrice  $A$  se présentera sous l'un ou l'autre de ces aspects; il y aura intérêt à les étudier tous deux à la fois.

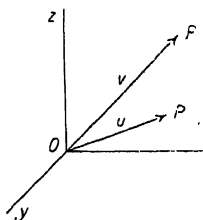


Fig. 1. 8

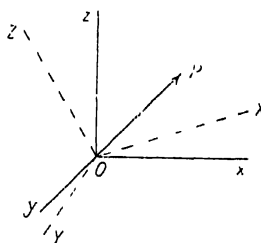


Fig. 1. 9.

Si l'on se place au premier point de vue (correspondance linéaire entre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ) la matrice ressemble beaucoup à un tenseur du second ordre, lorsqu'on prend les deux vecteurs dans un même espace. Mais cette similitude disparaît lorsque les deux vecteurs sont pris dans deux espaces différents; la matrice devient rectangle tandis qu'un tenseur est toujours (au 2<sup>e</sup> ordre) un tableau carré.

Enfin, les règles de transformation, pour des changements d'axes, ne sont pas nécessairement les mêmes.

Un tenseur du 2<sup>e</sup> ordre se représente par une matrice, mais une matrice n'est pas nécessairement un tenseur. Nous aurons à considérer souvent des matrices n'ayant aucun caractère tensoriel.

### VIII. — *Différentes sortes d'espaces de référence ; espace vectoriel affine, espace métrique.*

Les propriétés des tenseurs ou des matrices seront très différentes, suivant la nature des espaces dans lesquels ils seront définis. Le physicien attribue, instinctivement, à tout espace dont il se sert les propriétés usuelles de l'espace euclidien; une telle convention rend souvent des services, mais il arrive qu'elle ne s'impose pas, et que certains problèmes ne permettent pas de définir toutes les propriétés qui constituent un espace euclidien.

Les mathématiciens distinguent deux cas essentiels : l'espace vectoriel et l'espace métrique. Dans le premier type d'espace, on admet les postulats qui permettent de définir des vecteurs ; l'espace vectoriel à  $r$  dimensions comportera  $r$  axes de coordonnées, sur chacun desquels on aura défini une unité particulière ; nous aurons ainsi l'unité  $\vec{e}_1$  suivant l'axe 1 ; l'unité  $\vec{e}_2$  suivant l'axe 2, etc. Un vecteur arbitraire  $\vec{v}$  sera représenté par ses composantes  $v_1, v_2 \dots v_r$  suivant les différents axes ; cela revient à le définir par la formule vectorielle :

$$(1. 26) \quad \vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \dots + \vec{e}_r v_r.$$

Les postulats qui permettent de préciser ces notions constituent la base de la géométrie affine. Ce qui manque à l'espace vectoriel, c'est la possibilité de comparer entre elles les unités prises suivant les différents axes ; les vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_r$  sont supposés impossibles à mesurer au moyen d'un même étalon de longueur (fig. 1. 10).

La longueur absolue du vecteur  $v$  ne peut donc être définie, puisqu'il n'y a aucune commune mesure entre ses diverses composantes  $v_1, v_2 \dots v_r$ . La distance de deux points, dans l'espace vectoriel, ne peut non plus être mesurée. Si l'on se donne deux points voisins, P et P', le vecteur PP' aura les composantes  $\delta x_1, \delta x_2 \dots \delta x_r$ , toutes très petites, mais nous ne saurons pas former une combinaison de ces  $\delta x$  qui puisse représenter la valeur absolue de la distance PP'.

Ces définitions surprennent un peu, au premier abord, et l'on se pose aussitôt la question : de telles abstractions peuvent-elles servir en physique ? La réponse est affirmative ; de nombreuses branches de la physique et de la technique font usage de figures ou diagrammes tracés en géométrie affine. On néglige en général d'en avertir le lecteur, et cette omission provoque souvent des obscurités ; les propriétés restreintes de l'espace vectoriel obligent à des détours de raisonnement dont le lecteur ne comprend pas bien la raison.

En thermodynamique, par exemple, on trace des diagrammes avec des coordonnées telles que  $p$ , pression,  $v$ , volume et  $T$ , température ; les figures 1. 11 et 1. 12 représentent des diagrammes de ce genre, pour un gaz parfait et pour un gaz réel (L. Brillouin, *Notions élémentaires de Mathématiques pour les Sciences expérimentales*, collection du P. C. B., Masson, Paris, 1935, ch. VII, pp. 237-239). Ces figures sont tracées dans un espace vectoriel, non métrique. Les variables  $p, v, T$  n'ont aucune commune mesure ; leurs « dimensions » ne sont pas les mêmes ; si l'on modifie les unités fondamentales, la pression, le volume et la température seront changés (numériquement) dans des proportions arbitraires.

Dans cet espace  $p, v, T$ , il nous est impossible de définir la distance de deux points ! Entre le point P représentant un état du gaz et un point P' voisin, quelle est la distance ? Une telle question n'a aucun sens physique.

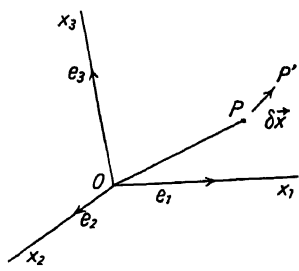


Fig. 1. 10.

Nous pouvons expliciter ces résultats de la manière suivante : lorsque nous tracerons un diagramme  $p, v$  (deux dimensions seulement simplifient les figures), nous pourrons, sur notre feuille de papier, choisir 1 cm. pour représenter 1 atmosphère ( $p$ ) et 1 cm. pour représenter 1 cm<sup>3</sup> ( $v$ ) ; mais ce choix est arbitraire ; un diagramme tracé avec d'autres unités sera tout aussi bon.

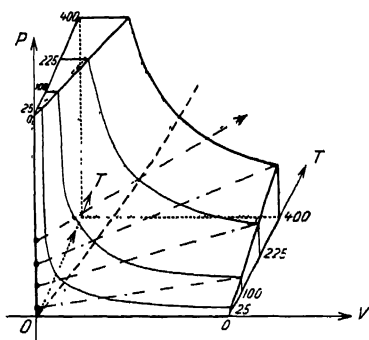


Fig. 1. 11.

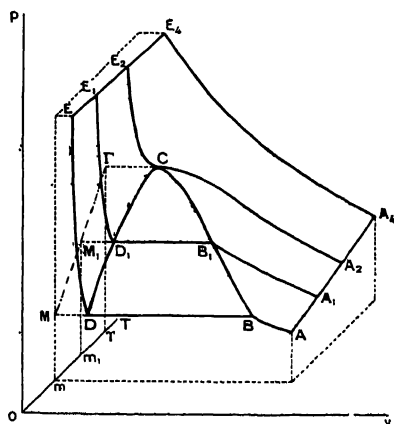


Fig. 1. 12.

Nous pouvons donc affirmer ceci : en géométrie affine, nous nous intéressons seulement aux propriétés des figures, si ces propriétés sont susceptibles d'une définition invariante vis-à-vis de changements arbitraires des échelles prises suivant les différents axes.

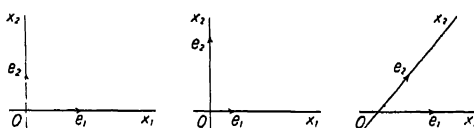


Fig. 1. 13.

De même, c'est une pure convention que de tracer des axes orthogonaux ; la géométrie affine doit être invariante par rapport à des inclinaisons arbitraires des axes les uns sur les autres. Si l'on ne peut définir une longueur, il est impossible de parler d'un angle ; un angle  $\theta$  est en effet le rapport de deux longueurs, l'une prise suivant le cercle et l'autre suivant le rayon ; les fonctions trigonométriques  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  sont aussi des rapports de longueur.

Dans le plan affine, une fonction :

$$x_2 = f(x_1)$$

se représentera par une courbe ; suivant les conventions d'axes et d'unités, cette courbe se déformera, mais certaines relations auront un sens invariant ; ce sont seulement ces relations invariantes que nous aurons à considérer.

Nous pourrions aussi procéder à des changements de variables, si nous savons définir deux nouvelles fonctions :

$$(1. 27) \quad X_1 = f_1(x_1, x_2) \quad X_2 = f_2(x_1, x_2)$$

des anciennes coordonnées ; les  $X_1$  et  $X_2$  pourront être utilisées comme nouvelles variables, et établiront une correspondance entre deux espaces affines.

### IX. — Les diagrammes thermodynamiques, comme exemples de géométrie affine.

Prenons deux variables  $x_1$  et  $x_2$ , qui seront les coordonnées dans un plan en géométrie affine. Nous pourrions définir une troisième grandeur  $x_3$  comme fonction de  $x_1$  et  $x_2$  :

$$(1. 28) \quad x_3 = f(x_1, x_2).$$

Si nous prenons  $x_1, x_2, x_3$  comme coordonnées d'un espace vectoriel, la relation (1. 28) représente une surface. Nous saurons calculer les dérivées partielles :

$$(1. 29) \quad \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

L'indice inférieur ( $x_1$  ou  $x_2$ ) indique celle des coordonnées que l'on maintient constante dans la dérivation. La première dérivée partielle est définie par la variation de  $x_3$  lorsqu'on se déplace en gardant  $x_2$  constant, suivant une parallèle à  $Ox_1$ .

Soit maintenant à étudier la variation de  $x_3$  le long d'un chemin oblique OR (fig. 1. 14), défini par une relation :

$$(1. 30) \quad F(x_1, x_2) = C.$$

Si nous étions en géométrie ordinaire (métrique), nous pourrions mesurer un déplacement oblique  $\delta s$  le long de OR, en valeur absolue ; si  $\delta f$  était l'accroissement de  $f$  pour le déplacement  $\delta s$ ,

nous définirions naturellement la dérivée oblique par  $\frac{\delta f}{\delta s}$ . Cela n'est pas possible en géométrie affine. Nous n'avons pas d'unité de longueur suivant OR.

Nous pourrions alors tourner la difficulté, et employer comme unité :

soit  $r_1$ , segment dont la projection sur  $Ox_1$  est l'unité  $e_1$  ;

soit  $r_2$ , segment dont la projection sur  $Ox_2$  est l'unité  $e_2$ .

Nous définirons donc une dérivée en comparant la variation  $\delta x_3$  à la variation  $\delta x_1$ , par exemple, lors d'un déplacement suivant la direction oblique. Cherchons donc la dérivée  $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$  suivant une certaine courbe à  $F$  constant

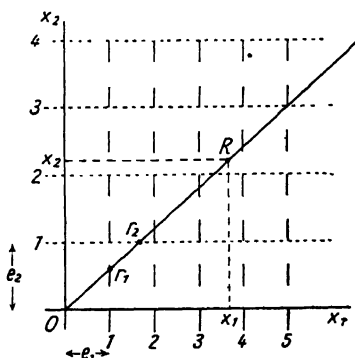


Fig. 1. 14.

(éq. 1. 30). Nous tracerons, sur la figure (1. 15) un segment PP' suivant la courbe à F constant, et un contour PQP' parallèle aux axes ; nous aurons :

$$(1. 31) \quad \delta x_3(PP') = \delta x_3(PQ) + \delta x_3(QP').$$

La variation de  $x_3$  suivant PP' ou suivant le contour PQP' est la même ; le

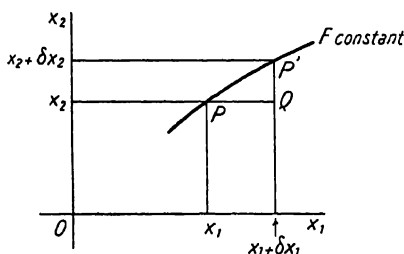


Fig. 1. 15.

segment PQ' est égal à  $\delta x_1$  ; le segment QP' est la variation  $\delta x_2$  qui ramène sur la courbe F :

$$\delta x_2 = \left( \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right)_F \delta x_1.$$

Donc :

$$(1. 32) \quad \delta x_3(PP') = \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)_{x_2} \delta x_1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)_{x_1} \delta x_2.$$

Ce qui nous donne :

$$(1. 33) \quad \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)_F = \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)_{x_2} + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)_{x_1} \left( \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right)_F.$$

On retrouve constamment, en thermodynamique, ce type de formules. Cherchons-en quelques exemples, tirés du *Cours de Thermodynamique* de G. Bruhat (2<sup>e</sup> éd. Masson, Paris, 1933).

Considérons tout d'abord un déplacement suivant une courbe de niveau, à  $x_3$  constant ; nous prenons  $F = x_3$  ; dans ces conditions, le premier membre est nul ; établissons la correspondance suivante :

$$x_1 = v \quad x_2 = T \quad x_3 = p$$

la formule (1. 33) s'écrit :

$$(1. 34) \quad 0 = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_p.$$

Nous retrouvons ainsi la 5<sup>e</sup> formule de la p. 43 de la *Thermodynamique* de Bruhat ; cet auteur l'écrit ainsi :

$$(1. 35) \quad \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = -1$$

ce qui revient exactement au même.

La fonction F, que nous gardons constante sur la courbe C pourra être



l'entropie ; la formule (1. 33) nous donne alors la variation adiabatique de la variable  $x_3$  c'est-à-dire de la pression :

$$(1. 36) \quad \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s.$$

On définit le coefficient de compressibilité isotherme  $\chi$  et le coefficient adiabatique  $\chi'$  par les relations :

$$(1. 37) \quad \chi = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad \chi' = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s.$$

Notre formule (1. 36) donne donc :

$$\frac{1}{\chi'} = \frac{1}{\chi} - v \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s$$

ce qui s'écrit encore, en introduisant le rapport :

$$(1. 38) \quad \gamma = \frac{\chi}{\chi'} \quad \gamma - 1 = -v\chi \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s$$

ou :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} = -\frac{\chi v}{\gamma} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s = -\chi' v \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s = \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v.$$

Mais  $\left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s$  représente évidemment le rapport  $\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s$ . D'où le résultat :

$$(1. 39) \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v}{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_s}.$$

Cette formule est identique à celle de Bruhat, p. 87, fin du § 66. On pourrait multiplier les exemples et montrer que les célèbres formules de Clapeyron ou d'Helmholtz sont du type général que nous venons d'établir en (1. 33).

Revenons aux courbes et surfaces tracées en géométrie affine.

Sur une surface telle que (1. 28) nous *pourrons tracer des courbes de niveau*, qui sont des sections à  $x_3$  constant. *Nous ne pouvons pas définir des lignes de plus grande pente.* En effet, pour avoir la pente de la surface, il faut comparer la variation  $\delta x_3$  d'altitude à la longueur absolue  $\delta s$  du déplacement. La ligne de plus grande pente est définie par la condition :

$$(1. 40) \quad \frac{\delta x_3}{\delta s} = \max.$$

Or, nous sommes incapables de mesurer une longueur  $\delta s$  suivant une direction oblique ; nous ne pouvons donc pas écrire une condition telle que (1. 40), qui n'a plus aucun sens.

Ce résultat se retrouve par une autre voie : la ligne de plus grande pente est perpendiculaire à une ligne de niveau. Or, nous ne devons pas parler d'angles en géométrie affine, car les angles ne se conservent pas dans les modifications d'axes résumées sur la figure (1. 13). Les lignes de plus grande pente ne peuvent se définir.

Les géomètres ont donc eu grandement raison de systématiser d'abord la

géométrie affine et ensuite seulement la géométrie métrique, qui se confond pratiquement avec la géométrie usuelle. En géométrie métrique, on ajoute une condition supplémentaire, qui permet de définir la distance de deux points ou la longueur d'un vecteur. Cette condition est prise sous une forme très générale, qui englobe la géométrie euclidienne courante et les géométries telles que celle de Lobatschewski, où l'axiome d'Euclide ne serait pas satisfait. Nous verrons aux chapitres suivants le détail de ces énoncés.

Terminons par une remarque : il serait intéressant, en dehors des deux cas purs (affine et métrique) de porter l'attention sur des *espaces mixtes*, qui seraient affines vis-à-vis de certaines coordonnées et métriques pour d'autres. L'étude de ces espaces mixtes permettrait de définir des cas intermédiaires où certaines grandeurs métriques seraient susceptibles d'utilisation tandis que d'autres échapperaient.

La physique fournit des exemples de ce genre. En météorologie, on trace des courbes de niveau barométriques. Ce sont les sections d'une surface dont l'altitude  $x_3$  est la pression barométrique  $p$ , tandis que les coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  sont la latitude et la longitude. L'espace  $p, x_1, x_2$  est métrique dans le plan  $x_1, x_2$ , mais pas suivant la coordonnée  $p$  qui n'a aucun rapport avec  $x_1$  ni  $x_2$ . On peut ici définir une ligne de plus grande pente, car cela nécessite seulement la connaissance d'une longueur oblique mesurée dans le plan horizontal. On ne peut pas, en revanche, définir la courbure de la surface, car il faudrait, à cet effet, pouvoir mesurer des longueurs le long de la surface, c'est-à-dire obliquement par rapport à la coordonnée  $x_3$  qui est du type affine.

---

## CHAPITRE II

# GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DÉFINITION DES TENSEURS

### 1. — Les axiomes de la géométrie vectorielle.

Les explications du chapitre précédent nous ont montré la nécessité d'étudier méthodiquement les propriétés des grandeurs que l'on peut définir dans un *espace vectoriel*, sans métrique. Un espace de ce genre, à  $r$  dimensions, comportera  $r$  vecteurs de base indépendants :

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$$

qui donneront les unités de mesure suivant les  $r$  axes de coordonnées. Un vecteur quelconque  $\vec{x}$  sera décomposé suivant les différents axes, et ses composantes seront notées :

$$x^1, x^2, \dots, x^r$$

de sorte que nous admettons la formule vectorielle de définition :

$$(n. 1) \quad \vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^r \vec{e}_r = \sum_{k=1}^r x^k \vec{e}_k.$$

Nous insisterons sur les conventions faites pour les positions des indices : nous plaçons l'indice en bas, lorsqu'il s'agit des vecteurs unités  $\vec{e}_k$  et en haut, pour les coordonnées  $x^k$ . Nous verrons en effet, un peu plus loin, que les coordonnées et les vecteurs unités se transforment suivant des schémas opposés, qui ont reçu les noms de *covariance* et de *contravariance* ; nous préférons distinguer, une fois pour toutes, les modes de transformation en plaçant différemment les indices ; les dénominations suivantes seront adoptées :

un indice en haut signifie la *contravariance*,

un indice en bas indique la *covariance*.

La formule vectorielle (1) est en accord avec la série des postulats suivants, qui nous servent de définitions des opérations sur les vecteurs :

ADDITION. — L'addition de deux vecteurs se fait terme à terme ; la formule :

$$(n. 2) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

représente le système de  $r$  équations :

$$a^k + b^k = c^k \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \dots r.$$

Les règles suivantes en découlent immédiatement :

$$(II. 3) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{lois de commutativité ;}$$

$$(II. 4) \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{loi d'associativité.}$$

**SOUSTRACTION.** — Si  $\vec{a}$  et  $\vec{c}$  sont deux vecteurs quelconques, on peut toujours trouver un vecteur  $\vec{x}$  et un seul, qui satisfasse à l'équation :

$$(II. 5) \quad \vec{a} + \vec{x} = \vec{c} \quad \vec{x} = \vec{c} - \vec{a}.$$

Ce vecteur  $\vec{x}$  est appelé la différence entre  $\vec{c}$  et  $\vec{a}$ .

**MULTIPLICATION.** — Nous définirons la multiplication d'un vecteur  $\vec{a}$  par un nombre ordinaire  $p$  ; ce sera la multiplication par  $p$  de toutes les composantes :

$$(II. 6) \quad p\vec{a} = \vec{b} \quad \text{signifie} \quad pa^k = b^k \quad k = 1, 2 \dots r.$$

Nous aurons ici les règles suivantes :

$$(II. 7) \quad (p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a} \quad \text{première loi distributive ;}$$

$$(II. 8) \quad p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b} \quad \text{deuxième loi distributive ;}$$

$$(II. 9) \quad p(q.\vec{a}) = (p.q)\vec{a} \quad \text{loi d'association.}$$

Enfin nous postulerons la formule définissant un nombre unité :

$$(II. 10) \quad 1.\vec{a} = \vec{a}$$

et l'existence du vecteur  $\vec{0}$  zéro :

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

Si l'on part, comme nous l'avons fait, de la formule (II. 1) et de son image géométrique, les postulats précédents paraissent presque évidents. Il est pourtant indispensable de les expliciter méthodiquement ; il arrive très souvent qu'au cours d'une [discussion] mathématique, on rencontre une grandeur  $x$ , qui se représente par une suite de  $r$  nombres de  $x_1, x_2 \dots x_r$ . Pourrions-nous appeler cet ensemble le « vecteur  $\vec{x}$  » ? Cela sera possible, si les postulats (II, 2) à (II, 10) sont remplis ; sinon, nous ne pourrions parler d'un vecteur.

Pour être complet, nous ajouterons encore la définition du *nombre de dimensions*  $r$  de l'espace vectoriel, avec l'axiome suivant :

*Le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants est  $r$ . On*

appelle  $h$  vecteurs  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_h$  linéairement indépendants, s'il est impossible de trouver entre eux une relation linéaire :

$$(11.11) \quad p_1 \vec{a}_1 + p_2 \vec{a}_2 \dots + p_h \vec{a}_h = 0$$

dont les coefficients  $p_1, p_2 \dots p_h$  ne soient pas tous nuls.

## II. — Changements d'axes rectilignes.

Dans l'espace vectoriel, tel que nous l'avons défini, nous pouvons prendre une série de  $r$  vecteurs de base,  $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \dots \vec{E}_r$ , qui nous serviront de nouveaux vecteurs fondamentaux ; tout vecteur supplémentaire  $\vec{E}_{r+1}$  présentera une relation linéaire à coefficients non nuls, avec les autres vecteurs  $\vec{E}_1 \dots \vec{E}_r$ .

Cela résulte de l'hypothèse d'un espace à  $r$  dimensions, et du postulat indiqué à la fin du paragraphe I.

Nous définirons chacun des vecteurs  $\vec{E}_M$  par ses composantes, que nous appellerons  $\alpha_M^k$  ; cette méthode nous permettra donc d'introduire des vecteurs unités dans un espace vectoriel qui serait connu seulement par les propriétés algébriques (11.2) à (11.11) du paragraphe précédent.

Le tableau suivant représente les coordonnées de nos nouveaux vecteurs unités :

VECTEURS	$x^1 \quad x^2 \quad \dots \quad x^k \quad \dots \quad x^r$			
	$\alpha_1^1$	$\alpha_1^2$	$\alpha_1^k$	$\alpha_1^r$
$E_2$	$\alpha_2^1$	$\alpha_2^2$	$\alpha_2^k$	$\alpha_2^r$
...				
$E_M$	$\alpha_M^1$	$\alpha_M^2$	$\alpha_M^k$	$\alpha_M^r$
...				
$E_r$	$\alpha_r^1$	$\alpha_r^2$	$\alpha_r^k$	$\alpha_r^r$

Si nous partons d'un espace où nous avons déjà défini  $r$  vecteurs de base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_r$ , et une formule vectorielle (11.1) nous pourrions écrire :

$$(11.13) \quad \vec{E}_M = \alpha_M^1 \vec{e}_1 + \alpha_M^2 \vec{e}_2 \dots + \alpha_M^k \vec{e}_k \dots + \alpha_M^r \vec{e}_r = \sum_k \alpha_M^k \vec{e}_k.$$

Les nouveaux vecteurs  $\vec{E}_M$  seront *indépendants* si le déterminant des  $\alpha_M^k$  est différent de zéro :

$$(11.14) \quad \Delta = | \alpha_M^k | \neq 0.$$

En effet, dire que nos vecteurs sont indépendants, c'est affirmer qu'on ne

peut trouver une relation du genre (II. 11) entre les  $\vec{E}_M$ . La relation vectorielle (II. 11) signifierait  $r$  relations entre les diverses composantes, car :

$$\sum_M p_M \vec{E}_M = p_1 \vec{E}_1 + p_2 \vec{E}_2 \dots + p_M \vec{E}_M \dots + p_r \vec{E}_r = 0$$

s'explique ainsi :

$$(II. 15) \quad \sum_M p_M \alpha_M^k = 0 \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots \text{ ou } r.$$

Or, s'il existe des relations de ce genre, avec des coefficients  $p_M$  qui ne soient pas tous nuls, le déterminant  $\Delta$  sera nul : un déterminant est nul s'il a deux colonnes égales ou proportionnelles, ou en général s'il existe une relation linéaire entre les colonnes. Si  $\Delta$  n'est pas nul (II. 14) aucune relation (II. 15) n'est possible et les vecteurs  $\vec{E}_M$  sont linéairement indépendants.

Pouvons-nous avoir un vecteur  $\vec{E}_{r+1}$  de plus, et conserver l'indépendance ? Non, cela nous est interdit par notre postulat sur le nombre de dimensions  $r$  de l'espace (fin du § 1<sup>er</sup>).

Voyons ce qui se passe, pour ce vecteur supplémentaire :

$$\vec{E}_{r+1} \text{ de composantes } x^1, x^2, \dots x^r.$$

Nous aurons certainement une relation vectorielle :

$$\sum_{M=1}^r p_M \vec{E}_M + p_{r+1} \vec{E}_{r+1} = 0,$$

c'est-à-dire un système de  $r$  équations linéaires entre les diverses composantes. Ecrivons ces équations en mettant au second membre les termes  $(r+1)$ .

$$(II. 16) \quad \sum_{M=1}^r p_M \alpha_M^k = -p_{r+1} x^k \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots r.$$

Cela fait  $r$  équations linéaires simultanées, avec second membre non nul <sup>(1)</sup> et déterminant  $\Delta$  non nul. Ces équations se résolvent et donnent :

$$(II. 17) \quad p_M = -\frac{1}{\Delta} \sum_k p_{r+1} x^k \cdot A_M^k$$

en appelant  $A_M^k$  le mineur de  $\alpha_M^k$  dans le déterminant  $\Delta$ . Ce mineur, rappelons que c'est le déterminant  $\Delta$ , amputé de la colonne  $k$  et de la ligne  $M$ , et muni du signe  $+$  ou  $-$  suivant qu'il faut un nombre pair ou impair de permutations de lignes et de permutations de colonnes pour amener le terme  $\alpha_M^k$  dans la position  $\alpha_1^1$ . On sait que l'on peut développer le déterminant  $\Delta$  sous les formes suivantes :

$$(II. 18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta = \sum_M \alpha_M^k A_M^k & \text{par rapport à la colonne } k ; \\ \Delta = \sum_k \alpha_M^k A_M^k & \text{par rapport à la ligne } M. \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup> Les coefficients  $p_{r+1}$  ne peuvent être tous nuls, car alors la combinaison linéaire ne contiendrait plus que les  $r$  vecteurs de base  $\vec{E}_1 \dots \vec{E}_r$ , or nous avons supposé que ceux-ci étaient indépendants.

La résolution (II. 17) est classique ; la somme située à droite représente le développement d'un déterminant du type  $\Delta$ , mais où la  $M^{\text{ième}}$  ligne aurait été remplacée par les  $(-p_{r+1}x^k)$  du second membre (II. 16).

Les formules (II. 16 et 17) nous donnent les valeurs des composantes du vecteur  $\vec{E}_{r+1}$  par rapport aux nouveaux axes  $\vec{E}_M$ .

Appelons  $X^1X^2 \dots X^r$  ces composantes ; la formule de définition type (II. 1) serait :

$$\vec{E}_{r+1} = X^1\vec{E}_1 + X^2\vec{E}_2 \dots + X^r\vec{E}_r = \sum_M X^M \vec{E}_M.$$

En comparant à (II. 16 et 17) nous trouvons :

$$(II. 19) \quad X^M = - \frac{p_M}{p_{r+1}} = \frac{1}{\Delta} \sum_k x^k A_M^k.$$

Le  $(r+1)$  ième vecteur ne peut pas être indépendant des  $r$  premiers vecteurs ; il existe une relation linéaire, et celle-ci nous permet de trouver les composantes  $X^M$  du vecteur supplémentaire, suivant les nouveaux vecteurs de base  $\vec{E}_M$ .

### III. — Covariance et contravariance ; axes rectilignes.

Les résultats, que nous venons de détailler tout au long, se résument en quelques formules très simples ; ce système d'équations de transformation est fondamental pour tout le calcul tensoriel.

Nous passons des vecteurs unités  $\vec{e}_k$  aux nouveaux vecteurs de base  $\vec{E}_M$  par des relations linéaires :

$$(II. 13) \quad \vec{E}_M = \sum_k \alpha_M^k \vec{e}_k.$$

Dans ces formules nous supposons, pour le moment, que les *coefficients*  $\alpha_M^k$  sont *constants* et ne dépendent pas des coordonnées  $x^k$  ; c'est considérer un passage d'axes rectilignes  $x^k$  à d'autres axes rectilignes  $X^M$ . Nous généraliserons plus loin (§ 11) les formules de manière à introduire des  $\alpha_M^k$  non constants, ce qui reviendra à envisager des systèmes d'axes curvilignes.

Posons maintenant :

$$(II. 20) \quad \beta_k^M = \frac{\text{mineur de } \alpha_M^k}{\Delta} = \frac{A_M^k}{\Delta}.$$

Les formules (II. 18) nous fournissent les relations très importantes que voici :

$$(II. 21) \quad \sum_M \alpha_M^k \beta_j^M = \delta_j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Nous aurons constamment à nous servir du symbole de Kronecker  $\delta_j^k$  qui signifiera toujours 1, si  $k$  est égal à  $j$  et zéro lorsque les indices  $k$  et  $j$  sont différents.

La formule (II. 21) découle directement de (II. 18). En effet, si  $k$  est égal

à  $j$  la sommation (II. 21) se réduit à un développement du déterminant  $\Delta$  par rapport à la colonne  $j$ . Nous avons divisé par  $\Delta$ , dans (II. 20), donc le résultat est 1. Si au contraire  $j$  est différent de  $k$ , la sommation (II. 21) revient au développement d'un déterminant du type  $\Delta$ , mais où l'on aurait remplacé les éléments de la colonne  $j$  par ceux de la colonne  $k$ ; ce déterminant aurait donc deux colonnes ( $j$  et  $k$ ) identiques, et serait nul.

De la même manière, la seconde formule (II. 18) nous permet d'écrire :

$$(II. 22) \quad \sum_k \alpha_M^k \beta_k^L = \delta_M^L = \begin{cases} 1 & \text{si } L = M \\ 0 & \text{si } L \neq M. \end{cases}$$

On raisonnerait ici sur un développement du déterminant  $\Delta$  par rapport à la ligne  $L$ ; si  $L \neq M$  on a un déterminant dont les lignes  $L$  et  $M$  sont identiques, et qui s'annule.

Formons le déterminant  $\Delta'$  des coefficients  $\beta_k^N$ ; la symétrie complète des formules (II. 21) et (II. 22) nous montre que la relation (II. 20) est valable, inversement, sous la forme suivante :

$$(II. 23) \quad \alpha_M^k = \frac{\text{mineur de } \beta_k^M}{|\beta_k^M|} = \frac{B_k^M}{\Delta'}.$$

Enfin, le déterminant  $\Delta'$  est égal à  $\frac{1}{\Delta}$ ; cette règle repose sur l'emploi de la formule de multiplication des déterminants, nous donnerons ici ce résultat tel quel, et n'explicitons le calcul qu'un peu plus loin, au chapitre III.

Avec ces définitions, l'inversion des formules (II. 13) est très simple. Les anciens vecteurs de base  $\vec{e}_k$  s'expriment en fonction des nouveaux  $\vec{E}_M$  par les formules :

$$(II. 24) \quad \vec{e}_k = \sum_L \beta_k^L \vec{E}_L.$$

Substituons en effet (II. 24) dans (II. 13) et nous vérifions :

$$\vec{E}_M = \sum_k \alpha_M^k \vec{e}_k = \sum_k \alpha_M^k \sum_L \beta_k^L \vec{E}_L = \sum_L \delta_M^L \vec{E}_L = \vec{E}_M$$

en tenant compte de (II. 22).

Tout vecteur se transformant suivant les mêmes règles que les vecteurs de base sera dit *covariant* et nous le caractériserons par un *indice inférieur*.

Soit  $\vec{a}$  un vecteur covariant; nous écrirons des composantes  $a_k$  :

$$\text{covariant } \vec{a} \quad (a_1, a_2 \dots a_k \dots a_r).$$

Le vecteur transformé  $\vec{A}$  aura les composantes  $A_1, A_2 \dots A_M \dots A_r$  et les formules de transformation s'écriront :

$$(II. 25) \quad A_M = \sum_k \alpha_M^k a_k \quad a_k = \sum_L \beta_k^L A_L.$$

Les coordonnées d'un vecteur usuel ne se transforment pas de cette façon, mais suivent la règle de *contravariance*. Nous avons vu au paragraphe précédent qu'un vecteur  $\vec{E}_{r+1}$ , de composantes  $x^1, x^2 \dots x^k \dots x^r$  se trans-



formait, de telle sorte que ses nouvelles composantes  $X^1, X^2 \dots X^M \dots X^r$  soient données par les formules (II. 19), c'est-à-dire :

$$(II. 26) \quad X^M = \sum_k \beta_k^M x^k$$

dont l'inversion donne :

$$x^k = \sum_M \alpha_M^k X^M.$$

Les *vecteurs contravariants* seront tous ceux qui se transforment comme les coordonnées  $x^k$  d'un point, et obéissent aux formules (II. 26) ; nous écrirons leurs *indices en haut*.

On retrouvera facilement ces formules, si l'on se rappelle les relations (II. 21 et 22) entre les  $\alpha$  et les  $\beta$ , et si l'on songe que la définition vectorielle (II. 1) doit garder un sens absolu, dans tous les systèmes de référence : partons de (II. 1) et substituons (II. 24) nous retrouvons (II. 26) :

$$(II. 27) \quad \vec{x} = \sum_k x^k \vec{e}_k = \sum_k \sum_L x^k \beta_k^L \vec{E}_L \quad \text{doit donner} \quad \sum_L X^L \vec{E}_L$$

donc :

$$X^L = \sum_k \beta_k^L x^k.$$

#### IV. — *Sommations et indices muets.*

Pour plus de clarté dans les formules, nous avons employé des lettres majuscules pour tout ce qui se rapporte au second système de référence, et même pour les indices. Sur ce point, nous prendrons par la suite un peu de liberté, et nous écrirons le plus souvent des indices minuscules.

Dans toutes les formules que nous avons écrites, dans ce paragraphe, les *sommations portent toujours sur des indices répétés, figurant une fois en haut et une fois en bas*. Cette règle est si générale, que beaucoup d'auteurs suppriment les signes de sommation  $\Sigma$  et les remplacent par la convention suivante : dans toute formule où le même indice apparaît deux fois, une fois en position covariante et une fois en position contravariante, il faut effectuer une sommation sur cet indice. Dans tout le début de ce cours, nous préférons laisser en évidence les signes de sommation  $\Sigma$ . Si, par la suite, nous renonçons à les récrire partout, nous en avertirons le lecteur.

Lorsqu'on effectue une sommation sur un indice, celui-ci est appelé *indice muet*. En effet, peu importe comment on désigne cet indice ; nous pourrions écrire  $k$  ou  $l$  ou  $m$ , cela signifie toujours un indice qui doit prendre successivement toutes les valeurs :

$$k \text{ (ou } l, \text{ ou } m) = 1, 2, 3 \dots r.$$

La règle suivante est très précieuse, dans de nombreuses transformations de formules : *on peut changer à volonté le nom d'un indice muet*. Ainsi :

$$\sum_k a_k b^k = \sum_l a_l b^l = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots a_r b^r.$$

Sur cette formule, l'intérêt du changement n'apparaît guère, mais s'il y a

plusieurs indices muets, les changements de nom des indices permettront des transformations plus utiles. Par exemple :

$$(II. 28) \quad \sum_{k,l} a_k b^k c_l d^l = \sum_{i,j} a_i b^i c_j d^j = \sum_{l,k} a_l b^l c_k d^k.$$

Les transformations :

$$\begin{aligned} k &\rightarrow i \rightarrow l \\ l &\rightarrow j \rightarrow k \end{aligned}$$

nous ont permis de réaliser l'interversion des indices  $l$  et  $k$ , ce qui pourra nous aider à regrouper autrement les termes des formules.

### V. — Vecteur covariant et forme linéaire ; espace dualistique.

Nous avons introduit arbitrairement, en (II. 25) la notion de vecteur covariant ; il nous faut revenir maintenant sur ce point, pour examiner le sens géométrique de cette notion. Un vecteur  $\vec{x}$ , de composantes  $x^1, x^2, \dots, x^r$  représentera un point M de l'espace affine ; ce sera le point situé à l'extrémité d'un vecteur  $\vec{OM}$  de composantes  $x^1 \dots x^r$  ; la figure (II. 1) se rapporte au cas de 2 dimensions ; traçons un contour OPM parallèle aux axes, nous aurons suivant OP le vecteur  $\vec{e}_1 x^1$  et suivant PM un vecteur  $\vec{e}_2 x^2$  ; la résultante donne  $\vec{OM}$ . Les composantes  $X^1 \dots X^r$  suivant de nouveaux axes dessinent un autre contour OP'M, avec les vecteurs  $\vec{E}_1 X^1$  (OP') et  $\vec{E}_2 X^2$  (P'M).

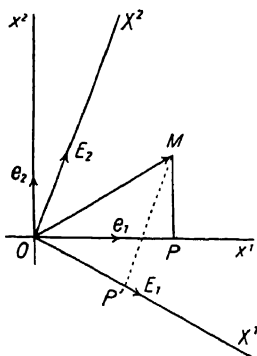


Fig. II. 1.

Prenons maintenant un « vecteur covariant »  $\vec{a}$ , de composantes  $a_1 a_2 \dots a_r$ , défini en (II. 25). Au moyen des composantes de  $\vec{a}$  et de celles d'un vecteur contravariant  $\vec{x}$  nous pourrions construire une *forme linéaire* :

$$(II. 29) \quad L(x) = a_1 x^1 + a_2 x^2 \dots + a_k x^k \dots + a_r x^r = \sum_k a_k x^k.$$

Cette forme linéaire représente une expression *invariante* dans tout changement de coordonnées :

$$(II. 30) \quad L(x) = \sum_k a_k x^k = K.$$

Portons, en effet, dans l'expression (II. 29), les valeurs des  $a_k$  et  $x^k$  en fonction des composantes transformées  $A_L$  et  $X^L$  ; d'après les formules (II. 25) et (II. 26), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (II. 31) \quad L(x) &= \sum_k a_k x^k = \sum_{k,L} \beta_k^L A_L x^k = \sum_{k,L,M} \beta_k^L A_L \alpha_M^k X^M = \sum_{L,M} A_L \delta_M^L X^M \\ &= \sum_M A_M X^M = K. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la formule (II. 22) qui nous permet d'éliminer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  de la transformation.

Une relation telle que (II. 30) conserve donc un sens invariant au milieu de toutes les transformations de systèmes de référence. Voyons à quel concept géométrique nous sommes ainsi conduit.

Dans un espace à deux dimensions (un plan), une relation linéaire (II. 30) définit une droite; lorsque  $a_1$  et  $a_2$  sont donnés, la pente de la droite est fixée, et en précisant la valeur de  $k$ , on détermine la position de cette droite :

$$(II. 32) \quad a_1 x^1 + a_2 x^2 = k$$

la relation ci-dessus nous montre que la droite coupe l'axe  $x^1$  en un point B et l'axe  $x^2$  en un point C dont les coordonnées sont :

$$\begin{array}{ll} \text{B} & x^1 = \frac{k}{a_1} \quad x^2 = 0 \\ \text{C} & x^1 = 0 \quad x^2 = \frac{k}{a_2} \end{array}$$

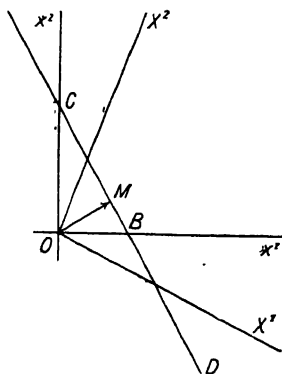


Fig. 11. 2.

Dans un espace à 3 dimensions, une relation (II. 30) définit un plan; dans une extension à 4 dimensions, elle définit un espace plan à 3 dimensions; en général, dans un hyperspace à  $r$  dimensions, cette condition définit un *hyperplan* à  $r - 1$  dimensions.

La notion de vecteur covariant est donc nécessairement associée à celle d'un système de plans parallèles; car le vecteur  $\vec{a}_k$  ne donne que l'orientation des hyperplans; la position d'un de ces hyperplans n'est précisée que si l'on ajoute la valeur de la constante arbitraire  $k$ .

On appelle souvent « espace dualistique » l'espace qui jouit des propriétés suivantes: aux vecteurs contravariants définis dans le premier espace correspondent des systèmes d'hyperplans parallèles dans l'espace dualistique, et réciproquement.

Pour préciser le langage géométrique, nous anticiperons un peu. Dans l'espace que nous étudions en ce moment, nous ne pouvons définir ni une distance ni un angle; ces deux notions ne deviendront tangibles que plus loin, dans un espace où nous connaissons une métrique. A ce moment-là, nous verrons que la relation entre le vecteur covariant et le système de plans parallèles prendra un sens simple: les plans seront perpendiculaires au vecteur covariant  $\vec{a}_k$ ; mais tant que nous ne savons pas définir un angle, nous devons nous méfier de ce langage de géométrie usuelle.

## VI. — Définition générale d'un tenseur.

Nous avons trouvé deux types différents de vecteurs, les vecteurs covariants et contravariants; pour les tenseurs, nous aurons à prévoir une plus grande variété; un tenseur pourra se représenter par un jeu de composantes dépendant

de 2, 3, 4, ... ou d'un nombre quelconque d'indices; le nombre des composantes du tenseur sera donc  $r^2, r^3, r^4, \dots$  puisque chaque indice peut courir de 1 à  $r$  ( $r$ , nombre de dimensions de l'espace). En outre, nous pourrions placer ces indices en position covariante ou bien en position contravariante; cela nous donnera toute une série de catégories distinctes de tenseurs, irréductibles les unes aux autres.

La formule de définition générale va être la suivante : un tenseur  $t$  comporte  $m$  indices contravariants (inscrits en haut) et  $n$  indices covariants (inscrits en bas); il est dit tenseur d'ordre  $p$  :

$$p = m + n.$$

Une de ses composantes s'écrit :

$$(II. 33) \quad t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{k_1 k_2 \dots k_m} \quad \begin{array}{l} \leftarrow m \text{ indices contravariants} \\ \leftarrow n \text{ indices covariants.} \end{array}$$

Lorsque nous ferons un changement de coordonnées, le tenseur  $t$  se transformera en un tenseur  $T$ , dont les composantes seront :

$$T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{l_1 l_2 \dots l_m} \quad \begin{array}{l} \leftarrow m \text{ indices contravariants} \\ \leftarrow n \text{ indices covariants.} \end{array}$$

Le changement d'axes étant régi par les coefficients  $\alpha_L^k$  et  $\beta_k^L$  définis en (II. 20), le tenseur se transformera de la manière suivante :

$$(II. 34) \quad \begin{aligned} t_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_m} &= \sum_{j_1 \dots j_n} \alpha_{L_1}^{k_1} \dots \alpha_{L_m}^{k_m} \beta_{i_1}^{j_1} \dots \beta_{i_n}^{j_n} T_{j_1 \dots j_n}^{L_1 \dots L_m} \\ T_{j_1 \dots j_n}^{L_1 \dots L_m} &= \sum_{i_1 \dots i_n} \beta_{k_1}^{L_1} \dots \beta_{k_m}^{L_m} \alpha_{j_1}^{i_1} \dots \alpha_{j_n}^{i_n} t_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_m} \end{aligned}$$

Avec les notations que nous avons choisies, il est facile de se rappeler ces formules; il suffit de se souvenir que toute sommation porte sur des indices muets, répétés en haut et en bas; lorsqu'on regarde alors la position des indices dans  $\alpha_L^k$  et  $\beta_k^L$  il n'y a plus aucune incertitude sur les  $\alpha$  ou  $\beta$  qu'il faut inscrire afin de répéter les indices et d'avoir des sommations normales. Ces formules sont exactement réciproques l'une de l'autre, et se présentent comme la généralisation des formules tensorielles que nous avons rappelées (chap. premier, § 5, p. 12) à propos des efforts dans un solide déformé.

Commençons par classer rapidement les tenseurs des divers ordres; nous étudierons ensuite leurs propriétés, et toute une série d'opérations permettant de former des tenseurs ou de modifier leur ordre.

O. Tenseur d'ordre zéro; ce sont les scalaires, invariants dans les changements d'axes.

I. Tenseurs du 1<sup>er</sup> ordre ou vecteurs; nous aurons deux types distincts :

$$\begin{array}{ll} \text{vecteur contravariant} & \dots \dots x^i \\ \text{vecteur covariant} & \dots \dots u_i \end{array}$$

II. Tenseurs du 2<sup>e</sup> ordre; ces tenseurs seront de 3 types :

$$\begin{array}{ll} \text{tenseur 2 fois contravariants.} & t^{ik} \\ \text{tenseur mixte} & \dots \dots t_k^i \\ \text{tenseur 2 fois covariants.} & \dots \dots t_{ik} \end{array}$$

III. Tenseurs du 3<sup>e</sup> ordre; des 4 types suivants :

$$t^{ikl}; \quad t_l^{ik}; \quad t_{kl}^i \quad \text{et} \quad t_{ikl}$$

et ainsi de suite.

La distinction entre indices covariants et indices contravariants est absolue en géométrie vectorielle. Nous verrons plus tard qu'en géométrie métrique nous pourrions établir des transitions entre ces types distincts de tenseurs; pour le moment cela nous est impossible.

## VII. — Modes de formation des tenseurs, opérations d'algèbre élémentaire.

Nous pourrions faire l'addition de deux tenseurs, terme à terme, pourvu que ces tenseurs aient même variance; par exemple :

$$(II. 35) \quad t_m^{ik} = r_m^{ik} + s_m^{ik}$$

représente la somme  $t$  des deux tenseurs  $r$  et  $s$ ; tous trois sont du 3<sup>e</sup> ordre 2 fois contravariants et une fois covariants.

Une opération typique du calcul tensoriel est la contraction qui se traduit par une somme sur 2 indices répétés en haut et en bas. Ainsi, prenons un tenseur mixte du 3<sup>e</sup> ordre  $t_m^{ik}$ ; choisissons les composantes pour lesquelles  $m = i$  et formons la somme :

$$(II. 36) \quad c^k = \sum_i t_i^{ik}.$$

Cette opération de contraction nous donne un tenseur ayant deux indices de moins, et dont l'ordre a donc été réduit de deux unités. Ce point essentiel est à vérifier. La formule de transformation du tenseur du 3<sup>e</sup> ordre serait :

$$T_N^{jL} = \sum_{ikm} \beta_i^j \beta_k^L \alpha_N^m t_m^{ik}.$$

Effectuons la contraction sur le tenseur  $T_N^{jL}$ , nous trouvons :

$$C^L = \sum_j T_j^{jL} = \sum_j \sum_{ikm} \beta_i^j \beta_k^L \alpha_j^m t_m^{ik}$$

mais ici intervient de nouveau la relation fondamentale (II. 21).

$$\sum_j \alpha_j^m \beta_i^j = \delta_i^m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = i \\ 0 & \text{si } m \neq i. \end{cases}$$

Ce résultat simplifie considérablement notre formule; parmi les composantes  $t_m^{ik}$  du tenseur initial, nous n'aurons à garder que celles  $t_i^{ik}$  où l'indice  $m$  est égal à  $i$ ; et comme il reste de toutes façons une sommation sur l'indice  $i$ , cela va faire apparaître la somme  $c^k$  de (II. 36).

$$(II. 37) \quad C^L = \sum_j T_j^{jL} = \sum_{i,k} \beta_k^L t_i^{ik} = \sum_k \beta_k^L c^k.$$

La formule (II. 37) nous prouve que la somme contractée (II. 36) jouit bien du caractère tensoriel annoncé.

Nous avons pris comme exemple un tenseur du 3<sup>e</sup> ordre, mais il est bien évident que le procédé est général.

Un cas très important sera celui d'un *tenseur mixte* du second ordre  $t_i^k$ ; écrivons le tableau de ses composantes :

$$\begin{vmatrix} t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 & \dots & t_1^r \\ t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 & \dots & t_2^r \\ \dots & & & & \\ t_r^1 & t_r^2 & t_r^3 & \dots & t_r^r \end{vmatrix}$$

Par contraction, nous allons avoir à faire la somme de tous les termes situés sur la diagonale principale :

$$(11. 38) \quad c = \sum_k t_k^k = t_1^1 + t_2^2 + t_3^3 \dots + t_r^r.$$

Le raisonnement que nous venons de faire nous montre que cette *somme diagonale* est un *invariant* pour tous les changements d'axes de référence ; en effet, la contraction a supprimé ici tous les indices ; la somme  $c$  sans indices est un scalaire (tenseur d'ordre zéro) caractérisé par un nombre unique, et complètement indifférent à tous les changements de coordonnées.

La *multiplication* peut être effectuée entre deux tenseurs d'ordre et de variance quelconques ; elle donne un tenseur d'ordre supérieur. On opère terme à terme ; le produit  $p$  des tenseurs  $r_m^{ik}$  et  $s_n^j$  se définira donc comme suit :

$$(11. 39) \quad p_{m,n}^{ik,j} = r_m^{ik} s_n^j.$$

Sous cette forme, l'opération est très souvent utile ; ainsi, nous pouvons partir d'une série de vecteurs  $a^i$ ,  $b^k$ ,  $c_m$ ,  $d_n$ , les uns contravariants, les autres covariants et par multiplication nous formons des tenseurs d'ordre plus élevé, comme :

$$(11. 40) \quad t_m^{ik} = a^i b^k c_m.$$

Ceci nous permet de fabriquer aisément des exemples de tenseurs d'ordre supérieur et de variance quelconque.

### VIII. — La multiplication contractée ; un critérium du caractère tensoriel.

Une forme extrêmement fréquente, et que nous avons déjà rencontrée (chap. II, § 4) c'est la *multiplication contractée*. La contraction (11. 36) s'opère par sommation sur un *indice muet* que l'on répète en position covariante et contravariante. Cette contraction va pouvoir se faire, sur les composantes d'un tenseur d'ordre élevé, obtenu par des multiplications telles que (11. 39 ou 40). Nous reviendrons ainsi à des tenseurs d'ordre plus bas, ou même à des invariants.

Ainsi, prenons deux vecteurs, l'un  $u^k$  contravariant et l'autre  $v_l$  covariant ; le produit nous donne un tenseur du second ordre, mixte :

$$t_l^k = u^k v_l.$$

Effectuons la contraction (II. 38), c'est-à-dire formons la somme des éléments diagonaux, nous obtenons l'invariant :

$$(II. 41) \quad c = \sum_k t_k^k = u^1 v_1 + u^2 v_2 + \dots + u^r v_r = \sum_k u^k v_k.$$

C'est le *produit scalaire* des vecteurs  $u^k$  et  $v_r$  ; nous voyons qu'en géométrie vectorielle, le produit scalaire se définit pour *deux vecteurs de variances opposées*. Lorsqu'au paragraphe 5 nous avons utilisé un vecteur covariant  $a_k$  pour construire une forme linéaire  $L(x)$  l'opération faite était celle du produit scalaire de  $a_k$  avec  $x^k$ , comme le montre la formule (II. 29).

Si les tenseurs que l'on multiplie sont d'ordre plus élevé, la multiplication contractée laisse un résultat de nature tensoriel. Partons du produit (II. 39), nous pouvons contracter une ou deux fois :

$$(II. 42) \quad \begin{aligned} c_m^{ij} &= \sum_k p_{mk}^{ikj} = \sum_k r_m^{ik} s_k^j \\ d^i &= \sum_j c_j^i = \sum_j \sum_k r_j^{ik} s_k^i. \end{aligned}$$

Nous allons profiter de cette méthode pour formuler une règle simple, qui nous permettra de *reconnaître un tenseur*, en évitant de recourir à la formule de définition (II. 34).

Supposons que nous ayons trouvé une grandeur qui se représente par un tableau de composantes  $t(i, k, m)$  dépendant de trois indices,  $i, k, m$  qui varient de 1 à  $r$  ; nous ne savons pas si les  $i, k, m$  peuvent être considérés comme covariants ou contravariants ; nous chercherons à former des produits contractés entre ce tenseur et trois vecteurs arbitraires  $u, v, w$  contravariants ou covariants, jusqu'à ce que nous ayons trouvé une expression invariante. Si nous avons pu démontrer que :

$$(II. 43) \quad \sum_{i, k, m} t(i, k, m) u^i v_k w^m = \text{Invariant pour tous changements d'axes,}$$

nous sommes certains que  $t$  est un tenseur et qu'il faut placer les indices  $i, m$  avec  $i$  et  $m$  covariants,  $k$  contravariant.

La démonstration doit être valable pour n'importe quels vecteurs arbitraires  $u^i, v_k, w^m$  et ne pas provenir d'un choix particulier de ces vecteurs, sans quoi la grandeur envisagée n'aurait pas un vrai caractère tensoriel ; elle présenterait seulement une ressemblance restreinte avec un tenseur (Voir plus loin § 14 un exemple de ce genre).

La formule (II. 43) est presque évidente, donnons pourtant le détail du raisonnement ; appelons  $T(j, l, n)$  les composantes du tenseur transformé, et  $U^j, V_l, W^n$  celles des vecteurs ; nous admettons l'invariance (II. 43), donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i, k, m} t(i, k, m) u^i v_k w^m &= \sum_{j, l, n} T(j, l, n) U^j V_l W^n \\ &= \sum_{j, l, n} \sum_{i, k, m} T(j, l, n) \beta_i^j u^i \alpha_l^k v_k \beta_m^n w^m. \end{aligned}$$

Car on a :

$$U^j = \sum_i \beta_i^j u^i \quad V_l = \sum_k \alpha_l^k v_k \quad W^n = \sum_m \beta_m^n w^m.$$

L'égalité ci-dessus doit être satisfaite pour n'importe quelle transformation d'axes ( $\alpha$  et  $\beta$  arbitraires) et n'importe quels vecteurs  $u, v, w$ . Les termes  $u^i v_k w^m$  doivent donc avoir même coefficient à gauche et à droite, ce qui donne :

$$(11.44) \quad t(i, k, m) = \sum_{j, l, n} T(j, l, n) \beta_i^j \alpha_l^k \beta_n^m.$$

Cette formule est la définition d'un tenseur  $t_{im}^k$ .

### IX. — Exemples : force, quantité de mouvement, vitesse.

Le critérium que nous venons d'établir sera d'usage courant. Ainsi, nous savons qu'un déplacement  $\delta x^i$  constitue un vecteur contravariant ; d'autre part, une force  $f(k)$  est un vecteur auquel nous ne savons pas attribuer une variance *a priori*. Mais nous connaissons la formule qui donne le travail d'une force :

$$(11.45) \quad d\mathcal{E} = f(1)\delta x^1 + f(2)\delta x^2 \dots + f(r)\delta x^r.$$

Ce travail est un invariant ; aucun changement d'axes n'en peut modifier la valeur. Nous devons donc considérer la force comme un vecteur covariant, et écrire  $f_k$  ses composantes. Le travail :

$$d\mathcal{E} = \sum_k f_k \delta x^k$$

est alors donné par un produit scalaire typique.

Une vitesse :

$$(11.46) \quad v^k = \dot{x}^k = \frac{dx^k}{dt}$$

se définit naturellement comme un vecteur contravariant. Mais une quantité de mouvement  $\vec{p}$  est reliée à la force par la loi du mouvement :

$$(11.47) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \qquad \dot{p}_k = f_k$$

nous devons donc admettre que  $\vec{p}$ , tout comme  $\vec{f}$  est un vecteur covariant, et écrire ses composantes  $p_k$ .

Nous aurons l'occasion de revenir ultérieurement sur cette question, et d'écrire sous forme tensorielle toutes les équations de la mécanique rationnelle (chap. VIII). Nous verrons comment nos prévisions actuelles se précisent et se justifient.

### X. — Distinction entre tenseurs et matrices.

Nous avons déjà observé, au paragraphe 4 de ce chapitre, les règles de sommation sur indices muets ; la multiplication contractée ou la contraction d'un tenseur rentrent dans ce cadre. Il faut placer ici une *remarque essentielle* :



Nous rencontrerons de nombreuses formules du type de la contraction ou de la multiplication contractée ; certaines de ces formules porteront uniquement sur des tenseurs, et le résultat de l'opération sera un tenseur. D'autres formules contiendront des tenseurs et d'autres grandeurs de caractère différent ; le résultat ne sera pas nécessairement un tenseur.

Ainsi les formules de changement d'axes :

$$(11.48) \quad \begin{aligned} x^k &= \sum_M \alpha_M^k X^M \\ t_i^k &= \sum_{JM} \alpha_i^J \alpha_M^k \beta_J^N T_N^{JM} \end{aligned}$$

ressemblent à des multiplications contractées ; mais il y figure des grandeurs  $\alpha_i^J$  et  $\beta_J^N$  qui ne sont pas des tenseurs. Un tenseur est en effet rattaché étroitement à un système d'axes bien déterminé ; au contraire les  $\alpha_i^J$  et  $\beta_J^N$  sont « à cheval » sur deux systèmes d'axes ; c'est pour souligner ce caractère hybride que nous leur avons donné un indice minuscule et un autre majuscule. Les opérations (11.48), malgré leur grande analogie formelle, ne sont pas des multiplications de tenseurs et doivent en être soigneusement distinguées.

Lorsque nous rencontrerons des tableaux de composantes, comme ces  $\alpha_i^J$  ou  $\beta_J^N$ , qui ne formeront pas des tenseurs, nous les appellerons des *matrices* ; l'étude de ces matrices présentera, avec le calcul tensoriel, des analogies frappantes, mais aussi des différences essentielles. Nous y reviendrons au paragraphe suivant. Les matrices  $\alpha$  et  $\beta$  que nous avons si amplement utilisées dans ce chapitre représentent un changement de système de références ; c'est bien un exemple typique des matrices, comme nous l'avons dit au chapitre premier, § 7 ; mais les matrices peuvent aussi s'introduire sous d'autres aspects assez divers.

## XI. — Axes curvilignes.

Nous avons envisagé jusqu'ici des formules de changement de coordonnées du type linéaire à coefficients constants. Les formules (11.26) exprimaient les  $x^k$  en fonction des  $X^M$  et réciproquement, et ne contenaient que des coefficients  $\alpha_M^k$ ,  $\beta_k^M$  constants. Ce genre de transformations nous permet de passer d'un système d'axes rectilignes à un autre système d'axes rectilignes. Il donne des formules applicables uniformément dans tout l'espace ; pour trouver la transformation d'un vecteur ou d'un tenseur, nous n'avons eu besoin de connaître que la nature de ses composantes, mais jamais il n'a fallu préciser le « point d'application » du vecteur ou du tenseur.

Les changements de coordonnées les plus généraux comprendront des passages en axes curvilignes ; les nouvelles coordonnées  $X^M$  s'exprimeront au moyen des anciennes  $x^k$  par des fonctions tout à fait quelconques :

$$(11.49) \quad X^M = F^M(x^1, x^2, \dots, x^r)$$

et non plus par des formules linéaires ; mais nous retrouverons des formules

linéaires dans l'infiniment petit; considérons un déplacement  $\delta x^1, \delta x^2 \dots \delta x^r$  dont toutes les composantes  $\delta x^k$  soient infiniment petites; il y correspondra des variations très petites des  $X^M$  :

$$(II. 50) \quad \delta X^M = \sum_k \frac{\partial F^M}{\partial x^k} \delta x^k = \sum_k \beta_k^M \delta x^k.$$

Nous obtenons ici des formules linéaires qui nous permettent de définir des coefficients :

$$\alpha_M^k(x^1, x^2 \dots x^r), \quad \beta_k^M(x^1, x^2 \dots x^r).$$

Ce ne sont plus des constantes, mais des fonctions des coordonnées  $x^1 \dots x^r$ ; il faut donc préciser *en quel point* P on envisage la transformation (II. 50); pour définir un vecteur ou un tenseur, il faudra préciser *son point d'application*, et donner les valeurs des composantes  $t_i^k(x^1 \dots x^r)$  comme fonctions des coordonnées du point P où on l'étudie.

Surtout, et ce point est *essentiel*, un tenseur ne devra contenir que les *coordonnées d'un seul point* de l'hyperespace où on le définit; en effet, les formules de transformation (II. 34) servent toujours de définition du tenseur, avec la précision supplémentaire que tous les  $\alpha$  ou  $\beta$  doivent être pris *en un même point* P.

Nous précisons donc, quitte à nous répéter :

*Un tenseur est défini par les formules* (II. 34), *prises en un point déterminé; le tenseur est rattaché à un point donné d'un espace donné, et ses composantes sont toutes relatives à un système de référence donné dans cet espace.*

Nous rencontrerons des tableaux de nombres ressemblant à des tenseurs mais de caractères hybrides; ils pourront se rapporter :

1° A un même point, considéré dans deux systèmes de référence, comme les tableaux  $\alpha_M^k$  et  $\beta_k^M$ ;

2° A deux points  $x^k$  et  $y^k$  pris dans un même système de référence;

3° A plusieurs points dans divers systèmes d'axes, en général.

Ces expressions seront des *matrices sans aucun caractère tensoriel*.

Revenons aux formules (II. 50); nous voyons que les  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les quotients différentiels :

$$(II. 51) \quad \alpha_M^k = \frac{\partial x^k}{\partial X^M} \quad \beta_k^M = \frac{\partial X^M}{\partial x^k}.$$

Le déterminant  $\Delta$  de la transformation (équ. II. 14) représentera le déterminant fonctionnel relatif aux fonctions (II. 49) :

$$(II. 52) \quad \Delta = | \alpha_M^k | = \frac{D(x^1, x^2 \dots x^r)}{D(X^1, X^2 \dots X^r)} = \frac{1}{| \beta_k^M |}.$$

Nous en tirons la remarque importante que voici : un petit élément de volume infinitésimal  $dx^1 dx^2 \dots dx^r$  se transformera en un élément  $dX^1 dX^2 \dots dX^r$  suivant la formule :

$$(II. 53) \quad dX^1 dX^2 \dots dX^r = \frac{D(X^1 \dots X^r)}{D(x^1 \dots x^r)} dx^1 \dots dx^r = \frac{1}{\Delta} dx^1 \dots dx^r.$$

Nous aurons à revenir plus longuement sur ce point, au chapitre III.

## XII. — Symétrie et antisymétrie.

Nous avons rencontré, au chapitre premier, §§ 4 à 6, des exemples de tenseurs présentant certains caractères de symétrie, qui permettaient une réduction du nombre des composantes indépendantes.

Pour qu'une *condition de symétrie* puisse apparaître, il faut nécessairement qu'elle mette en jeu *deux indices de même variance*; sinon une telle condition serait toute fortuite et ne se conserverait pas dans un changement de système de références.

Prenons d'abord les tenseurs du second ordre, qui sont des trois types contravariant, mixte ou covariant :

$$a^{ik} \quad b_k^i \quad c_{ik}.$$

Nous pourrions avoir des symétries pour les tenseurs covariants ou contravariants :

$$(n. 54) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Symétrie} & a^{ik} = a^{ki} \quad \text{ou} \quad c_{ik} = c_{ki} \\ \text{Antisymétrie} & a^{ik} = -a^{ki} \quad \text{ou} \quad c_{ik} = -c_{ki}. \end{array} \right.$$

Mais supposons qu'un tenseur mixte  $b_k^i$  présente, dans un certain système d'axes, une apparence de symétrie; il suffira de changer de système pour détruire cette illusion, car les deux indices sont soumis à des changements différents.

Au contraire, les relations (n. 54) sont invariantes, et représentent une *propriété intrinsèque* des tenseurs.

Prenons le cas de contravariance :

$$a_{ik} = s a_{ki} \quad \left\{ \begin{array}{ll} s = +1 & \text{symétrie} \\ s = -1 & \text{antisymétrie} \end{array} \right.$$

et changeons d'axes de référence :

$$A^{ML} = \sum_{ik} \beta_k^M \beta_i^L a^{ik}$$

$$A^{LM} = \sum_{ik} \beta_i^L \beta_k^M a^{ik} = \sum_{ik} \beta_i^L \beta_k^M s a^{ki} = s A^{ML}.$$

Si j'échange les indices  $i, k$ , les indices ML sont intervertis, puisque l'ordre des  $\beta$  n'intervient pas par lui-même.

Un tenseur du second ordre symétrique possède  $r \left( \frac{r+1}{2} \right)$  composantes indépendantes, et un tenseur antisymétrique du second ordre n'en a que

$r \left( \frac{r-1}{2} \right)$ . En effet, le tableau des composantes comporte  $r^2$  cases, dont  $r$  suivant la diagonale,  $\frac{r(r-1)}{2}$  au-dessus et  $\frac{r(r-1)}{2}$  au-dessous (fig. II. 3); dans le tenseur symétrique les éléments diagonaux jouent un rôle, mais dans le tenseur antisymétrique ils sont tous nuls.

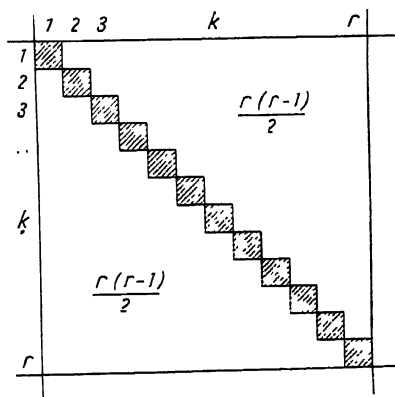


Fig. II. 3.

Un tenseur quelconque, ayant 2 indices de même variance, peut être décomposé en sa partie symétrique  $s$  et sa partie antisymétrique  $a$  :

$$(II. 55) \quad t^{ik} = s^{ik} + a^{ik} \quad t^{ki} = s^{ik} - a^{ik}$$

ce qui donne :

$$s^{ik} = \frac{1}{2} (t^{ik} + t^{ki}) \quad a^{ik} = \frac{1}{2} (t^{ik} - t^{ki}).$$

Les  $r^2$  composantes indépendantes de  $t$  se retrouvent bien sur  $s$  et  $a$  :

$$r^2 = \frac{r(r+1)}{2} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Ces décompositions sont d'usage courant. Prenons par exemple un tenseur  $t^{ik}$  obtenu par multiplication de deux vecteurs  $u^i$  et  $v^k$  (de même variance).

$$(II. 56) \quad t^{ik} = u^i v^k \quad \begin{aligned} 2s^{ik} &= u^i v^k + u^k v^i \\ 2a^{ik} &= u^i v^k - u^k v^i. \end{aligned}$$

La partie antisymétrique  $a^{ik}$  du produit nous fait apparaître les combinaisons qui caractérisent un *produit vectoriel* (chap. premier, § 3). Le produit vectoriel se présente comme un tenseur de second ordre, antisymétrique. Nous serons obligé d'analyser de près les conventions qui nous ont permis, dans le cas de l'espace à 3 dimensions, de ramener ce tenseur à une sorte de vecteur (voir paragraphe suivant).

Les conditions de symétrie ou d'antisymétrie peuvent jouer sur 2 indices d'un tenseur d'ordre plus élevé, et possédant  $m$  indices ; un cas plus intéressant sera celui où les symétries feront intervenir les échanges de plusieurs indices ; prenons, par exemple, un tenseur à 4 indices, dont 3 contravariants et 1 covariant  $t^{ijk}_l$  ; nous pouvons avoir symétrie ou antisymétrie pour toutes les permutations deux à deux des 3 indices contravariants  $i, j, k$  ; le cas de *symétrie* implique l'égalité de toutes les composantes déduites de  $i, j, k$  par une permutation quelconque de ces indices ; l'*antisymétrie* exige un examen plus précis : *en échangeant deux indices, on change le signe* ; ainsi les composantes suivantes seront égales, car elles résultent de deux échanges d'indices :

$$123, \quad 312, \quad 231$$

tandis que les composantes suivantes auront un signe opposé aux précédentes :

$$132, \quad 213, \quad 321.$$

Dans le cas de 3 indices, il se trouve que les permutations circulaires permettent de passer d'une composante de même signe à une autre. Mais dans un cas plus général, la règle à appliquer est la suivante :

On part d'une permutation donnée : 1, 2, 3, 4 par exemple ; toutes les permutations qui se déduisent de celle-ci par un *nombre pair d'échanges* de deux indices sont dites *permutations paires*. S'il faut un nombre impair d'échanges de deux indices, pour réaliser une certaine *permutation*, celle-ci est dite *impaire*.

L'antisymétrie complète exige que les permutations paires conservent le signe de la composante, tandis que les permutations impaires changent ce signe.

Ainsi, dans le cas de 4 indices, nous aurons les signes suivants :

signe +	1 234	1 342	1 423	2 143	2 314	2 431
	3 124	3 241	3 412	4 132	4 213	4 321
signe —	1 243	1 324	1 432	2 134	2 341	2 413
	3 142	3 214	3 421	4 123	4 231	4 312

Toutes les composantes ayant plusieurs indices identiques sont nulles.

Combien de composantes indépendantes trouverons-nous, dans le cas général? Soit un tenseur  $t_{ijkl\dots}$  antisymétrique par rapport à tous ses  $n$  indices ; ce tenseur est défini dans un espace à  $r$  dimensions. Les seules composantes non nulles sont celles dont tous les indices sont différents ; et une permutation de ces mêmes indices redonne la même valeur numérique avec signe + ou —. Nous aurons donc :

$$\frac{r!}{n!(r-n)!}$$

composantes réellement différentes ; le nombre est le même pour un tenseur d'ordre  $n$  ou d'ordre  $r - n$ .

Ces remarques nous seront utiles par la suite (Chap. III, § 9). Les conditions de symétrie et d'antisymétrie jouent un rôle de tout premier plan dans la physique théorique moderne. Nous venons de les rencontrer à propos des tenseurs, mais nous les retrouverons aussi dans les problèmes de mécanique ondulatoire, où leur importance est considérable.

### XIII. — Exemples de tenseurs antisymétriques formés au moyen de produits de vecteurs. Produits extérieurs.

Nous avons déjà pris le produit vectoriel de 2 vecteurs, dans un espace à 3 dimensions, comme exemple typique de tenseur antisymétrique. Les règles de formation de ce genre de produits peuvent être étendues, suivant une méthode indiquée par Grassman et E. Cartan.

Dans un espace à  $r$  dimensions, prenons  $n$  vecteurs, tous de même variance ( $n < r$ ) ; supposons-les par exemple tous contravariants. Soient  $a, b, \dots u$  ces vecteurs ; écrivons le tableau de leurs composantes :

$$(II \ 57) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} a^1 & a^2 & a^3 & \dots & a^r \\ b^1 & b^2 & b^3 & \dots & b^r \\ \dots & & & & \\ u^1 & u^2 & u^3 & \dots & u^r \end{array} \right\|$$

Prenons un groupe de  $n$  chiffres  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  choisis parmi les chiffres 1, 2, 3 ...  $r$ , avec ou sans répétitions et formons le déterminant qui a pour

première colonne la colonne  $\alpha$  du tableau ; pour deuxième colonne, la colonne  $\beta$  du tableau et ainsi de suite.

$$(II. 58) \quad t^{\alpha\beta\gamma\dots} = \begin{vmatrix} a^\alpha & a^\beta & a^\gamma & \dots \\ b^\alpha & b^\beta & b^\gamma & \dots \\ ; \\ u^\alpha & u^\beta & u^\gamma & \dots \end{vmatrix}$$

l'ensemble de ces déterminants nous donne visiblement un tenseur à  $n$  indices supérieurs contravariants dont les composantes sont égales aux développements des déterminants correspondants ; ce tenseur est antisymétrique par rapport à tous ses indices :

$$t^{\alpha\beta\gamma\dots} = -t^{\beta\alpha\gamma\dots} = -t^{\alpha\gamma\beta\dots} \quad \text{etc.}$$

car échanger deux colonnes d'un déterminant c'est changer le signe de ce déterminant ; et d'autre part si deux des indices  $\alpha\beta\gamma\dots$  sont égaux le déterminant a deux colonnes égales, ce qui l'annule.

Nous appellerons ce tenseur le *produit extérieur* des vecteurs  $a, b \dots u$  et nous écrirons :

$$(II. 59) \quad t^{\alpha\beta\gamma\dots\zeta} = [a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots u^\zeta].$$

Cette méthode nous permet de former facilement les combinaisons antisymétriques ; elle est aussi d'usage courant en mécanique ondulatoire.

Dans l'espace à 3 dimensions, nous pourrions ainsi former :

1° Le produit vectoriel de 2 vecteurs :

$$t^{ik} = a^i b^k - a^k b^i;$$

2° Le produit extérieur de 3 vecteurs :

$$(II. 60) \quad t^{ikl} = \begin{vmatrix} a^i & a^k & a^l \\ b^i & b^k & b^l \\ c^i & c^k & c^l \end{vmatrix}$$

ce tenseur aura pour composantes  $D, 0$  et  $-D$  en appelant  $D$  le déterminant :

$$(II. 61) \quad D = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a^1 b^2 - a^2 b^1) c^3 + (a^2 b^3 - a^3 b^2) c^1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) c^2 \\ = [a^1 b^2] c^3 + [a^2 b^3] c^1 + [a^3 b^1] c^2.$$

On reconnaît cette expression, qui sert à définir, dans la géométrie usuelle, le *volume* du parallélépipède construit sur les vecteurs  $a, b$  et  $c$  (Cf. Bruhat, *Cours de mécanique physique*. Masson, 1934, p. 7).

En géométrie usuelle, une convention spéciale est nécessaire pour donner un signe à ce volume, et choisir entre  $+D$  et  $-D$ .

Ces *produits extérieurs* sont appelés souvent *multivecteurs*.

**XIV. — Remarques sur l'emploi des tenseurs  
de symétrie définie, et la règle du paragraphe VIII.**

L'exemple des tenseurs symétriques ou antisymétriques va nous fournir l'occasion de préciser nos remarques du paragraphe 8. Nous avons donné une règle pour reconnaître un tenseur ; nous supposons avoir trouvé un jeu de composantes  $t(i, k, m)$  dépendant d'un certain nombre d'indices, et nous voulons savoir si c'est un tenseur, et quelle est sa variance. Nous cherchons à former un produit contracté invariant, de la forme (II. 43) :

$$(II. 62) \quad \sum_{ikm} t(i, k, m) u^i v^k \omega^m \quad \text{ou} \quad \sum_{ikm} t(i, k, m) x_k^{im} = I.$$

Supposons que nous ayons réussi à former un invariant (II. 62) mais seulement dans le cas d'un tenseur *symétrique* :

$$(II. 63) \quad x_k^{im} = x_k^{mi}.$$

Que pouvons-nous dire de  $t(i, k, m)$  ? Nous saurons seulement ceci : sa partie symétrique en  $i, m$  est un tenseur ; sa partie antisymétrique nous échappe, et nous ne connaissons pas ses propriétés. En effet, en regroupant les termes  $i, m$  et  $m, i$  nous pouvons écrire :

$$(II. 64) \quad I = \frac{1}{2} \sum_{ikm} [t(i, k, m) + t(m, k, i)] x_k^{im}$$

le facteur  $\frac{1}{2}$  est nécessaire si nous continuons à faire la somme pour toutes les valeurs  $i$  et  $m$  ; afin de ne pas compter 2 fois chaque terme, nous pourrions supprimer le  $\frac{1}{2}$  et écrire :

$$I = \sum_{k, i \geq m} [t(i, k, m) + t(m, k, i)] x_k^{im} ;$$

en précisant  $i \geq m$  nous ne comptons qu'une fois chaque terme.

La formule (II, 64) nous montre que la partie symétriques  $^k_{im}$  :

$$(II. 65) \quad t(i, k, m) + t(m, k, i) = 2s^k_{im}$$

de nos composantes  $t$  forme bien un tenseur symétrique de la variance indiquée ; mais pour la partie antisymétrique  $a(i, k, m)$  :

$$(II. 66) \quad t(i, k, m) - t(m, k, i) = 2a(i, k, m)$$

nous ne pouvons absolument rien dire.

Les rôles sont inversés, si nous savons former un invariant au moyen d'un tenseur  $y_k^m$  antisymétrique :

$$(II. 67) \quad \sum_{ikm} t(i, k, m) y_k^{im} = I' \quad y_k^{im} = -y_k^{mi}$$

La formule se transforme d'une manière analogue à (II, 64) et donne :

$$I' = \frac{1}{2} \sum_{ikm} [t(i, k, m) - t(m, k, i)] y_k^{im}$$

et nous montre le caractère tensoriel de la partie antisymétrique  $\alpha_{im}^k$  de (II. 66). Quant à la partie symétrique elle reste alors complètement inconnue.

Ces remarques nous serviront constamment par la suite.



## CHAPITRE III

# LES PSEUDO-TENSEURS EN GÉOMÉTRIE VECTORIELLE. DENSITÉS ET CAPACITÉS TENSORIELLES

### *I. — Utilité et rôle des pseudo-tenseurs.*

Nous avons étudié, au chapitre II, les tenseurs de divers ordres, et montré comment on pouvait les introduire méthodiquement. D'autres grandeurs sont utiles à reconnaître aussi ; elles ressemblent jusqu'à un certain point aux tenseurs véritables, mais s'en distinguent par certaines propriétés ; nous les appellerons pseudo-tenseurs, et nous en distinguerons deux sortes principales, les densités tensorielles et les capacités tensorielles ; il y en aurait bien encore d'autres variétés, mais ces deux types seront de beaucoup les plus importants. Les auteurs classiques ont pris l'habitude de ne parler des densités tensorielles qu'après avoir introduit une métrique dans la géométrie ; mais P. Langevin a très justement remarqué, dans ses leçons au Collège de France (1923), que les densités tensorielles se définissent aisément dans l'espace vectoriel, sans le secours d'aucune métrique ; L. Brillouin a, par la suite <sup>(1)</sup>, précisé la distinction entre capacités et densités.

Comme nous le verrons, ces pseudo-tenseurs se déduisent de tenseurs véritables, par un changement de notation qui réduit le nombre des indices et celui des composantes. On allège ainsi beaucoup les formules ; enfin, l'avantage est grand d'avoir obtenu une définition qui ne dépende pas de la métrique, car cela nous laissera parfaitement libre ensuite de choisir à notre gré les métriques les mieux adaptées aux problèmes étudiés ; nous en donnerons divers exemples importants.

### *II. — Réduction des tenseurs antisymétriques à des pseudo-tenseurs d'ordre différent ; pseudo-scalaire.*

Les tenseurs antisymétriques présentant un nombre restreint de composantes indépendantes, il est fort commode de pouvoir les ramener à des grandeurs

(1) L. BRILLOUIN. *Congrès de mathématiques*, Toronto, 1924.

J. HADAMARD. *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, t. 1. Hermann, Paris (1927),

plus simples, comportant un nombre plus faible d'indices, mais cette opération ne conserve pas intégralement le caractère tensoriel. Nous allons exposer ces réductions sur quelques exemples simples avant d'en indiquer le schéma général.

Commençons par le cas de l'espace vectoriel à 3 dimensions, qui nous est familier, et prenons un tenseur 3 fois covariant antisymétrique :

$$t^{ijk}$$

du type du produit extérieur (II. 60). Ce tenseur ne possède qu'une seule valeur absolue, que nous nommerons  $|\tau|$  ; toutes ses composantes sont égales à  $+\tau$ , 0 et  $-\tau$ .

Nous pourrions prendre pour  $\tau$  la valeur absolue, et obtenir ainsi un nombre toujours positif, mais ce choix ne serait pas heureux. Nous préférons choisir, une fois pour toutes, un certain ordre, 1.2.3 par exemple. Si nous tenons à raccorder nos notations avec celles de la géométrie usuelle (chap. I, § 3) nous choisirons pour les indices l'ordre qui correspond à une rotation à gauche ; ce sera donc :

$$(III. 1) \quad \alpha\beta\gamma = \begin{cases} 1.2.3 & \text{dans un système d'axes à gauche.} \\ 3.2.1 & \text{dans un système d'axes à droite.} \end{cases}$$

Nous appellerons alors  $\tau$  la composante  $t^{\alpha\beta\gamma}$  ainsi choisie, avec son signe :

$$(III. 2) \quad \tau = t^{\alpha\beta\gamma}.$$

A quelles propriétés satisfait cette grandeur  $\tau$ , lors d'un changement de système de référence ? Telle est la question qui se pose immédiatement à nous.

Pour simplifier l'exposé, nous admettrons que l'ordre choisi est l'ordre 1.2.3 et nous ne parlerons plus des  $\alpha\beta\gamma$ .

Effectuons donc un changement de coordonnées ; il nous sera plus commode ici de caractériser les nouvelles coordonnées ou les tenseurs transformés par un trait supérieur. Au lieu des lettres majuscules employées précédemment nous utiliserons des lettres surlignées :

$$(III. 3) \quad dx^i = \sum_m \alpha_m^i d\bar{x}^m \quad d\bar{x}^m = \sum_k \beta_k^m dx^k$$

$$\Delta = |\alpha_m^i| = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{vmatrix}$$

Les formules sont celles du paragraphe 11 du chapitre II ; rappelons la définition du  $\beta_k^m$  donnée en (II. 20) :

$$\Delta \cdot \beta_k^m = \text{mineur de } \alpha_m^k$$

ainsi :

$$\Delta \cdot \beta_1^1 = (\alpha_2^2 \alpha_3^3 - \alpha_2^3 \alpha_3^2)$$

et en général :

$$(III. 4) \quad \Delta \cdot \beta_k^i = (\alpha_1^i \alpha_2^j - \alpha_2^i \alpha_1^j) ;$$

dans cette formule, on obtient le signe correct si l'ordre  $i, j, k$  se déduit de l'ordre 1.2.3 par une permutation paire (ici, circulaire).

Le tenseur  $\bar{t}^{lmn}$  transformé aura de nouveau une seule valeur intéressante, que nous appelons  $\bar{\tau}$  :

$$(III. 5) \quad \bar{\tau} = \bar{t}^{123}.$$

La transformation s'écrit :

$$(III. 6) \quad t^{ijk} = \sum_{lmn} \alpha_i^l \alpha_m^j \alpha_n^k \bar{t}^{lmn} \quad \bar{t}^{lmn} = \sum_{ijk} \beta_i^l \beta_j^m \beta_k^n t^{ijk}.$$

Partons de la première de ces formules et calculons  $t^{123}$ ; toutes les composantes  $\bar{t}^{lmn}$  ayant 2 indices égaux sont nulles; il ne reste que les composantes  $\bar{t}^{lmn}$  à 3 indices inégaux :

$$\bar{t}^{lmn} = \begin{cases} + \bar{\tau} & \text{si } lmn \text{ est une permutation paire de } 1.2.3, \\ - \bar{\tau} & \text{si } lmn \text{ est une permutation impaire de } 1.2.3. \end{cases}$$

Regroupons ces termes :

$$(III. 7) \quad \tau = t^{123} = \left\{ \sum_{lmn} \pm \alpha_i^l \alpha_m^j \alpha_n^k \right\} \bar{\tau}.$$

La somme des termes  $\pm \alpha_i^l \alpha_m^j \alpha_n^k$  se fait avec signe + ou - suivant que la permutation  $l, m, n$  est paire ou impaire; c'est la *définition même du déterminant des  $\alpha_m^i$* ; nous aurons donc :

$$(III. 8) \quad \tau = \Delta \cdot \bar{\tau}.$$

Ainsi donc, nous avons obtenu une grandeur  $\tau$  qui possède une seule composante, mais qui n'est *pas un scalaire*, car elle subit une transformation et change de valeur dans un changement d'axes. Nous l'appellerons provisoirement un *pseudo-scalaire*.

### III. — Autre exemple de pseudo-scalaire; densités et capacités scalaires.

Nous sommes partis, au paragraphe précédent, d'un tenseur antisymétrique à 3 indices contravariants. Essayons maintenant un tenseur antisymétrique à 3 indices covariants  $c_{ijk}$ . Nous appellerons  $\Gamma$  la composante correspondant à l'ordre spécial choisi pour les indices, l'ordre 1.2.3 par exemple :

$$(III. 9) \quad \Gamma = c_{123}.$$

La grandeur  $\Gamma$  va être un nouveau pseudo-scalaire, mais d'un type différent de celui du paragraphe précédent. Les formules de transformation du tenseur covariant  $c_{ijk}$  diffèrent de celles de  $t^{ijk}$  par le remplacement des  $\alpha$  par les  $\beta$ . Les formules (III. 6) deviennent :

$$(III. 10) \quad c_{ijk} = \sum_{lmn} \beta_i^l \beta_j^m \beta_k^n \bar{c}_{lmn} \quad \bar{c}_{lmn} = \sum_{ijk} \alpha_i^l \alpha_j^m \alpha_k^n c_{ijk}.$$

En regroupant les termes, comme en (III. 7) nous trouvons :

$$(III. 11) \quad \Gamma = c_{123} = \left\{ \sum_{imn} \pm \beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \right\} \bar{\Gamma} = \Delta' \cdot \bar{\Gamma}.$$

Nous voyons apparaître ici le déterminant  $\Delta'$  des  $\beta$  ; mais nous avons déjà remarqué (II. 23) la réciprocité des  $\alpha$  et des  $\beta$  ainsi que la relation suivante :

$$(III. 12) \quad \Delta' = |\beta'_i| = \frac{1}{\Delta}.$$

De sorte que nous aboutissons à la formule suivante, inverse de la relation (III. 8) :

$$(III. 13) \quad \Gamma = \frac{1}{\Delta} \bar{\Gamma}.$$

Il faut absolument distinguer ces deux sortes de pseudo-scalaires ; nous appellerons *capacités* les pseudo-scalaires du type (III. 8) et nous les désignerons par des lettres *grecques ou anglaises minuscules*.

Quant aux expressions  $\Gamma$ , se transformant suivant la règle (III. 13) nous les nommerons *densités*, et nous emploierons les lettres *grecques ou anglaises majuscules* pour les représenter.

#### IV. — Densités et capacités tensorielles.

C'est uniquement pour simplifier les calculs, que nous avons pris aux paragraphes précédents l'exemple d'un espace à 3 dimensions. La méthode est générale ; dans un espace à  $r$  dimensions, prenons un tenseur antisymétrique  $r$  fois contravariant  $t^{ik}$ , nous en déduirons une *capacité scalaire*  $\tau$  qui sera définie par la relation :

$$(III. 14) \quad \tau = t^{1,2,3...r}$$

où l'on prendra pour les indices de  $t$  un certain ordre arbitrairement choisi une fois pour toutes. La grandeur  $\tau$  se transforme suivant la formule (III. 8) ; le raisonnement est le même, mais le déterminant  $\Delta$  a maintenant  $r$  lignes et colonnes.

D'un tenseur antisymétrique  $r$  fois covariant  $c_{123...r}$  nous tirerons une *densité scalaire*  $\Gamma$ , obéissant à la formule (III. 13).

Ceci dit, nous pouvons définir des *densités et capacités tensorielles*. En multipliant une capacité  $\tau$  par un tenseur quelconque  $\omega_i^k$  nous obtenons une *capacité tensorielle*.

$$(III. 15) \quad \omega_i'^k = \tau \omega_i^{jk}$$

dont la règle de transformation se trouve aisément :

$$(III. 16) \quad \begin{aligned} \omega_i'^k &= \Delta \cdot \sum_{mnp} \alpha_n^i \alpha_n^k \beta_l^m \bar{\omega}_p^{mn} \\ \bar{\omega}_p^{mn} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{ikl} \beta_i^m \beta_k^n \alpha_p^l \omega_i'^k. \end{aligned}$$

Suivant une règle analogue, nous obtiendrons une *densité tensorielle* en multipliant une densité scalaire  $\Gamma$  par un tenseur quelconque  $w_i^{ik}$  :

$$(III. 17) \quad \Omega_i^{ik} = \Gamma w_i^{ik}.$$

Les règles de transformations seront :

$$(III. 18) \quad \begin{aligned} \Omega_i^{ik} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{mnp} \alpha_m^i \alpha_n^k \beta_p^i \bar{\Omega}_p^{mn} \\ \bar{\Omega}_p^{mn} &= \Delta \sum_{i,kl} \beta_i^m \beta_k^n \alpha_p^i \Omega_i^{kl}. \end{aligned}$$

Densités et capacités tensorielles se distinguent par le rôle des facteurs  $\Delta$ . Pour les indices de covariance ou contravariance, leur transformation est tout à fait semblable à celle des tenseurs.

**Conséquence importante.** — *Le produit d'une densité par une capacité donne un tenseur vrai.* Les facteurs  $\Delta \cdot \frac{1}{\Delta}$  s'éliminent en effet dans le produit. Ainsi le produit  $(\Gamma \cdot \tau)$  d'une densité scalaire (III. 13) par une capacité scalaire (III. 8) donne un scalaire pur. De même :

$$(III. 19) \quad \begin{aligned} (\Gamma \cdot \tau) &= s && \text{scalaire pur.} \\ \Gamma \cdot w_i^{ik} &= (\Gamma \cdot \tau) w_i^{ik} = s \cdot w_i^{ik} \\ \tau \Omega_i^{ik} &= (\tau \cdot \Gamma) w_i^{ik} = s \cdot w_i^{ik} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (\Gamma \cdot \tau) &= s \\ \Gamma \cdot w_i^{ik} &= (\Gamma \cdot \tau) w_i^{ik} = s \cdot w_i^{ik} \\ \tau \Omega_i^{ik} &= (\tau \cdot \Gamma) w_i^{ik} = s \cdot w_i^{ik} \end{aligned}} \right\} \text{tenseurs purs.}$$

Nous allons voir l'importance de ces relations.

### V. — Exemples de pseudo-tenseurs ;

*l'élément de volume représente le type des capacités scalaires.*

Prenons  $r$  vecteurs infinitésimaux  $\delta x^i$ ,  $\delta' x^i$ ,  $\delta'' x^i$ , etc. Nous pouvons former leur produit extérieur suivant la règle donnée à la fin du chapitre II (équ. II. 58). Ce sera le déterminant :

$$(III. 20) \quad [\delta x^i, \delta' x^i, \delta'' x^i \dots \delta^{r-1} x^i] = \begin{vmatrix} \delta x^1 & \delta x^2 & \dots & \delta x^r \\ \delta' x^1 & \delta' x^2 & \dots & \delta' x^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^{r-1} x^1 & \delta^{r-1} x^2 & \dots & \delta^{r-1} x^r \end{vmatrix} = \delta \tau$$

ce déterminant va nous donner un élément  $\delta \tau$  du type des *capacités scalaires*. Cet élément n'est autre que le volume infinitésimal du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\delta x^i$ . Nous avons déjà noté cette coïncidence à la fin du chapitre II (équ. II. 61). La formule de transformation d'axes pour un élément de volume est donc :

$$(III. 21) \quad \delta \tau = \Delta \bar{\delta \tau}.$$

L'élément différentiel usuel, pour représenter un élément de volume, s'ob-

tient en prenant  $\delta x^1$  dans la direction 1, et égal à  $dx^1$ ; puis  $\delta'x^1$  est pris suivant l'axe 2, et égal à  $dx^2$ , etc., on obtient donc :

$$(m. 22) \quad [dx^1 dx^2 \dots dx^r] = \begin{vmatrix} dx^1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & dx^2 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & dx^3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 & dx^r \end{vmatrix} = dx^1 dx^2 \dots dx^r = d\tau.$$

La définition usuelle se raccorde donc parfaitement avec celle que nous avons adoptée; nous avons ainsi démontré la relation (m. 21) qui n'est autre que celle du déterminant fonctionnel :

$$(m. 21 \text{ bis}) \quad dx^1 dx^2 \dots dx^r = \frac{D(x^1 \dots x^r)}{D(\bar{x}^1 \dots \bar{x}^r)} d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 \dots d\bar{x}^r.$$

Un *élément de volume* infinitésimal  $d\tau$  représente l'*exemple typique de capacité scalaire*; le mot capacité convient bien à cette entité géométrique, vide, pour le moment, de tout contenu. Ce récipient peut être rempli d'une matière possédant une certaine *densité*  $\Gamma$ . Le produit de la capacité (du récipient) par la densité (du contenu) nous donne la masse, grandeur scalaire invariante. S'il s'agit d'un volume de dimension fini nous écrirons l'intégrale :

$$(m. 23) \quad M = \int \dots \int \Gamma \cdot d\tau$$

Scalaire vrai = densité capacité.

Cette formule, ainsi présentée, précise le sens des mots et justifie leur choix.

## VI. — Le tenseur antisymétrique à deux indices, dans l'espace tridimensionnel, se ramène à un pseudo-tenseur.

Prenons, dans l'espace vectoriel à 3 dimensions, un tenseur contravariant à 2 indices, antisymétrique; son tableau de composantes se présente ainsi :

$$\begin{pmatrix} t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{pmatrix}$$

il ne contient que 3 composantes indépendantes; nous allons donc tenter de le réduire à une grandeur qui ressemble à un vecteur. Choisissons un certain ordre d'indices, l'ordre 1.2.3 par exemple. Cela revient à choisir un sens de rotation privilégié pour les axes. Si nous voulons retrouver les conventions du chapitre I, § 3, nous aurons soin que ce sens de *rotation soit à gauche*; nous choisirons donc l'ordre 1.2.3 si nos axes tournent à gauche, et l'ordre inverse 1.3.2 si nous avons des axes à droite.

Ceci fait, nous associerons à chaque composante  $t^{ij}$  une autre composante à un seul indice  $\tau_k$  en choisissant les indices de telle sorte que l'ordre  $i.j.k$  se déduise de l'ordre 1.2.3 par une *permutation paire*. D'après les remarques

des paragraphes précédents, le cas des 3 dimensions a ceci de particulier que les permutations paires s'y confondent avec les permutations circulaires. Notre tableau de composantes va s'écrire ainsi :

$$(III. 24) \quad \begin{pmatrix} t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_3 & -\tau_2 \\ -\tau_3 & 0 & \tau_1 \\ \tau_2 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix} \quad t^{ij} = \tau_k.$$

Effectuons maintenant un changement d'axes, afin d'observer la loi de transformation de ces composantes  $\tau_k$ . Les règles de transformation ont été rappelées en (III. 3 et 4). Le tenseur  $\bar{t}$  nouveau aura pour composantes  $\bar{t}^{lm}$ ; nous établirons entre celles-ci et des nombres  $\bar{\tau}_n$  la même correspondance qu'en (III. 24) :

$$\bar{t}^{lm} = \bar{\tau}_n \quad \text{avec } l, m, n \text{ permutation paire de } 1.2.3.$$

La transformation du tenseur  $t^\nu$  est bien connue :

$$(III. 25) \quad t^{ij} = \sum_{lm} \alpha_i^l \alpha_j^m \bar{t}^{lm} \quad \bar{t}^{lm} = \sum_{ij} \beta_l^i \beta_m^j t^{ij}.$$

Partons de la première formule, et développons-la, en remplaçant les  $\bar{t}^{lm}$  par les  $\bar{\tau}_n$ ; le tableau (III. 24) facilite cette transcription :

$$\begin{aligned} t^{ij} = 0 & \quad + \alpha_i^1 \alpha_j^2 \bar{\tau}_3 - \alpha_i^1 \alpha_j^3 \bar{\tau}_2 \\ & - \alpha_i^2 \alpha_j^1 \bar{\tau}_3 + 0 \quad + \alpha_i^2 \alpha_j^3 \bar{\tau}_1 \\ & + \alpha_i^3 \alpha_j^1 \bar{\tau}_2 - \alpha_i^3 \alpha_j^2 \bar{\tau}_1 + 0 \end{aligned}$$

ce qui se regroupe de la manière suivante :

$$(III. 26) \quad t^{ij} = (\alpha_i^2 \alpha_j^3 - \alpha_j^2 \alpha_i^3) \bar{\tau}_1 + (\alpha_i^3 \alpha_j^1 - \alpha_j^3 \alpha_i^1) \bar{\tau}_2 + (\alpha_i^1 \alpha_j^2 - \alpha_j^1 \alpha_i^2) \bar{\tau}_3.$$

Cette expression met en évidence les mineurs de  $\alpha_1^k$ ,  $\alpha_2^k$  et  $\alpha_3^k$ . En tenant compte de la formule (III. 4) nous trouvons :

$$(III. 27) \quad t^\nu = \Delta [\beta_1^\nu \bar{\tau}_1 + \beta_2^\nu \bar{\tau}_2 + \beta_3^\nu \bar{\tau}_3] = \tau_k.$$

Nous avons attribué aux composantes  $\tau$  et  $\bar{\tau}$  un indice unique, que nous plaçons arbitrairement en bas, sans aucune justification. La formule (III. 27) va nous permettre de spécifier la nature de ces composantes  $\tau$ , qui se transforment ainsi :

$$(III. 29) \quad \tau_k = \Delta \sum_n \beta_k^n \bar{\tau}_n = | \alpha_m^k | \cdot \sum_n \beta_k^n \bar{\tau}_n.$$

Ce qui entraîne inversement :

$$(III. 30) \quad \bar{\tau}_n = \frac{1}{\Delta} \sum_k \alpha_k^n \tau_k = | \beta_i^n | \cdot \sum_k \alpha_k^n \tau_k.$$

Nous avons en effet remarqué (II. 23) la réciprocity des formules entre les

et les  $\beta$ , ainsi que le fait que le déterminant des  $\beta$  est inverse de celui des  $\alpha$  (III. 12) :

$$(III. 31) \quad \Delta = |\alpha_m^i| = \frac{1}{\Delta'}, \quad \Delta' = |\beta_m^i| = \frac{1}{\Delta}.$$

Si ce n'était le facteur  $\Delta$  ou  $\frac{1}{\Delta}$ , les formules de transformation (III. 29 et 30) seraient celles d'un tenseur simple covariant. Mais ce facteur  $\Delta$  vient modifier assez sérieusement le résultat. Notre grandeur  $\tau$  n'est pas un vrai tenseur ; nous y retrouvons une *capacité tensorielle*, suivant la définition (III. 16).

Nous aurions pu faire le même raisonnement, en partant d'un *tenseur antisymétrique* du second ordre qui soit *covariant* et non plus *contravariant*. La même règle de transcription va nous conduire à une *densité tensorielle contravariante*. A chaque composante  $c_{ij}$  du tenseur nous ferons correspondre un  $\Gamma^k$ , en choisissant pour  $i, j, k$  une permutation paire de 1.2.3.

$$(III. 32) \quad c_{ij} = \Gamma^k \quad (i, j, k) = \text{perm. paire de } 1.2.3.$$

Les formules de transformation (III. 25) sont remplacées par celles de la covariance :

$$(III. 33) \quad c_{ij} = \sum_{lm} \beta_i^l \beta_j^m \bar{c}_{lm} \quad \bar{c}_{lm} = \sum_{ij} \alpha_i^l \alpha_j^m c_{ij}.$$

Nous prendrons encore la première formule, et nous écrirons tous les termes, en remplaçant méthodiquement les  $\bar{c}_{lm}$  par les  $\bar{\Gamma}^n$  qui leur correspondent. Le calcul est identique à celui que nous avons déjà fait, mais il faut remplacer les  $\alpha$  par les  $\beta$ , de sorte que la formule (III. 26) se transcrit :

$$(III. 34) \quad c_{ij} = (\beta_i^1 \beta_j^2 - \beta_i^2 \beta_j^1) \bar{\Gamma}^3 + (\beta_i^2 \beta_j^3 - \beta_i^3 \beta_j^2) \bar{\Gamma}^1 + (\beta_i^3 \beta_j^1 - \beta_i^1 \beta_j^3) \bar{\Gamma}^2.$$

Les parenthèses représentent les mineurs de  $\beta_k^1, \beta_k^2$  et  $\beta_k^3$  dans le déterminant  $\Delta'$  des  $\beta$  ; les formules (III. 4 et III. 12) donnent donc :

$$(III. 35) \quad \beta_i^1 \beta_j^2 - \beta_i^2 \beta_j^1 = \Delta' \alpha_i^3 \alpha_j^1 = \frac{1}{\Delta} \alpha_i^3 \alpha_j^1$$

et la formule (III. 34) prend la forme :

$$(III. 36) \quad \Gamma^k = \frac{1}{\Delta} \sum_n \alpha_n^k \bar{\Gamma}^n$$

dont la réciproque est :

$$(III. 37) \quad \bar{\Gamma}^n = \Delta \sum_k \beta_k^n \Gamma^k.$$

Cette fois, c'est une densité tensorielle que nous trouvons.

## VII. — Résumé des résultats généraux.

Les résultats s'étendent aisément au cas d'un hyperspace à  $r$  dimensions. Partons d'un *tenseur antisymétrique*  $\tau^{i^1 i^2 \dots i^{r-1}}$  à  $r-1$  indices *contravariants*, nous ne lui trouverons que  $r$  composantes indépendantes et nous pourrions



former une *capacité tensorielle covariante* en posant :

$$(III. 38) \quad t^{ijk\dots r-1} = \tau_r \quad i, j, k \dots r-1, r, \text{ permut. paire.}$$

Le signe est +, comme dans la formule, si les nombres  $ijk\dots r-1, r$  constituent une permutation paire de l'ordre 1.2.3.4... choisi une fois pour toutes ; si la permutation était impaire, on mettrait dans (III. 38) un signe —.

Réciproquement, partant d'un tenseur antisymétrique  $c_{ijk\dots r-1}$  à  $r-1$  indices covariants, on formerait une densité tensorielle  $\Gamma^r$  ne possédant qu'un seul indice contravariant.

Dans l'espace à 3 dimensions, nous pourrions définir un élément de surface en nous donnant 2 vecteurs  $\delta x^i$  et  $\delta' x^i$  ; nous utiliserons la règle des produits extérieurs (II. 58) et nous caractériserons l'élément de surface comme un tenseur antisymétrique contravariant à 2 indices :

$$(III. 39) \quad \delta s^v = \delta x^i \delta' x^j - \delta x^j \delta' x^i.$$

Utilisons la règle de formation d'un pseudo-tenseur, et nous allons transformer ce tenseur du 2<sup>e</sup> ordre contravariant en une capacité tensorielle covariante :

$$(III. 40) \quad d\sigma_k = \delta x^i \delta' x^j - \delta x^j \delta' x^i \quad i, j, k = \text{perm. paire de } 1.2.3.$$

Les formules précédentes peuvent être écrites un peu différemment. Appe-

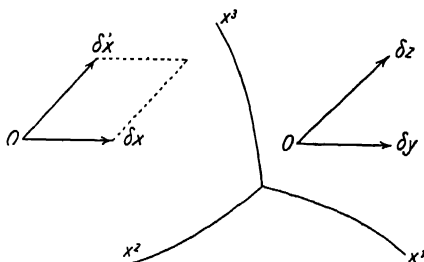


Fig. III. 1.

lons  $y$  un paramètre porté suivant la première direction  $\delta$  et  $z$  un autre paramètre mesurant un déplacement suivant  $\delta'$ . La direction  $\delta$  est définie par ses coefficients directeurs  $\alpha_y^i$ , de sorte que nous aurons :

$$\delta x^i = \alpha_y^i dy \quad \alpha_y^i = \frac{\partial x^i}{\partial y}.$$

Pour l'autre direction  $z$  nous aurons de même :

$$\delta' x^i = \alpha_z^i dz \quad \alpha_z^i = \frac{\partial x^i}{\partial z}.$$

Les formules (III. 39 et 40) s'écrivent donc :

$$(III. 41) \quad ds^v = d\sigma_k = (\alpha_y^i \alpha_z^j - \alpha_z^i \alpha_y^j) dy dz = \left( \frac{\partial x^i}{\partial y} \frac{\partial x^j}{\partial z} - \frac{\partial x^j}{\partial y} \frac{\partial x^i}{\partial z} \right) dy dz.$$

Cette formule est celle sous laquelle nous verrons apparaître les éléments de surface, dans les transformations de formules.

Dans un hyperspace à  $r$  dimensions, l'élément d'extension ou domaine d'ordre  $r$  (analogue au volume) est une capacité scalaire (III. 21) ; un élément d'extension d'ordre  $r - 1$ , souvent appelé « hypersurface » sera le produit extérieur de  $r - 1$  vecteurs  $\delta x^1 \delta x^2 \dots \delta x^{r-2} x^h$  et se ramènera à une capacité tensorielle covariante. Pour trois dimensions, l'élément de volume  $d\tau$  est une capacité scalaire (III. 21) et l'élément de surface  $d\sigma_k$  une capacité vectorielle covariante.

De nombreuses formules de physique se présentent sous la forme suivante : un certain élément A, multiplié par un élément de surface, donne un invariant ; nous transcrivons :

$$(III. 42) \quad \sum_k \mathcal{A}^k d\sigma_k = C \quad \text{scalaire}$$

et nous saurons qu'une telle formule n'est possible que si  $\mathcal{A}^k$  est une densité tensorielle contravariante. Généralisons un peu : une grandeur  $\mathcal{B}$ , multipliée par un élément de surface, doit donner un certain tenseur  $\iota^\mu$  ; cette condition se traduit :

$$\sum_k \mathcal{B}^{v,k} d\sigma_k = \iota^v$$

et exige l'introduction d'une densité tensorielle contravariante  $\mathcal{B}^{v,k}$ .

### VIII. — Ces pseudo-tenseurs redonnent les vecteurs axiaux, pour l'espace euclidien tridimensionnel.

Les produits vectoriels sont le type des *vecteurs axiaux* ; c'est ce que nous avons rappelé au chapitre premier, § 3 ; et les vecteurs axiaux ne sont pas exactement des vecteurs, puisqu'ils se transforment suivant une règle un peu différente de celle des vecteurs polaires, types des vecteurs véritables. Nous sentons donc qu'il doit y avoir une parenté étroite entre les vecteurs axiaux de la géométrie élémentaire et les pseudo-vecteurs que nous venons de découvrir.

Pour préciser cette parenté, il nous faut revenir à la géométrie courante, qui utilise quelques postulats supplémentaires, inconnus dans la géométrie vectorielle. Tout d'abord, on admet la possibilité de comparer des longueurs comptées suivant les 3 axes (car il n'y a pas ici plus de 3 dimensions) ; en outre, on choisit la même unité de longueur sur ces 3 axes, et l'on s'interdit de modifier cette unité commune, lors des changements de système de référence. On tiendra compte, à part, des changements éventuels de l'unité de longueur et ce sera là le rôle des « formules de dimensions ». Enfin, on se restreint le plus souvent au cas d'axes orthogonaux ; c'est ce qu'on appelle des axes cartésiens.

Appelons alors  $x^1 x^2 x^3$  les axes initiaux et  $\bar{x}^1 \bar{x}^2 \bar{x}^3$  les axes nouveaux ; nous introduirons les cosinus des angles des différents axes entre eux :

$$(III. 43) \quad \alpha_m^i = \cos(\widehat{x^i, \bar{x}^m}) = \beta_i^m ;$$

ce seront les  $\alpha_m^i$  et en même temps les  $\beta_l^m$  inverses. La somme des carrés des 3 cosinus directeurs relatifs à l'axe  $\overline{x^1}$  est égale à 1 :

$$(III. 44) \quad \sum_i (\alpha_i^1)^2 = (\alpha_1^1)^2 + (\alpha_2^1)^2 + (\alpha_3^1)^2 = 1;$$

cette relation correspond à un cas particulier de celle que nous avons toujours admise :

$$\sum_i \alpha_i^1 \beta_i^1 = \alpha_1^1 \beta_1^1 + \alpha_2^1 \beta_2^1 + \alpha_3^1 \beta_3^1 = 1.$$

Les nouveaux axes sont orthogonaux entre eux, ce qui exige :

$$(III. 45) \quad \text{axes } \overline{x^1} \overline{x^2} \quad \sum_i (\alpha_i^1 \alpha_i^2) = \alpha_1^1 \alpha_1^2 + \alpha_2^1 \alpha_2^2 + \alpha_3^1 \alpha_3^2 = 0,$$

ce qui représente, en tenant compte de (III. 43), notre formule :

$$\sum_i \alpha_i^1 \beta_i^2 = 0.$$

La définition (III. 43) nous redonne donc nos formules habituelles très directement, mais il est évident qu'elle introduit une restriction. Celle-ci se voit en formant les déterminants  $\Delta$  et  $\Delta'$ , dont nous savons qu'en règle générale, ils sont inverses l'un de l'autre (III. 31). Or ici :

$$(III. 46) \quad \begin{aligned} \Delta &= | \alpha_m^i | = | \beta_m^i | = \Delta' \\ \Delta \Delta' &= \Delta^2 = 1. \end{aligned}$$

Ces relations ne comportent que deux solutions :

$$(III. 47) \quad \begin{cases} \Delta = +1 & \text{axes ayant même sens de rotation.} \\ \Delta = -1 & \text{axes ayant des sens opposés.} \end{cases}$$

Ainsi donc, les conventions de la géométrie élémentaire conduisent à limiter étroitement les valeurs possibles de  $\Delta$  et à n'admettre que  $+1$  et  $-1$ , suivant que le sens de rotation des axes est conservé ou inversé.

Dans ces conditions, tous nos pseudo-tenseurs se comportent de la même façon, qu'ils soient du genre « densité » ou du type « capacité » :

Les pseudotenseurs se transforment comme des tenseurs vrais, aussi longtemps qu'on conserve le sens de rotation des axes; mais si l'on change le sens de rotation des axes, tous les pseudo-tenseurs changent de signe.

Les capacités et densités vectorielles se réduisent donc toutes, en géométrie usuelle, à des vecteurs axiaux. Quant aux densités et capacités scalaires on les évite ordinairement en géométrie courante, en ne prenant que leurs valeurs absolues; on définit toujours un élément de volume  $d\tau$  comme positif et une densité comme positive.

**IX. — Méthode générale de formation des pseudo-tenseurs des deux types, capacités ou densités.**

Dans un espace à  $r$  dimensions, considérons un tenseur dont tous les indices sont covariants, et qui soit entièrement antisymétrique vis-à-vis de tous ces indices. Appelons  $n$  le nombre des indices, et écrivons le tenseur pour l'exemple  $c = 3$  :

$$(III. 48) \quad t_{ijk} = -t_{jik} = -t_{ikj} \quad \text{etc.} \quad n = 3 \text{ indices covariants.}$$

Prenons un second tenseur  $u$ , lui aussi entièrement covariant et antisymétrique, mais avec  $r - n$  indices, de sorte que le nombre total des indices de  $t$  et  $u$  soit égal à  $r$ . Soit donc  $u_{lm}$  ce tenseur et formons un produit tel que :

$$(III. 49) \quad P_{ijk,lmn} = t_{ijk} u_{lmn} \dots$$

Ce produit est antisymétrique par rapport à chaque groupe d'indices, mais si l'on échange un indice de  $t$  ( $i$  par exemple) avec un indice de  $u$  (comme  $l$ ) on obtient un terme différent. Nous pouvons réaliser un produit  $A$  entièrement antisymétrique en faisant une somme sur tous les termes de ce genre :

$$(III. 50) \quad A_{ijk,lmn} = \sum_p (-1)^p t_{i'j'k'} u_{l'm'n'} \dots$$

où  $p$  est la parité de la permutation d'indices  $i'j'k'l'm'n' \dots$  comparée à  $ijklmn \dots$  qui figurent comme indices de  $A$ . Le tenseur  $A$  entièrement antisymétrique nous permet de définir une densité scalaire  $\alpha$ , comme au paragraphe 3 :

$$(III. 51) \quad \alpha = A_{123,456 \dots r}.$$

La définition de la densité  $\alpha$  s'appuie sur un choix particulier : celui de l'ordre naturel des indices. Avec cette densité, nous pouvons écrire la formule (III. 50) sous la forme suivante :

$$(III. 52) \quad \sum_p (-1)^p t_{ijk} u_{lmn} \dots = \alpha \quad p \text{ parité de la permutation } ijklmn \dots \text{ comparée à } 123 \dots r.$$

Ici se pose une question. Sur combien de termes porte la somme  $\Sigma$  de cette formule (III. 52) ? Nous pouvons y faire courir chaque indice de 1 à  $r$ , ce qui fera  $r^n$  termes ; mais il y en aura un bon nombre de nuls, tous ceux où deux des indices sont égaux ; si nous sommes sur toutes les permutations  $P$  de  $r$  indices différents, il reste  $r!$  termes ; mais chaque terme est encore répété un certain nombre de fois, car les  $n!$  permutations des indices de  $t$  ou bien les  $(r - n)!$  permutations des indices de  $u$  entre eux redonnent le même résultat. Au total, il y a réellement :

$$\frac{r!}{n! (r - n)!}$$

*termes distincts* les uns des autres, en accord avec notre décompte du nombre de composantes indépendantes d'un tenseur antisymétrique (Chap. II, fin du § 12). Cette formule est très instructive ; elle ressemble beaucoup aux expres-

sions que nous avons étudiées au chapitre II, § 14, mais avec cette différence que les produits formés ne sont pas des invariants, mais des densités scalaires. Nous allons donc nous servir de cette relation pour définir des *densités tensorielles* ; nous pourrions poser, par exemple :

$$(III. 53) \quad t_{ijk} = (-1)^p \mathfrak{E}^{lmn} \dots \quad p, \text{ parité de la permutation } ijklmn \dots \\ \text{comparée à } 123 \dots r.$$

ou bien :

$$(III. 54) \quad u_{lmn} \dots = (-1)^k \mathfrak{U}^{ijk}.$$

Ces conventions sont parfaitement acceptables, puisque les tenseurs antisymétriques d'ordre  $r$  ou  $r - n$  ont le même nombre de composantes indépendantes. Partons de la densité tensorielle  $\mathfrak{U}^{ijk}$  ; elle nous permet d'écrire la formule (III. 52) sous la forme :

$$(III. 55) \quad \sum_{ijk} t_{ijk} \mathfrak{U}^{ijk} = K \alpha$$

avec un facteur numérique  $K$  dû au fait que le nombre des termes n'est pas le même dans les sommations des formules (III. 52) et (III. 55). Dans la première, nous avons  $r!$  termes, puisqu'il y a  $r!$  permutations  $P$  des indices ; nous avons vu, en discutant l'équation (III. 52), que ces  $r!$  termes se décomposent en groupes de  $n!$  ( $r - n$ ) ! termes identiques. Dans la seconde formule, il semble y avoir  $r^n$  termes (ici  $r^3$ ) puisque les  $n$  indices courent de 1 à  $r$  ; en réalité, il faut décompter les termes nuls, et il reste  $r(r-1)(r-2) \dots (r-n+1) = \frac{r!}{(r-n)!}$  termes non nuls, qui sont égaux entre eux (au signe près), par groupes de  $n!$ . La sommation (III. 55) nous redonnera le même résultat que (III. 52) si nous posons,

$$K = \frac{1}{(r-n)!}.$$

La formule (III. 55) nous montre que  $\mathfrak{U}$  est une *densité tensorielle*, si nous avons pris soin de définir  $\mathfrak{U}$  comme *antisymétrique* ; car nous ne savons absolument rien sur la partie symétrique de  $\mathfrak{U}$ , comme nous l'avons souligné au chapitre II, § 14.

De même, la formule (III. 53) nous permet de définir une autre densité tensorielle antisymétrique  $\mathfrak{E}^{lmn} \dots$  ; et la formule correspondante s'écrit :

$$(III. 56) \quad \sum_{lmn \dots} \mathfrak{E}^{lmn} \dots u_{lmn} \dots = \frac{1}{n!} \alpha.$$

Donc : *Tout tenseur covariant antisymétrique d'ordre  $n$  permet de définir une densité contravariante antisymétrique d'ordre  $r - n$ .*

Le raisonnement se reprend aisément pour un tenseur *antisymétrique contravariant*  $t^{ijk}$  d'ordre  $n$  ; mais à la place d'une densité scalaire, la formule (III. 51) donnera ici une *capacité* scalaire, suivant nos remarques des paragraphes 4 et 5. En conséquence nous poserons :

$$(III. 57) \quad t^{ijk} = (-1)^p \tau_{lmn} \dots \quad p \text{ parité de la permutation } ijk \dots \\ \text{comparée à } 1.2.3 \dots r.$$

*Tout tenseur contravariant antisymétrique d'ordre  $n$  permet de définir une capacité covariante antisymétrique d'ordre  $r - n$ .*

## X. — Exemples de ces transformations.

Les exemples sont très nombreux ; tout d'abord, un scalaire véritable  $s$  pourra être transformé à volonté en une densité contravariante antisymétrique d'ordre  $r$  ou en une capacité covariante antisymétrique d'ordre  $r$  ; cette éventualité ne sera guère utilisée, et nous la citons à titre de curiosité.

Dans un espace à 4 dimensions, prenons un tenseur deux fois covariant  $f_{ij}$  antisymétrique ; nous allons pouvoir le transformer en une densité deux fois contravariante antisymétrique :

$$(III. 58) \quad f_{ij} = (-1)^p \mathfrak{f}^{kl} \quad p \text{ parité de la permutation } ijkl$$

exemple :

$$(III. 59) \quad f_{12} = -f_{21} = \mathfrak{f}^{34} = -\mathfrak{f}^{43}.$$

Nous ne changeons pas le nombre des indices, mais leur variance, et nous passons d'un tenseur à une densité.

Cet exemple est très important en électromagnétisme relativiste. Le champ électromagnétique groupe les 3 composantes du champ électrique et les 3 composantes de l'induction magnétique en un système de 6 composantes, qui forment un tenseur covariant antisymétrique dans l'univers à 4 dimensions  $(x, y, z, t)$ . Dans cet univers, on peut alors définir une densité contravariante antisymétrique par les formules (III. 58), et cette densité permet d'écrire certaines relations typiques, indispensables à l'électromagnétisme. Nous verrons, en effet, au chapitre IV, § 9, que les formules de « *divergence* » ne peuvent s'écrire, d'une manière générale, que sur des densités. C'est la transformation dualistique (III. 58) qui permet d'appliquer cette opération au champ électromagnétique.

## CHAPITRE IV

# LES PRINCIPAUX OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS UTILISABLES EN GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

### I. — Introduction.

Les relations les plus courantes de la physique théorique s'expriment au moyen d'un petit nombre d'opérations, toujours les mêmes. On en connaît bien les types principaux, auxquels on a donné les noms de gradient, divergence, rotationnel et encore le laplacien  $\Delta$ . Ces expressions suffisent à l'énoncé des lois qui se présentent dans un grand nombre de chapitres de la physique : en théorie de la chaleur, en électricité, magnétisme et électromagnétisme, en hydrodynamique et dans la propagation du son par les fluides, on ne rencontre que ces opérateurs. Lorsqu'on aborde les problèmes d'élasticité, les choses se compliquent notablement. Tous les phénomènes qui dépendent de la déformation des solides (élasticité, vibration, électro- et magnéto-striction, etc.) nous conduiront à une discussion plus délicate et ne pourront se traiter si simplement.

Il est important de sérier les difficultés, et de se rendre compte exactement des postulats et des notions mathématiques indispensables dans ces divers chapitres. C'est ce classement qu'avait fait P. Langevin, dans ses leçons du Collège de France. Nous devons tout d'abord marquer les étapes :

1° Les opérateurs gradient, divergence, rotationnel peuvent être définis en géométrie vectorielle, sans métrique ;

2° Le laplacien  $\Delta$  exige une métrique, mais une fois celle-ci introduite, il se définit très directement comme résultant de la double opération div. grad. ;

3° Là où interviennent les déformations élastiques, il devient indispensable d'introduire la métrique et la dérivation covariante, si l'on tient à garder toute la généralité des formules et à ne pas se restreindre à des axes euclidiens ou cartésiens <sup>(1)</sup>.

Nous aurons donc une série de chapitres dont les équations pourront s'écrire en géométrie vectorielle ; les relations ainsi posées présenteront le grand avantage d'être indépendantes de tout choix particulier de métrique, et de conserver toujours la même forme, dans tous les cas. Nous pourrions donc, par la suite, jouer de cette facilité pour choisir, dans chaque problème, une

(1) L. BRILLOUIN. *Congrès de mathématiques*. Toronto, 1924.

métrique spéciale qui permette une simplification des formules. En électrostatique des cristaux, par exemple, nous pourrions baser notre métrique sur les propriétés diélectriques du cristal, de manière à simplifier les relations entre champ et induction électrique (P. Langevin).

Si nous étudions les lois générales de la mécanique des systèmes (E. Schrödinger), nous choisirons une métrique qui simplifie l'expression de l'énergie cinétique du système, et nous trouverons des énoncés bien plus clairs qu'avec les notations usuelles.

Nous allons, dans ce chapitre IV, rappeler les définitions de ces principaux opérateurs différentiels, et montrer comment il faut les transcrire en calcul tensoriel. Nous retrouverons les tenseurs et pseudo-tenseurs, et établirons divers types de relations essentielles entre ces entités.

## II. — Définitions usuelles des opérateurs : gradient, rotationnel, divergence, laplacien $\Delta$ .

Nous rappellerons, pour commencer, les définitions élémentaires que l'on donne pour ces diverses opérations. Ces définitions supposent essentiellement un système de référence *cartésien*, où les axes sont orthogonaux entre eux, et munis d'une même unité de longueur, que l'on suppose maintenue invariable dans tous les changements d'axes.

Le *gradient* est l'opération de dérivation partielle, appliquée à une grandeur scalaire  $V$ . On se donne la fonction  $V(x, y, z)$  des coordonnées, et l'on appelle « grad  $V$  » le vecteur  $\vec{F}$  ayant les composantes :

$$(iv. 1) \quad \vec{F} = \text{grad } V \quad F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

A partir de la fonction  $V$  on définit donc un *champ de vecteur* dans tout l'espace, puisque  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  dépendent des coordonnées  $x, y, z$ .

Nous avons déjà parlé de l'opérateur *rotationnel* au chapitre premier, § 3, et précisé le sens géométrique de cette opération : La circulation d'un vecteur  $\vec{A}$  le long d'un circuit fermé  $C$  est égale au flux d'un autre vecteur  $\vec{u}$ , au travers d'une surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $C$  (fig. iv. 1) ; la relation entre  $\vec{u}$  et  $\vec{A}$  s'écrit :

$$(iv. 2) \quad \vec{u} = \text{rot } \vec{A}$$

$$u_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad u_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad u_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Un vecteur gradient a toujours un rotationnel nul <sup>(1)</sup>. Dans les formules (iv. 2) remplaçons  $\vec{A}$  par  $\vec{F}$  tiré de (iv. 1) et nous trouvons :

$$(iv. 3) \quad u_x = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 0. \quad \text{rot grad } V = 0.$$

<sup>(1)</sup> G. BRUHAT. *Cours d'Electricité*, 3<sup>e</sup> éd., Masson, 1934, p. 7. — *Cours de mécanique physique*. Masson, 1934, p. 89.



La *divergence* d'un vecteur  $\vec{F}$  donne, pour ce vecteur, le flux qui sort de l'unité de volume ; en électrostatique, cette expression apparaît dans le théorème de Green <sup>(1)</sup> ; en hydrodynamique, elle fournit l'équation de continuité. L'exemple de l'hydrodynamique est le plus clair : étudions un fluide dont la densité  $\rho$  est une fonction des coordonnées  $x, y, z$  et du temps  $t$ . Les vitesses sont  $u, v, w$  et dépendent aussi de  $x, y, z, t$ . Dans un volume :

$$d\tau = dx dy dz ;$$

la masse de liquide qui pénètre pendant un temps  $dt$  est :

$$(iv. 4) \quad dm = - \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt.$$

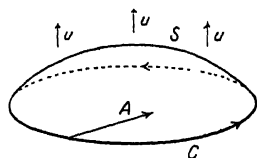


Fig. IV. 1.

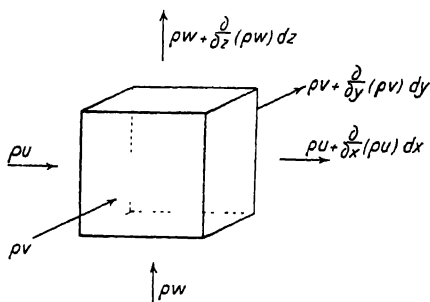


Fig. IV. 2.

Nous appelons *divergence* l'expression suivante :

$$(iv. 5) \quad \text{div}(\rho \vec{u}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}.$$

D'après la formule (iv. 4) nous pouvons remarquer que la *divergence* nous fournit une *densité scalaire* :

$$\frac{dm}{dt} = - \text{div}(\rho \vec{u}) \cdot d\tau$$

car la divergence, multipliée par un volume  $d\tau$  (capacité scalaire) nous donne un scalaire vrai  $\frac{dm}{dt}$ .

En outre, nous devons noter que l'opérateur divergence s'applique à une expression  $\rho \vec{u}$  qui est une *densité vectorielle* : produit d'une densité  $\rho$  par

<sup>(1)</sup> G. BRUHAT. *Cours d'Electricité*, 3<sup>e</sup> éd., Masson, 1934, p. 11.

un vecteur  $\vec{u}$ . En électrostatique, nous n'aurions pas aussi facilement reconnu ce caractère, dont nous verrons plus loin l'importance.

L'opérateur *laplacien*  $\Delta$  est une combinaison des précédents. C'est la divergence d'un vecteur défini comme le gradient d'un scalaire  $V$ .

$$(iv. 6) \quad \Delta = \operatorname{div} u \quad u = \operatorname{grad} V$$

$$\Delta V = \operatorname{div} (\operatorname{grad} V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Ces formules sous-entendent un facteur de densité  $\rho$  que l'on a arbitrairement pris égal à l'unité.

On voit apparaître le symbole  $\Delta$  dans un grand nombre de problèmes ; citons-en quelques-uns :

**Propagation des ondes dans un fluide** (G. Bruhat, *Cours de mécanique physique*, Masson, 1934, p. 536) :

$$(iv. 7) \quad \Delta \Psi - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0.$$

**Équation de Poisson, en électrostatique** (G. Bruhat, *Cours d'Electricité*, 3<sup>e</sup> éd., Masson, 1934, p. 27).

$$(iv. 8) \quad \Delta V = -4\pi\rho.$$

**Équation des ondes électromagnétiques** (G. Bruhat, *Cours d'Electricité*, 3<sup>e</sup> éd., Masson, 1934, p. 509).

$$(iv. 9) \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

On pourrait multiplier ces exemples à l'infini. Telles sont les opérations que nous allons avoir à transcrire. En géométrie vectorielle, nous pourrions définir les premiers opérateurs : *rot*, *grad* et *div*, mais ils s'appliqueront chacun à un type de tenseur bien déterminé. Pour le laplacien  $\Delta$ , la difficulté sera qu'un vecteur  $u$ , défini par un gradient, n'aura pas le type de variance nécessaire pour qu'on puisse lui appliquer l'opération de divergence. Les changements de variance ne seront possibles que lorsque nous aurons une métrique, et c'est alors seulement que nous pourrions définir le laplacien.

### III. — Nature des précautions à prendre.

La difficulté que nous allons rencontrer doit être tout d'abord expliquée, sans quoi le lecteur aurait quelque peine à saisir la raison de certains détours de raisonnement ; dans un espace vectoriel, nous avons pris grand soin de préciser qu'un *tenseur*  $t^{ik} \dots$  devait être défini comme *attaché à un certain point* de l'espace (chap. II, § 11). En effet, lors d'un changement de système de référence, entre axes curvilignes, les coefficients  $\alpha_m^k$  ou  $\beta_k^m$  de la transfor-

mation ne sont pas constants ; ils dépendent des coordonnées du point où on les envisage. La formule essentielle de définition d'un tenseur est la formule de transformation à laquelle il obéit (chap. II, § 6, éq. 34) ; dans celle-ci entrent un certain nombre des  $\alpha$  et  $\beta$ , qui doivent tous être pris avec leurs valeurs en un point déterminé.

Ainsi donc, un tenseur est défini en un point donné. Supposons connu un champ de tenseur, c'est-à-dire les valeurs du tenseur dans tout l'espace. Pourrions-nous former les dérivées partielles des composantes du tenseur ? Ici commencent les difficultés. Pour définir une dérivée partielle :

$$(iv. 10) \quad \frac{\partial}{\partial x^h} t^{ijk} \dots ;$$

nous devons comparer les valeurs de  $t^{ijk}$  en deux points voisins :

$$P \quad x^1 x^2 \dots x^h \dots x^r$$

et :

$$P' \quad x^1 x^2 \dots x^h + \delta x^h \dots x^r.$$

Appelons  $\delta t^{ijk}$  la différence des deux valeurs, nous écrivons :

$$\frac{d}{dx^h} t^{ijk} = \lim \frac{\delta t^{ijk}}{\delta x^h} = \lim \frac{t^{ijk}_{(P')} - t^{ijk}_{(P)}}{\delta x^h}.$$

Pour former la dérivée, il nous a fallu comparer les valeurs de notre tenseur  $t^{ijk}$  en deux points différents P et P' ; et nous avons pris l'accroissement numérique  $\delta t^{ijk}$  entre ces deux points. Une telle opération est dangereuse : nous avons posé comme règle absolue la nécessité de ne comparer que des grandeurs ayant même variance. Or, les valeurs d'un tenseur en deux points distincts n'ont pas la même variance ; les unes se transforment suivant les  $\alpha$  et  $\beta$  pris en P et les autres utilisent les  $\alpha'$  et  $\beta'$  pris au point P'. Ainsi donc, la dérivée partielle (iv. 10) n'est pas un tenseur ; en géométrie vectorielle nous ne saurons pas définir des dérivées partielles qui reprennent un caractère tensoriel. C'est seulement plus tard, après introduction d'un postulat de comparaison (affinité) et d'une métrique, que nous arriverons à former les dérivées covariantes, qui nous fourniront de véritables tenseurs.

Mais certaines combinaisons de dérivées retrouvent les propriétés tensorielles, d'une manière tout à fait générale. Les opérateurs dont nous avons déjà parlé sont justement de ce genre, et c'est ce qui leur confère un rôle très particulier.

#### IV. — Gradient et rotationnel.

Pour l'opérateur gradient, il n'y a aucune difficulté : nous pouvons toujours comparer la valeur de V en un point P et en un point voisin P' : nous prenons pour V un scalaire, c'est-à-dire une grandeur qui ne change pas de valeur lorsqu'on transforme les axes ; les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  n'entrent

pas en jeu, et la difficulté du paragraphe précédent disparaît. Nous pourrions écrire l'accroissement de  $V$ .

$$(iv. 11) \quad V(P') - V(P) = dV = \sum_k \frac{\partial V}{\partial x^k} dx^k.$$

Définissons donc un *vecteur covariant*  $u_k$  :

$$(iv. 12) \quad \vec{u} = \text{grad } V \quad u_k = \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

La formule (iv. 11) nous montre que la multiplication contractée  $\sum_k u_k dx^k$  fournit un scalaire  $dV$ , ce qui prouve la covariance de  $u_k$ .

Reprenons maintenant, sur un vecteur covariant, l'exposé des difficultés du paragraphe précédent : le vecteur  $a_i$  se transforme suivant les formules

$$(iv. 13) \quad a_i = \sum_m \beta_i^m \bar{a}_m \quad \bar{a}_m = \sum_i \alpha_m^i a_i$$

si le changement de système de référence est caractérisé par nos formules usuelles :

$$(iv. 14) \quad dx^k = \sum_m \alpha_m^k d\bar{x}^m \quad d\bar{x}^m = \sum_k \beta_k^m dx^k$$

$$\alpha_m^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \quad \beta_k^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k}.$$

Dans ces changements d'axes, il faudra toujours bien spécifier quelles variables indépendantes choisies : toutes les grandeurs seront considérées comme des fonctions des variables du même système d'axes :  $a_i$  est fonction des  $x^k$  et  $\bar{a}_m$  est fonction des  $\bar{x}^n$  ; aucune confusion ne doit être admise à ce point ; les dérivées partielles  $\alpha_m^k$  et  $\beta_k^m$  permettent de passer d'un groupe de variables à l'autre. Formons donc une dérivée telle que  $\frac{\partial a_i}{\partial x^k}$  et voyons comment elle se transforme :

$$(iv. 15) \quad \frac{\partial a_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sum_m \beta_i^m \bar{a}_m \right) = \sum_m \beta_i^m \left( \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x^k} \right) + \sum_n \bar{a}_m \frac{\partial \beta_i^m}{\partial x^k}$$

mais  $\bar{a}_m$  dépend des  $\bar{x}^n$  et pas directement des  $x^k$  ; nous devons donc exprimer ainsi la dérivée de  $\bar{a}_m$  :

$$\left( \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x^k} \right) = \sum_n \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k} = \sum_n \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial \bar{x}^n} \beta_k^n.$$

Quant-au dernier terme, la dérivée de  $\beta_i^m$  qui y figure doit s'écrire ainsi

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\beta_i^m) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^k \partial x^i}.$$

L'expression (iv. 15) représente donc le développement suivant :

$$(iv. 16) \quad \frac{\partial a_i}{\partial x^k} = \sum_{m,n} \sum \beta_i^m \beta_k^n \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial \bar{x}^n} + \sum_m \bar{a}_m \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^k \partial x^i}.$$

Le premier groupe de termes est très clair : s'il n'y avait que lui, nous reconnaitrions en  $\frac{\partial a_i}{\partial x^k}$  un tenseur covariant du 2<sup>e</sup> ordre, car la transformation d'un tel tenseur deux fois covariant fait intervenir un double produit des  $\beta$ . *Mais il y a le dernier terme* qui vient tout troubler.

Si nous nous limitons au cas des axes toujours rectilignes, nous n'aurions à envisager que des transformations utilisant des  $\alpha$  et  $\beta$  constants ; le dernier terme disparaîtrait. Cela correspond bien à ce que nous remarquons au paragraphe précédent, et au chapitre II, § 11. En axes rectilignes, rien n'empêche de définir un tenseur sans dire en quel point de l'espace il est appliqué. On peut parler de vecteurs ou tenseurs glissants. Mais si l'on passe en axes curvilignes, ces facilités disparaissent, et dans ce cas nos dérivées (iv. 16) ne sont plus du tout comparables à des tenseurs.

Néanmoins, nous pourrions former des combinaisons qui éliminent ces termes gênants : le dernier terme, qui apporte la *perturbation* dans la formule (iv. 16) est symétrique en  $i$  et  $k$ . Il nous suffira donc de former une combinaison antisymétrique des dérivées, et nous éliminerons ces termes perturbateurs. Echangeons  $i$  et  $k$  dans (iv. 16), et nous trouvons :

$$\frac{\partial a_k}{\partial x^i} = \sum_{m,n} \beta_k^m \beta_i^n \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial \bar{x}^n} + \sum_m \bar{a}_m \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Les indices  $m$  et  $n$  sont muets, ils nous servent seulement à indiquer une sommation sur toutes les variables ; nous pouvons aussi bien remplacer  $m$  par  $n$ , sans rien changer au résultat :

$$(iv. 17) \quad \frac{\partial a_k}{\partial x^i} = \sum_{mn} \beta_k^n \beta_i^m \frac{\partial \bar{a}^n}{\partial \bar{x}^m} + \sum_m \bar{a}_m \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Prenons alors la différence des deux dérivées (iv. 16 et 17) :

$$(iv. 18) \quad r_{ki} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} = \sum_{m,n} \beta_i^m \beta_k^n \left( \frac{\partial \bar{a}^m}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial \bar{a}^n}{\partial \bar{x}^m} \right) = \sum_{mn} \beta_i^m \beta_k^n r_{nm}.$$

Nous avons éliminé les facteurs  $\bar{a}_m \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^i \partial x^k}$  qui nous gênaient. L'opération (iv. 18) est celle du *rotationnel*. La formule nous prouve sans ambiguïté que le rotationnel est un vrai tenseur deux fois covariant ; d'autre part, son antisymétrie saute aux yeux.

La définition que nous venons de donner est valable dans un hyperspace à un nombre quelconque de dimensions ; nous n'avons pas eu besoin de préciser un sens de rotation des axes pour définir le rotationnel en tant que tenseur à deux indices covariants, mais cette hypothèse supplémentaire apparaîtra lorsque nous voudrions transformer ce tenseur antisymétrique en pseudo-tenseur.

## V. — Sens géométrique du rotationnel pour trois dimensions.

Dans un espace à trois dimensions  $x^1, x^2, x^3$  considérons un contour C et une surface s'appuyant sur ce contour. Nous pouvons choisir de nouvelles coordonnées  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ , de telle sorte que la surface S soit représentée par la condition :

$$(iv. 19) \quad \bar{x}^3 = C^{te}.$$

Un point de la surface S aura donc deux coordonnées variables seulement,  $\bar{x}^1$  et  $\bar{x}^2$ .

Nous voulons transformer l'intégrale I qui représente la circulation d'un vecteur  $a_k$  covariant le long du contour fermé C de la figure iv. 3 :

$$(iv. 20) \quad I = \oint_C (a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3) \\ = \oint_C (\bar{a}_1 d\bar{x}^1 + \bar{a}_2 d\bar{x}^2).$$

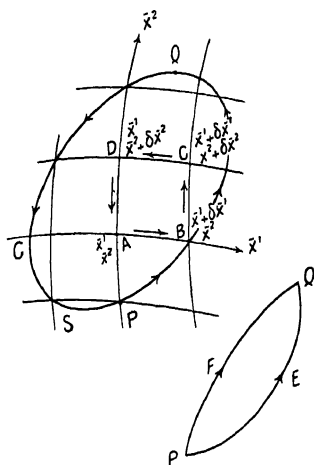


Fig. iv. 3.

En coordonnées  $\bar{x}$  nous n'avons plus que deux termes puisque  $d\bar{x}^3$  reste nul. La circulation le long du contour C fermé peut être représentée comme la somme des circulations le long de petits contours élémentaires ABCD, dont le quadrillage couvre la surface S. Sur ce contour ABCD nous avons :

$$\delta I = \bar{a}_1 \delta \bar{x}^1 + (\bar{a}_2 + \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial \bar{x}^1} \delta \bar{x}^1) \delta \bar{x}^2 - (\bar{a}_1 + \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \bar{x}^2} \delta \bar{x}^2) \delta \bar{x}^1 - \bar{a}_2 \delta \bar{x}^2$$

sections : AB

BC

CD

DA

ce qui se réduit à :

$$\delta I = \left( \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial \bar{x}^1} - \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \bar{x}^2} \right) \delta \bar{x}^1 \delta \bar{x}^2.$$

Faisons maintenant la somme pour tous les quadrilatères qui recouvrent la surface S et nous obtenons :

$$(iv. 21) \quad I = \iint_S \left( \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial \bar{x}^1} - \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \bar{x}^2} \right) \delta \bar{x}^1 \delta \bar{x}^2 = \iint_S \bar{r}_{12} \delta \bar{x}^1 \delta \bar{x}^2.$$

Nous voyons apparaître ici une des composantes du rotationnel  $\bar{r}_{12}$ . Les autres composantes sont absentes, parce qu'elles seraient multipliées par des éléments  $\delta \bar{x}^2 \delta \bar{x}^3$  ou  $\delta \bar{x}^3 \delta \bar{x}^1$ , qui se trouvent être nuls à cause du choix spécial de nos axes  $\bar{x}$ .

Revenons aux axes initiaux  $x^1, x^2, x^3$ . Nous savons comment se transforment les composantes du rotationnel  $r_{ij}$ , d'après les formules (iv. 18). Ici, c'est à l'opération inverse de (iv. 18) que nous devons recourir :

$$\frac{\partial \bar{a}_2}{\partial \bar{x}^1} - \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial \bar{x}^2} = \bar{r}_{12} = \sum_{i,j} \alpha_i^1 \alpha_j^2 r_{ij} \quad r_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}.$$

Portons cette expression dans l'intégrale (iv. 21) et nous trouvons :

$$(iv. 22) \quad I = \int \int_S \sum_{i,j} r_{ij} \alpha_i^1 \alpha_j^2 \delta \bar{x}^1 \delta \bar{x}^2 = \frac{1}{2} \int \int_S \sum_{i,j} r_{ij} (\alpha_i^1 \alpha_j^2 - \alpha_j^1 \alpha_i^2) \delta \bar{x}^1 \delta \bar{x}^2.$$

En effet,  $r_{ij}$  étant antisymétrique en  $i$  et  $j$  nous pouvons regrouper les termes en  $i, j$  et  $j, i$ , mais comme on rencontre toujours chaque terme 2 fois dans  $\sum_{i,j}$  il faut mettre un facteur  $\frac{1}{2}$ . Pour l'ordre des indices, dans ces formules de rotationnels, on se le rappellera aisément si l'on écrit la formule comme un produit vectoriel symbolique :

$$r_{ij} = \left[ \frac{\partial}{\partial x^j} \times a_j \right] = \frac{\partial}{\partial x^i} a_j - \frac{\partial}{\partial x^j} a_i.$$

Reportons-nous maintenant à la formule (iii. 41) qui nous sert de définition d'un élément de surface, nous voyons que la surface construite sur les deux déplacements  $\delta \bar{x}^1$  et  $\delta \bar{x}^2$  se projette sur les axes originaux  $x$  en donnant pour composantes :

$$(iv. 23) \quad ds^{ij} = (\alpha_i^1 \alpha_j^2 - \alpha_j^1 \alpha_i^2) \delta \bar{x}^1 \delta \bar{x}^2 = d\sigma_k \quad (ijk) = (1.2.3).$$

Ce sont ces éléments de surface que nous voyons apparaître en (iv. 22). Cette formule peut donc se résumer ainsi :

$$(iv. 24) \quad I = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int \int r_{ij} ds^{ij} = \sum_k \int \int \mathcal{R}^k d\sigma_k$$

$$r_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \mathcal{R}^k \quad (ijk) = (1.2.3).$$

C'est bien la formule fondamentale du rotationnel (fig. iv. 1) que nous retrouvons : l'intégrale  $I$  de circulation du vecteur  $a$  le long du contour  $C$  est égale au flux du rotationnel  $r$  au travers de la surface  $S$ .

Revenons maintenant aux notations de pseudo-vecteurs, introduites dans la formule (iv. 24). Nous avons insisté, à la fin du paragraphe précédent, sur le fait que le rotationnel  $r_{ij}$ , considéré comme un tenseur antisymétrique, s'obtenait automatiquement sans qu'on ait à préciser le sens de numérotage des axes ; mais lorsque nous voulons passer de ce tenseur antisymétrique  $r_{ij}$  à une *densité tensorielle*  $\mathcal{R}^k$  il nous faut, tout comme au chapitre III, §§ 6 à 8, faire explicitement une convention sur le sens des axes et préciser que les formules (iv. 23 et 24) ne sont valables, avec leur signe, que si  $i, j, k$  est une permutation paire de l'ordre fondamental choisi (de 1, 2, 3 par exemple).

En outre, dans la sommation (iv. 24) le facteur  $\frac{1}{2}$  disparaît, car il y a

6 termes dans la somme en  $i$  et  $j$  et 3 seulement dans la somme en  $k$  :

$$\Sigma_{ij} \text{ porte sur } i, j = 12, 21, 13, 31, 23, 32 \\ \text{et } k = 1, 2, 3.$$

Les termes  $ij = 12$  et  $21$  par exemple sont égaux, et ne comptent que dans le terme  $k = 3$  de la seconde somme.

Le produit de la densité tensorielle  $\mathcal{R}^k$  par la capacité tensorielle  $d\sigma_k$  (élément de surface) donne un scalaire vrai  $I$ , suivant notre schéma général (III. 42).

### VI. — *Le rotationnel, pour un nombre quelconque de dimensions.*

Ces résultats se généralisent pour un hyperspace à  $r$  dimensions. Nous prendrons un contour  $C$ , et une surface  $S$  à 2 dimensions s'appuyant sur ce contour ; nous choisirons alors des axes  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^r$  de telle sorte que la surface  $S$  soit représentée par les  $r - 2$  conditions :

$$(iv. 19 \text{ bis}) \quad \bar{x}^3 = C^{12} \quad \bar{x}^4 = C^{13} \quad \dots \quad \bar{x}^r = C^{12}$$

qui remplaceront l'unique condition (iv. 19). Ceci fait, tout le calcul en axes  $\bar{x}^k$  reste identique à celui que nous avons établi, en (iv. 20) et (iv. 21). Quand nous reviendrons aux axes originaux  $x^1 \dots x^r$ , la transformation (iv. 22) s'appliquera avec le seul fait nouveau que le nombre des termes sera plus élevé, et nous aboutirons à (iv. 24) :

$$(iv. 24 \text{ bis}) \quad I = \oint_C a_i dx^i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_S r_{ij} ds^{ij} \quad \text{avec} \quad r_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}$$

La circulation du vecteur  $a_i$  sur le contour fermé  $C$  se représente par l'intégrale du rotationnel sur une surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $C$ .

La différence entre 3 et  $r$  dimensions apparaîtra si nous voulons introduire des pseudo-tenseurs ; comme  $r_{ij}$  et  $ds^{ij}$  sont antisymétriques, nous pouvons appliquer la méthode générale du chapitre III, § 9 et introduire :

$$r_{ij} = (-1)^p \mathcal{R}^{klm} \quad \mathcal{R} \text{ étant une densité contravariante antisymétrique.} \\ ds^{ij} = (-1)^p d\sigma_{klm} \quad d\sigma, \text{ capacité covariante antisymétrique.}$$

Cette transformation n'offre plus maintenant grand intérêt puisqu'elle ne peut plus servir à diminuer le nombre des indices ; elle complique les formules au lieu de les simplifier.

*Lorsqu'un vecteur a un rotationnel nul, on peut le représenter comme u n gradient :* l'intégrale du vecteur  $a_i$  est alors nulle sur tout contour fermé ; sur le contour  $C$ , prenons 2 points  $P$  et  $Q$ . Si nous allons de  $P$  en  $Q$  par un trajet quelconque,  $PEQ$  ou  $PFQ$  (fig. iv. 3) nous obtenons toujours la même valeur de l'intégrale, puisque le circuit  $PEQFP$  donne zéro ; la for-



mule est donc intégrable ; donnons-nous une fonction  $V$ , qui soit nulle en  $P$ , nous pourrions lui assigner en  $Q$  une valeur :

$$(iv. 25) \quad V(Q) = \sum_i \int_P^Q a_i dx^i$$

d'où résultera :

$$a_i = \frac{\partial V}{\partial x^i} \quad a = \text{grad } V.$$

Le rotationnel d'un gradient est nul par suite de l'égalité des 2 dérivées secondes :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i}.$$

Nous avons présenté l'opération du rotationnel à propos d'un vecteur contravariant  $a_i$ , afin de ne pas alourdir trop les formules ; mais tout ce que nous avons dit aux paragraphes 4, 5 et 6 s'applique aussi bien à un tenseur  $t_i^m$  ayant en plus de l'indice covariant  $i$  un certain nombre d'indices  $l, m, n, \dots$  disposés en haut ou en bas.

## VII. — L'opération de divergence.

La divergence est une opération qui ne s'applique pas à un tenseur, mais à une *densité tensorielle*. Nous l'obtiendrons d'abord par un raisonnement géométrique, puis nous contrôlerons ce résultat par un calcul algébrique.

Prenons un champ de vecteurs  $u^i$  contravariants, que nous nous représenterons comme un champ de vitesses ; nous supposons l'hyperespace à  $r$  dimensions rempli d'un fluide, dont la densité en chaque point serait  $\alpha$  (densité scalaire), et nous chercherons le flux de matière au travers d'un domaine fermé  $D$  à  $r - 1$  dimensions, tracé dans notre hyperespace. S'il s'agissait de l'espace à 3 dimensions, notre domaine  $D$  serait une surface fermée. Nous allons supposer que les vitesses  $u^i$  déplacent les coordonnées du domaine  $D$  ; en un temps  $dt$ , un point de  $D$  se déplacera de  $u^i dt$  et viendra sur le domaine  $\bar{D}$  transporté en bloc.

C'est dire que nous envisageons un changement de coordonnées :

$$(iv. 26) \quad \bar{x}^i = x^i + u^i dt$$

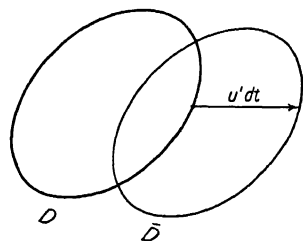


Fig. IV. 4.

$x^i$  représente la position initiale d'un point, et  $\bar{x}^i$  sa position finale. Le champ de vitesses  $u^i$  fait glisser tout le système d'axes et de surfaces au tra-

vers d'une matière fluide au repos, de densité  $\alpha$ . Dans le changement (iv. 26) nous trouvons pour les  $\alpha$  et  $\beta$  les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_m^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} = \delta_m^i - \frac{\partial u^i}{\partial \bar{x}^m} dt \\ \beta_i^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} = \delta_i^m + \frac{\partial u^m}{\partial x^i} dt \end{array} \right. \quad \delta_m^i = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & i = m \\ 0 & i \neq m \end{array} \right.$$

Le déterminant  $\Delta'$  des  $\beta_i^m$  va pouvoir se développer par rapport à  $dt$ , que nous supposons infiniment petit. En ne gardant que les termes du premier ordre en  $dt$ , il vient :

$$(iv. 27) \quad \Delta' = \frac{D(\bar{x}^1 \dots \bar{x}^r)}{D(x^1 \dots x^r)} = |\beta_i^m| = \left| \begin{array}{ccc} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^1} dt & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} dt & \frac{\partial u^1}{\partial x^3} dt \dots \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} dt & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} dt & \frac{\partial u^2}{\partial x^3} dt \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right|$$

$$\Delta' = 1 + \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} dt + \dots$$

Dès que nous prenons des termes en dehors de la diagonale, nous trouvons un produit  $dt^n$  d'ordre supérieur ou égal à 2 ; les seuls termes du premier ordre sont fournis par le produit des éléments diagonaux  $\Pi \left( 1 + \frac{\partial u^i}{\partial x^i} dt \right)$ , dont le développement en  $dt$  donne bien tout d'abord la forme (iv. 27) et ensuite des termes d'ordre plus élevé.

Par le déplacement infinitésimal (iv. 26), le domaine  $D$  est venu occuper la position voisine  $\bar{D}$ . Cherchons l'accroissement de la quantité de matière  $M$  contenue dans ce domaine :

$$(iv. 29) \quad M = \int_D \dots \int \alpha(x^i) d\tau \quad \bar{M} = \int_{\bar{D}} \dots \int \alpha(\bar{x}^i) d\bar{\tau}$$

$$dM = \bar{M} - M.$$

Dans l'intégrale  $\bar{M}$  nous pouvons remplacer  $d\bar{\tau}$  par son expression  $\Delta' d\tau$ , ce qui ramène le domaine d'intégration de  $\bar{D}$  en  $D$  :

$$(iv. 29) \quad dM = \int_D \dots \int [\alpha(x^i + u^i dt) \Delta' - \alpha(x^i)] d\tau.$$

La parenthèse représente une certaine densité scalaire  $\varpi dt$  car, multipliée par la capacité  $d\tau$  et intégrée, elle nous fournit un scalaire  $dM$ . Nous tirons donc de (iv. 29) la définition de cette densité scalaire :

$$\varpi dt = \alpha(x^i + u^i dt) [\Delta' - 1] + \alpha(x^i + u^i dt) - \alpha(x^i) ;$$

prenons  $\Delta'$  dans (iv. 27) et supprimons  $dt$ , partout en facteur :

$$(iv. 30) \quad \varpi = \alpha \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} u^i = \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} (\alpha u^i).$$

L'opération obtenue est la divergence de la *densité tensorielle* :

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \alpha u^i \\ \text{(iv. 31)} \quad \omega &= \text{Div } \alpha^i = \sum_i \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^i} \end{aligned} \quad \text{densité scalaire.}$$

Ce raisonnement géométrique fait très clairement ressortir le caractère de l'opération, et la nécessité d'y faire figurer des densités. C'est la transposition directe du calcul élémentaire rappelé dans la formule (iv. 5).

### VIII. — Confirmation algébrique du rôle de l'opérateur divergence.

Nous allons vérifier algébriquement la nature des grandeurs et le fait que la divergence fournit bien une densité scalaire. Partons d'une densité vectorielle contravariante  $\alpha^i$  absolument quelconque. Procédons à un changement d'axes arbitraire, la transformation s'écrit :

$$\text{(iv. 32)} \quad \alpha^i = \Delta^{-1} \sum_m \alpha_m^i \bar{\alpha}^m.$$

Les axes surlignés  $\bar{x}^m$  que nous introduisons ici sont tout à fait quelconques ; on ne les confondra pas avec les axes très particuliers utilisés au paragraphe précédent. Formons la divergence :

$$\omega = \sum_i \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^i} = \sum_{im} \frac{\partial}{\partial x^i} (\Delta^{-1} \alpha_m^i \bar{\alpha}^m) = \sum_{im} \beta_i^m \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} (\Delta^{-1} \alpha_m^i \bar{\alpha}^m)$$

au second membre, nous cherchons à faire apparaître des termes où les  $\bar{x}^m$  servent de variables indépendantes ; effectuons la dérivation en  $\bar{x}^i$ , nous trouvons :

$$\text{(iv. 33)} \quad \omega = \sum_{im} \left[ \beta_i^m \alpha_m^i \Delta^{-1} \frac{\partial \bar{\alpha}^m}{\partial \bar{x}^i} + \bar{\alpha}^m \beta_i^m \left( \Delta^{-1} \frac{\partial \alpha_m^i}{\partial \bar{x}^i} - \Delta^{-2} \alpha_m^i \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}^i} \right) \right].$$

Dans le premier terme, nous avons  $\sum_i \beta_i^m \alpha_m^i$  qui donne  $\delta_m^i$  en vertu de (ii. 22) ; appelons  $\mathcal{D}$  l'expression :

$$\text{(iv. 34)} \quad \mathcal{D} = \sum_m \frac{\partial \bar{\alpha}^m}{\partial \bar{x}^m}.$$

Si nous n'avions que ce premier terme, nous écririons :

$$\text{(iv. 35)} \quad \omega = \Delta^{-1} \mathcal{D}$$

ce qui nous prouverait la nature de la divergence  $\omega$ , puisque cette formule (iv. 35) représente la transformation classique d'une densité scalaire (cf. iii, 11 à 13).

Il nous faut donc montrer que les deux derniers termes de (iv. 33) se compensent, de sorte que l'expression  $\bar{a}_m$  ci-dessous soit exactement nulle :

$$\text{(iv. 36)} \quad \bar{a}_m = \Delta^{-1} \sum_i \beta_i^m \left[ \frac{\partial \alpha_m^i}{\partial \bar{x}^i} - \alpha_m^i \Delta^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}^i} \right]$$

Le déterminant  $\Delta$ , nous le savons, est celui qui est construit avec les éléments  $\alpha'_n$  :

$$\Delta = | \alpha'_n | \quad \alpha'_n = \frac{\partial x'}{\partial x^n}.$$

Nous avons pris soin de faire apparaître dans  $\bar{a}_m$  uniquement des grandeurs qui dépendent des  $\bar{x}^n$ , considérées comme variables indépendantes. Il nous faut expliciter la dérivée du déterminant  $\Delta$ . Rappelons que  $\Delta$ , une fois développé, est une somme de produits des  $\alpha'_n$ ; un terme  $\alpha'_n$  s'y trouve multiplié par son mineur, et celui-ci est tout simplement  $(\Delta \cdot \beta_j^n)$  d'après la définition des  $\beta$  (chap. II, § 3).

Pour prendre la dérivée, nous appliquons à tous ces produits la règle de dérivation des produits; il en résulte que la dérivée  $\frac{\partial}{\partial x^l} (\alpha'_n)$  se trouve multipliée par son mineur  $(\Delta \cdot \beta_j^n)$  et que la dérivée s'écrit :

$$(iv. 37) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x^l} = \sum_{j,n} \frac{\partial \alpha'_n}{\partial x^l} \cdot (\Delta \beta_j^n).$$

C'est la formule bien connue de dérivation des déterminants. Portons cette valeur dans (iv. 36), et nous trouvons :

$$\bar{a}_m = \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_{i,l} \beta_l^i \frac{\partial \alpha_m^i}{\partial x^l} - \sum_{i,j,n} \beta_j^i \beta_j^n \alpha_m^i \frac{\partial \alpha'_n}{\partial x^l} \right].$$

La somme en  $i$  sur  $\beta_l^i \alpha_m^i$  donne  $\delta_m^l$  :

$$(iv. 38) \quad \bar{a}_m = \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_l \beta_l^m \frac{\partial \alpha_m^l}{\partial x^l} - \sum_{j,n} \beta_j^m \frac{\partial \alpha_m^j}{\partial x^n} \right] = 0.$$

La compensation est complète, car dans le second terme, il me suffit de remplacer les indices muets  $j, n$  par  $i$  et  $l$ ; ensuite je remarque :

$$\frac{\partial \alpha_m^i}{\partial x^l} = \frac{\partial \alpha_l^i}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^l \partial x^m}.$$

Ce calcul est un peu délicat, mais on voit qu'on le mène à bout sans trop de difficulté, et qu'il nous confirme entièrement la nature de la divergence, qui est une densité scalaire (iv. 35).

### ***IX. — La divergence, appliquée à des densités tensorielles d'ordre supérieur à 1.***

On rencontre souvent des opérations qui ressemblent beaucoup à la divergence, mais qui jouent sur des densités tensorielles d'ordre 2, 3, etc. Il faut alors faire attention que ces opérateurs ne fournissent pas toujours une densité tensorielle, comme résultat final. L'opération de divergence ne devra donc être appliquée qu'avec précaution.

Si l'on part d'une densité tensorielle du 2<sup>e</sup> ordre  $\alpha^{\mu\nu}$  il est *indispensable*

qu'elle soit antisymétrique ; dans ce cas seulement, la divergence donne une densité du premier ordre. Formons, avec  $\mathcal{A}^{ij}$  et un vecteur covariant  $u_j$ , une densité du premier ordre  $\mathcal{B}^i$  :

$$(iv. 39) \quad \mathcal{B}^i = \sum_j \mathcal{A}^{ij} u_j$$

et appliquons à cette densité  $\mathcal{B}^i$  la divergence ; nous trouvons une densité scalaire :

$$(iv. 40) \quad \mathcal{O} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{B}^i}{\partial x^i} = \sum_{ij} \left[ u_j \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial x^i} + \mathcal{A}^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right].$$

Nous ne savons pas quel est le caractère de la dérivée  $\frac{\partial u_j}{\partial x^i}$  ; ce n'est en tous cas pas un tenseur ; la formule ci-dessus ne nous apprend donc rien de précis ; mais supposons que  $\mathcal{A}^{ij}$  soit antisymétrique, et groupons les termes en  $i, j$  et  $j, i$  ; un facteur  $\frac{1}{2}$  sera nécessaire si nous continuons à faire indépendamment les sommations sur  $i$  et  $j$  :

$$\mathcal{O} = \sum_{i,j} \left[ u_j \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial x^i} \right] + \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{A}^{ij} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \right).$$

Là nous voyons clair : le dernier terme est le produit d'une densité  $\mathcal{A}^{ij}$  par  $(\text{rot } u)_{ij}$ , qui est un tenseur vrai. Ce dernier terme fournit donc une densité scalaire ;  $\mathcal{O}$  est aussi une densité scalaire ; donc le terme restant est du même caractère. Ceci nous prouve que :

$$(iv. 41) \quad \text{Div } \mathcal{A}^{ij} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial x^i} = \mathcal{O}^{ij}$$

représente une densité tensorielle contravariante, pourvu que  $\mathcal{A}^{ij}$  soit antisymétrique.

Pour des densités  $\mathcal{A}^{ijk} \dots$  d'ordre supérieur, on raisonnerait de même pour voir dans quelles conditions leurs divergences permettent de retrouver des éléments tensoriels connus.

### X. — Exemples de divergences ; autre mode d'écriture.

Plaçons-nous dans un espace à 3 dimensions ; nous savons former une densité contravariante  $\mathcal{A}^i$  à partir d'un tenseur antisymétrique deux fois covariant  $a_{jk}$  ; nous posons :

$$(iv. 42) \quad \begin{aligned} a_{12} &= -a_{21} = \mathcal{A}^3 \\ a_{23} &= -a_{32} = \mathcal{A}^1 \\ a_{31} &= -a_{13} = \mathcal{A}^2. \end{aligned}$$

L'opération de divergence pourra s'écrire sur le tenseur antisymétrique lui-même :

$$(iv. 43) \quad \frac{\partial \mathcal{A}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathcal{A}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathcal{A}^3}{\partial x^3} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial a_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3}.$$

On rencontre parfois l'opération ainsi présentée ; le défaut de ce mode d'écriture, c'est qu'il ne se généralise pas simplement pour plus de 3 dimensions.

Pour 4 dimensions, nous avons remarqué qu'un tenseur antisymétrique  $f_{ij}$  nous permettait de définir une densité antisymétrique contravariante  $\mathcal{F}^{kl}$  (chap. III, § 10). Or une telle densité antisymétrique peut être soumise à la divergence, comme nous venons de le voir en (iv. 41) :

$$(iv. 44) \quad \omega^l = \frac{\partial}{\partial x^1} \mathcal{F}^{1l} + \frac{\partial}{\partial x^2} \mathcal{F}^{2l} + \frac{\partial}{\partial x^3} \mathcal{F}^{3l} + \frac{\partial}{\partial x^4} \mathcal{F}^{4l}$$

ce qui se transcrit ainsi :

$$(iv. 45) \quad \omega^l = \frac{\partial}{\partial x^1} f_{i_1 j_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} f_{i_2 j_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} f_{i_3 j_3} + \frac{\partial}{\partial x^4} f_{i_4 j_4}.$$

Notons que dans la formule (iv. 44) un des termes disparaît, car  $l$  est un des nombres 1, 2, 3, 4 et  $\mathcal{F}^{ll}$  est nul.

Les nombres  $i_1 j_1$ ,  $i_2 j_2$ , etc. seront choisis de telle sorte que  $1i_1 j_1$ ;  $2i_2 j_2$ , etc. soient des permutations paires de 1, 2, 3, 4. Prenons le cas  $l = 1$  :

$$(iv. 46) \quad \omega^1 = \frac{\partial}{\partial x^2} \mathcal{F}^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3} \mathcal{F}^{31} + \frac{\partial}{\partial x^4} \mathcal{F}^{41} = \frac{\partial}{\partial x^2} f_{43} + \frac{\partial}{\partial x^3} f_{24} + \frac{\partial}{\partial x^4} f_{32}.$$

On rencontre des formules de ce genre dans la théorie relativiste de l'électromagnétisme, puisque le champ électromagnétique se représente par un tenseur antisymétrique  $f_{ij}$ .

## CHAPITRE V

# POSTULAT DE TRANSPORT PARALLÈLE; DÉRIVÉE COVARIANTE EN GÉOMÉTRIE AFFINE

### *I. — Méthode de H. Weyl.*

On attend souvent d'avoir introduit une métrique pour parler des problèmes de transport parallèle d'un vecteur, et aborder la définition de la dérivée covariante. C'est peut-être raisonnable au point de vue du classement des difficultés, car l'exposé est plus simple en géométrie métrique. Ce que nous chercherons pourtant systématiquement, c'est à dissocier nettement les postulats qui sont indépendants les uns des autres; or, H. Weyl a montré que toute l'introduction des dérivées covariantes se poursuivait aisément sans qu'on ait besoin d'aucune métrique. Ensuite, on peut préciser comment le choix d'une métrique permet de définir simplement la dérivée covariante; mais il est important de se rappeler que ces deux questions sont jusqu'à un certain point indépendantes l'une de l'autre. Nous suivrons donc la méthode de H. Weyl, tout en recommandant au lecteur, s'il n'a pas l'habitude de ces questions, de passer sur ce chapitre lors d'une première étude; la question est délicate et ses applications ne se présentent guère qu'en relativité généralisée ou dans quelques problèmes d'élasticité en coordonnées curvilignes.

### *II. — Postulat de transport parallèle; connexion affine, coordonnées géodésiques.*

Rappelons quelques points essentiels des définitions que nous avons adoptées au chapitre II pour les espaces vectoriels, sans métrique. Nous nous étions tout d'abord bornés au cas des transformations linéaires à coefficients constants; c'est ce qu'on peut appeler aussi des changements d'axes toujours rectilignes. Dans ces conditions, nous pouvions définir un tenseur sans préciser à quel point de l'espace il était attaché; les dérivations des tenseurs donnaient donc automatiquement de nouveaux tenseurs.

Mais nous avons été très vite obligés d'étendre le cadre de transformations admissibles (chap. II, § 11) et d'introduire des changements entre axes curvilignes; les formules de transformation du tenseur sont toujours linéaires,

mais avec des coefficients ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) variables d'un point à un autre ; nous avons donc dû spécifier qu'un *tenseur est attaché à un point* de l'espace considéré. Avec ce point de vue, nous avons tout de même pu définir quelques opérations différentielles importantes, et dont le caractère tensoriel se laissait préciser sans autres hypothèses.

Nous allons maintenant introduire explicitement un *postulat nouveau* qui caractérise la géométrie affine, sans métrique. Nous établirons une correspondance, dans un domaine infiniment petit entourant un point P, de manière à pouvoir transporter des vecteurs et tenseurs parallèlement à eux-mêmes d'un point à un point voisin. Nous ne saurons pas effectuer un déplacement parallèle à distance finie. Nos formules ne seront valables que dans l'infiniment petit et ne pourront pas, en général, être intégrées ; néanmoins, ce postulat nouveau, avec la définition du parallélisme, nous rendra de grands services en nous permettant d'établir un type de *dérivée covariante*, qui transforme un tenseur en un autre tenseur, automatiquement.

Prenons un vecteur  $u^i(P)$  défini au point P, de coordonnées  $x^1, x^2, \dots, x^r$  ; nous voulons transporter ce vecteur en un point voisin  $P'(x^1 + \delta x^1 \dots x^r + \delta x^r)$  et définir d'une manière univoque mais *arbitraire* ce que nous appellerons vecteur transporté parallèle à  $u^i$ .

Nous ne pouvons, d'une manière générale, admettre comme définition l'égalité numérique des composantes, car une telle relation, si elle existait dans un certain système d'axes, ne serait plus satisfaite dans un autre. Supposons, par exemple, cette condition réalisée dans les axes  $\bar{x}^m$  et posons :

$$(v. 1) \quad \bar{u}^l(\bar{x}^m + \delta \bar{x}^m) = \bar{u}^l(\bar{x}^m).$$

Passons maintenant aux axes  $x^k$  au moyen de nos formules usuelles (iv. 13) :

$$u^i(x^k) = \sum_l \alpha_l^i(x^k) \bar{u}^l, \\ u^i(x^k + \delta x^k) = \sum_l \alpha_l^i(x^k + \delta x^k) \bar{u}^l = u^i(x^k) + \sum_{l,m} \frac{\partial \alpha_l^i}{\partial x^m} \delta x^m \bar{u}^l.$$

Revenons de  $\bar{u}^l$  et  $\delta \bar{x}^m$  à  $u^l$  et  $\delta x^k$ , et nous trouvons :

$$(v. 2) \quad u^i(x^k + \delta x^k) = u^i(x^k) + \sum_{l,m,j,k} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^l \partial x^m} \beta_k^m \beta_j^l u^j \delta x^k.$$

Nous avons remplacé  $\frac{\partial \alpha_l^i}{\partial x^m}$  par sa valeur  $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^l \partial x^m}$  pour bien faire ressortir la symétrie en  $l$  et  $m$ , qui se traduit par une symétrie en  $k$  et  $j$ . Notre formule finale prend donc l'aspect suivant :

$$(v. 3) \quad u^i(x^k + \delta x^k) = u^i(x^k) - \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i u^j \delta x^k \quad (\text{transport parallèle})$$

avec un coefficient  $\Gamma_{jk}^i$  à 3 indices, qui n'est absolument pas tensoriel puisque ces coefficients sont, par définition, à cheval sur 2 points voisins P et P' et non pas rattachés à un point unique ; nous admettrons la *symétrie* :

$$(v. 4) \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i.$$



Dans la formule (v. 2) l'expression du coefficient  $\Gamma$  était :

$$(v. 4 \text{ bis}) \quad \Gamma_{jk}^i = - \sum_{l,m} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^m} \beta_k^m \beta_j^l.$$

L'hypothèse (v. 4) de la symétrie des coefficients  $\Gamma$  est donc vérifiée sur l'exemple précédent ; c'est l'hypothèse de Levi-Civita. Néanmoins, cette condition n'a rien de nécessaire, et Cartan a étudié les espaces où l'on en fait abstraction. Nous l'introduisons ici tout de suite par mesure de simplification. Si l'on n'admet pas la symétrie des coefficients  $\Gamma$ , on obtient les *espaces de Cartan avec torsion*, espaces qui n'ont guère été utilisés en physique jusqu'à présent, mais qui semblent appelés à un rôle important.

Les formules (v. 3) nous donnent la condition de transport d'un vecteur  $u^i$ , parallèlement à lui-même, du point P ( $x^k$ ) en un point voisin P' ( $x^k + \delta x^k$ ) ; nous pouvons en tirer les variations des unités  $e_i$  le long des différents axes, car nous avons la relation vectorielle :

$$\vec{u} = \sum_i \vec{e}_i u^i$$

valable en P, avec les  $\vec{e}_i$  et en P' avec les  $\vec{e}_i + \delta \vec{e}_i$  et  $u^i + \delta u^i$  ; donc :

$$\sum_i \vec{e}_i \delta u^i + \sum_i \delta \vec{e}_i u^i = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned} \delta u^i &= - \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i u^j \delta x^k \\ \sum_i \vec{e}_i \delta u^i &= - \sum_{ijk} \Gamma_{jk}^i \vec{e}_i u^j \delta x^k = - \sum \delta \vec{e}_j u^j, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$(v. 5) \quad \delta \vec{e}_j = \sum_{ik} \Gamma_{jk}^i \vec{e}_i \delta x^k.$$

On appelle *système de coordonnées géodésiques* les coordonnées très particulières  $\bar{x}^m$  dans lesquelles la relation (v. 1) est valable, de sorte qu'un *transport parallèle infinitésimal ne change pas la valeur numérique des composantes d'un tenseur*, lorsque ces composantes sont prises par rapport aux coordonnées géodésiques.

Remarquons tout de suite qu'il existe une *infinité* de systèmes de *coordonnées géodésiques*. En effet, en partant des  $\bar{x}^m$  initiaux où valent les relations (v. 1), nous pouvons faire une substitution arbitraire à *coefficients constants*  $\alpha_i$ , et retrouver encore la même propriété. La formule (v. 2) se réduit en effet à la forme initiale (v. 1) si les  $\alpha_i$  sont constants.

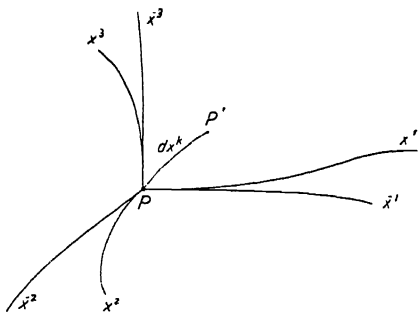


Fig. v. 1.

Nous sommes partis de l'hypothèse de l'existence de coordonnées géodésiques, pour aboutir à la formule (v. 3) du transport parallèle. Nous allons opérer maintenant en sens inverse, et admettre cette formule (v. 3); voyons comment on retrouve des coordonnées géodésiques (fig. v. 1). D'après ce que nous venons de dire, il y aura zéro ou une infinité de systèmes géodésiques. Nous pouvons donc particulariser l'orientation des axes, et supposer que les  $\bar{x}^m$  géodésiques ont mêmes directions que les axes  $x^i$ , ils n'en différeront que par la courbure de leurs lignes coordonnées. Nous simplifierons donc, en prenant, au point P :

$$(v. 6) \quad \alpha_i^i = \beta_i^i = \delta_i^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{si } i \neq l \end{cases}$$

ces conditions caractérisent la coïncidence de  $\bar{x}$  et  $x$  au point P. La formule (v. 4 bis) s'écrit alors :

$$(v. 7) \quad \Gamma_{lm}^i = - \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} = - \frac{\partial \alpha_i^i}{\partial \bar{x}^m} = - \frac{\partial \alpha_m^i}{\partial \bar{x}^l}$$

ce qui nous conduit à la transformation suivante :

$$(v. 8) \quad dx^i = \delta_i^i d\bar{x}^i - \frac{1}{2} \sum_{l,m} \Gamma_{lm}^i d\bar{x}^l d\bar{x}^m,$$

prenons en effet la dérivée de  $x^i$  par rapport à  $\bar{x}^l$ , et rappelons-nous que les sommations en  $l$  et  $m$  sont faites indépendamment, de sorte que chaque terme est répété deux fois; le facteur  $\frac{1}{2}$  disparaît ainsi et nous trouvons :

$$\alpha_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^i} = \delta_i^i - \sum_m \Gamma_{lm}^i d\bar{x}^m$$

$$\frac{\partial \alpha_i^i}{\partial \bar{x}^m} = - \Gamma_{lm}^i.$$

Les  $dx^i$  et les  $d\bar{x}^m$  sont des déplacements infiniment petits au voisinage du point P considéré; la relation (v. 6) est bien valable au point P lui-même, mais cesse dès qu'on s'en écarte un peu : les axes géodésiques  $\bar{x}^m$  sont tangents aux axes initiaux  $x^i$ , mais ont des courbures différentes.

### III. — Dérivée covariante d'un vecteur contravariant ou covariant.

A partir du moment où nous savons transporter un vecteur, parallèlement à lui-même, dans tout le voisinage d'un point P, nous saurons définir une dérivée qui soit un véritable tenseur covariant. Quand nous passons de P( $x^k$ ) en un point voisin P'( $x^k + \delta x^k$ ), le vecteur  $u^i$  transporté parallèlement est donné par la formule (v. 3); la valeur que prend, en fait, ce vecteur  $u^i$  diffère

ra de (v. 3); cet accroissement nous servira à définir un *accroissement vrai* ou *absolu*  $Du^i$  du vecteur :

$$\begin{aligned} Du^i &= u^i(x^k + \delta x^k) - u^i(x^k) \text{ d'après v. 3) } \\ \text{(v. 9)} \quad Du^i &= u^i(x^k + \delta x^k) - u^i(x^k) + \sum_j \Gamma_{jk}^i u^j \delta x^k. \end{aligned}$$

En prenant le rapport de l'accroissement vrai  $Du^i$  à la variation de  $x^k$  nous obtiendrons la dérivée covariante :

$$\text{(v. 9 bis)} \quad u_{,k}^i = \frac{Du^i}{Dx^k} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \sum_j \Gamma_{jk}^i u^j.$$

La notation différentielle avec les D rappelle les habitudes d'écriture usuelles des dérivées ; on se contente, le plus souvent, d'ajouter un indice inférieur  $k$ , précédé d'une virgule, comme je l'ai indiqué en (v. 9 bis). Nous conserverons pour le moment les écritures différentielles, qui font mieux ressortir le parallélisme de nos nouvelles dérivées avec celles dont nous connaissons l'usage ; Cartan emploie la notation  $D_k u^i$  pour la dérivée  $\frac{Du^i}{Dx^k}$  ou  $u_{,k}^i$ .

Nous avons formé la dérivée d'un vecteur contravariant  $u^i$ , mais que ferons-nous pour un vecteur covariant  $v_j$  ? Nous adopterons une règle analogue, en posant :

$$\text{(v. 10)} \quad Dv_j = v_j(x^k + \delta x^k) - v_j(x^k) + \sum_{hk} B_{jk}^h v_h \delta x^k.$$

$Dv_j$  sera l'accroissement vrai du vecteur covariant ; le *transport parallèle* correspond à :

$$Dv_j = 0.$$

La dérivée covariante sera donc :

$$\text{(v. 11)} \quad v_{j,k} = \frac{Dv_j}{Dx^k} = \frac{\partial v_j}{\partial x^k} + \sum_h B_{jk}^h v_h.$$

Les B vont se ramener immédiatement aux  $\Gamma$  qui figurent dans les formules des vecteurs contravariants ; nous utiliserons le fait qu'un produit contracté  $\sum u^i v_i$  est un vrai scalaire. Or, la dérivée d'un scalaire a un sens absolu, et ne nécessite aucun terme de correction (chap. IV, § 4) ; c'est un gradient simple. Nous devons donc poser :

$$\text{(v. 12)} \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (\sum u^i v_i) = \frac{D}{Dx^k} (\sum u^i v_i).$$

Les termes en B et en  $\Gamma$  dans les dérivées covariantes devront se compenser ; or, nous trouvons :

$$\sum_i \frac{D}{Dx^k} (u^i v_i) = \sum_i \left[ \frac{\partial u^i}{\partial x^k} v_i + u^i \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + v_i \sum_j \Gamma_{jk}^i u^j + u^i \sum_h B_{ik}^h v_h \right].$$

Tous les indices  $i, j, h$  sont muets, et ne servent qu'à établir des somma-

tions ; nous pouvons donc les changer de nom ; dans le dernier terme, nous remplacerons  $i$  par  $j$  et  $h$  par  $i$  ; cela nous donne :

$$\sum_i \frac{D}{Dx^k} (u^i v_i) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^k} (u^i v_i) + \sum_{i,j} u^j v_i (\Gamma_{jk}^i + B_{jk}^i).$$

Nous voyons donc que pour réaliser, d'une manière absolue, la condition (v. 12) nous devons poser :

$$(v. 13) \quad B_{jk}^i = -\Gamma_{jk}^i$$

de sorte que la dérivation d'un vecteur covariant s'écrive :

$$(v. 14) \quad v_{j,k} = \frac{Dv_j}{Dx^k} = \frac{\partial v_j}{\partial x^k} - \sum_i \Gamma_{jk}^i v_i.$$

Nous voilà donc en possession de deux formules essentielles de la géométrie affine, et nous savons comment prendre des dérivées de vecteurs contravariants (v. 9) ou covariants (v. 14). Nous allons voir comment ces formules s'étendent automatiquement à tous les cas de tenseurs ou pseudo-tenseurs.

Remarquons tout d'abord que la symétrie de  $\Gamma_{jk}^i$  en  $j$  et  $k$  nous assure la formule simple du rotationnel :

$$(v. 15) \quad \frac{Dv_j}{Dx^k} - \frac{Dv_k}{Dx^j} = \frac{\partial v_j}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^j}.$$

#### IV. — Dérivée covariante d'un tenseur quelconque.

Un tenseur comportera un certain nombre d'indices covariants et contravariants ; sa formule de dérivation ne devra dépendre que de ces positions des indices et pas des propriétés particulières du tenseur. Pour voir comment s'établit la formule de dérivation, le plus simple consiste à former avec des vecteurs un tenseur arbitraire de même variance, et d'écrire la dérivée de ce produit de vecteur ; on en déduira très rapidement la dérivée du tenseur. Rappelons tout d'abord que nos dérivées tensorielles covariantes satisfont à la règle de dérivation des produits :

$$(v. 16) \quad \frac{D}{Dx^k} (uv) = u \frac{Dv}{Dx^k} + \frac{Du}{Dx^k} \cdot v$$

quels que soient les tenseurs  $u$  et  $v$ .

Cherchons maintenant la dérivée d'un tenseur  $t_j^i$  mixte ; nous le comparerons à un produit  $u^i v_j$  de deux vecteurs et nous écrirons :

$$(v. 17) \quad \begin{aligned} \frac{D}{Dx^k} (u^i v_j) &= u^i \frac{Dv_j}{Dx^k} + v_j \frac{Du^i}{Dx^k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} (u^i v_j) + \sum_h (\Gamma_{hk}^i u^h v_j - \Gamma_{jk}^h u^i v_h) \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à poser :

$$(v. 18) \quad \frac{Dt_j^i}{Dx^k} = \frac{\partial t_j^i}{\partial x^k} + \sum_h (\Gamma_{hk}^i t_j^h - \Gamma_{jk}^h t_h^i)$$

on continuerait ainsi pour un tenseur d'ordre quelconque.

Cette méthode est la plus directe; on peut aussi procéder autrement, et partir du tenseur  $t_j^i$  pour former un invariant au moyen de deux vecteurs arbitraires  $a^j$  et  $b_i$ ; on aura donc un scalaire :

$$(v. 19) \quad S = \sum_{ij} t_j^i a^j b_i.$$

Pour ce scalaire  $S$ , la dérivée covariante doit se réduire à la dérivée ordinaire; tous les termes correctifs en  $\Gamma$  doivent donc se compenser; écrivons cette dérivée :

$$(v. 20) \quad \begin{aligned} \frac{DS}{Dx^k} &= \sum_{ij} \left[ \frac{Dt_j^i}{Dx^k} \cdot a^j b_i + t_j^i \frac{D}{Dx^k} (a^j b_i) \right] \\ &= \frac{\partial S}{\partial x^k} = \sum_{ij} \left[ \frac{\partial t_j^i}{\partial x^k} a^j b_i + t_j^i \frac{\partial}{\partial x^k} (a^j b_i) \right]. \end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions, nous obtenons :

$$\sum_{ij} a^j b_i \left[ \frac{Dt_j^i}{Dx^k} - \frac{\partial t_j^i}{\partial x^k} \right] + \sum_{ij} t_j^i \left[ \frac{D(a^j b_i)}{Dx^k} - \frac{\partial(a^j b_i)}{\partial x^k} \right] = 0$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{ij} a^j b_i \left[ \frac{Dt_j^i}{Dx^k} - \frac{\partial t_j^i}{\partial x^k} \right] + \sum_{ijh} t_j^i [\Gamma_{hk}^j a^h b_i - \Gamma_{ik}^h a^j b_h] = 0.$$

Les indices  $i, j$  et  $h$  étant muets, nous pouvons les changer de nom arbitrairement; dans les deux derniers termes, nous allons nous arranger pour faire apparaître les produits  $a^j b_i$ ; donc nous changerons :

$$\begin{array}{ll} h \text{ en } j \text{ et } j \text{ en } h & \text{dans l'avant-dernier terme,} \\ h \text{ en } i \text{ et } i \text{ en } h & \text{dans le dernier.} \end{array}$$

En facteur de  $a^j b_i$ , nous retrouvons alors l'expression (v. 18).

Le calcul de (v. 18) me semble plus direct et plus facile à se rappeler que celui-ci. La règle générale de formation de la dérivée covariante peut s'expliquer ainsi : à la dérivée ordinaire on ajoute autant de termes correctifs  $\pm \Gamma t$  qu'il y a d'indices sur le tenseur  $t$ ; pour chaque terme, il y a une sommation sur un indice muet; le signe est  $+$  s'il s'agit d'un indice contravariant de  $t$  (placé en haut) et  $-$  s'il s'agit d'un indice covariant (en bas) du tenseur  $t$ .

Sur les tenseurs  $t$ , il faut respecter la place des indices, mais la symétrie des  $\Gamma$ , pour leurs indices inférieurs, permet de les placer là dans un ordre arbitraire.

Les exemples suivants confirment cette règle :

$$\begin{aligned} t_k^j &= \frac{Dt^j}{Dx^k} = \frac{\partial t^j}{\partial x^k} + \sum_k \left[ t^{ih} \Gamma_{kh}^j + t^h \Gamma_{kh}^i \right] \\ t_{ij,k} &= \frac{Dt_{ij}}{Dx^k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^k} - \sum_h \left[ t^{hk} \Gamma_{kj}^h + t_{hj} \Gamma_{ki}^h \right] \end{aligned}$$

## V. — Dérivées covariantes des pseudo-tenseurs.

Nous commencerons par les *densités tensorielles*, pour lesquelles nous possédons un point de départ simple, qui est la *formule de divergence*. Nous avons, en effet, donné une démonstration directe (iv, § 7) d'où ressort l'absence de tout terme correctif, ce qui nous aidera beaucoup.

Cherchons la dérivée covariante d'une *densité scalaire*  $\mathcal{A}$ . Au moyen d'un vecteur arbitraire  $u^k$  nous formons une densité contravariante :

$$(v. 21) \quad \mathcal{A}^k = \mathcal{A} u^k$$

dont nous prenons la divergence :

$$(v. 22) \quad \sum_k \frac{\partial \mathcal{A}^k}{\partial x^k} = \mathcal{B} = \sum_k \left[ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^k} u^k + \mathcal{A} \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right]$$

ce qui nous fournit une nouvelle densité scalaire  $\mathcal{B}$ .

Pour simplifier la discussion, admettons que le vecteur  $u^k$  soit *stationnaire*, ce qui signifie :

$$(v. 23) \quad \frac{D u^i}{D x^k} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \sum_h \Gamma_{kh}^i u^h = 0.$$

Une telle hypothèse ne restreint en rien la généralité du vecteur  $u^k$  arbitraire, mais limite ses dérivées partielles ; nous tirons de cette équation les valeurs des  $\frac{\partial u^k}{\partial x^k}$  que nous portons dans (v. 22) ; et nous échangeons ensuite les indices muets  $k$  et  $h$  :

$$(v. 24) \quad \mathcal{B} = \sum_{kh} \left[ u^k \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^k} - \mathcal{A} \Gamma_{kh}^k u^h \right] = \sum_k u^k \left[ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^k} - \sum_h \mathcal{A} \Gamma_{hk}^h \right].$$

Cette relation nous montre que la quantité entre crochets, multipliée par un vecteur arbitraire  $u^k$  donne une densité scalaire ; ce crochet est donc une densité covariante, que nous prendrons pour définition de la dérivée covariante de la densité scalaire  $\mathcal{A}$ .

$$(v. 25) \quad \frac{D \mathcal{A}}{D x^k} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^k} - \mathcal{A} \sum_h \Gamma_{hk}^h \quad \mathcal{A}, \text{ densité scalaire.}$$

À partir du moment où nous savons dériver une densité scalaire, nous pouvons former la dérivée d'une densité tensorielle quelconque. Nous procéderons comme au paragraphe précédent, et pour trouver la dérivée d'une densité  $\mathcal{O}_{jk}^i$  nous étudierons un produit  $\mathcal{A} u^i v_j w_k$  dont tous les termes séparés nous sont connus. Ainsi, les équations (v. 9 et 25) nous donnent aisément :

$$(v. 26) \quad \frac{D}{D x^k} (\mathcal{A} u^i) = \frac{\partial}{\partial x^k} (\mathcal{A} u^i) - (\mathcal{A} u^i) \sum_h \Gamma_{kh}^h + \sum_j (\mathcal{A} u^j) \Gamma_{kj}^i.$$

Remplaçons  $\mathcal{A} u^i$  par une densité vectorielle  $\mathcal{A}^i$  et la formule s'applique sans changement.

Il n'est peut-être pas inutile de remonter à la définition même d'une densité scalaire, et de vérifier qu'on retrouve bien la formule (v. 25) ; il s'agit,

en effet, d'une expression très importante pour toutes les applications. Prenons  $r$  vecteurs indépendants, que nous noterons  $^1a, ^2a, ^3a, \dots, ^ra$ ; l'indice de gauche est un simple numérotage sans aucun caractère de variance. Supposons ces vecteurs covariants et formons le déterminant :

$$(v. 27) \quad \alpha = \begin{vmatrix} ^1a_1 & ^1a_2 & \dots & ^1a_r \\ ^2a_1 & ^2a_2 & \dots & ^2a_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ^ra_1 & ^ra_2 & \dots & ^ra_r \end{vmatrix} = |^1a_j|.$$

L'ordre fondamental des indices étant  $1, 2 \dots r$ , ce déterminant est une des composantes d'un tenseur à  $r$  indices complètement antisymétrique. Cette composante spéciale nous sert à définir la *densité scalaire*  $\alpha$ . Nous appellerons  $A_i^j$  le mineur de  $^1a_j$ , de sorte que nous aurons les relations suivantes :

$$(v. 28) \quad \sum_i ^1a_j A_i^j = \alpha \delta_i^j = \begin{cases} \alpha & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La formule représente le développement du déterminant  $\alpha$  par rapport à la  $j^{\text{ème}}$  colonne. Le déterminant, une fois développé, est une somme de produits de facteurs  $^1a_j$ ; dans chacun des produits, nous devons prendre la dérivée, suivant la règle usuelle. Au total, la dérivée  $\frac{\partial}{\partial x^k} (^1a_j)$  va se présenter comme multipliée par un facteur  $A_i^j$ , qui n'est autre que le mineur; la dérivée du déterminant, c'est donc :

$$(v. 29) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} = \sum_{j,i} A_i^j \frac{\partial}{\partial x^k} (^1a_j).$$

La même règle sera valable pour la dérivée covariante  $\frac{D}{Dx^k}$ ; donc :

$$(v. 30) \quad \begin{aligned} \frac{D\alpha}{Dx^k} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} + \sum_{j,i} A_i^j \left[ \frac{D(^1a_j)}{Dx^k} - \frac{\partial (^1a_j)}{\partial x^k} \right] \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} - \sum_{j,i,k} A_i^j \Gamma_{jk}^i (^1a_i) \end{aligned}$$

car la formule (v. 14) s'applique au vecteur covariant  $^1a_j$ . La somme en  $i$  se fait suivant la règle (v. 28), de sorte que nous retrouvons :

$$\frac{D\alpha}{Dx^k} = \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} - \alpha \sum_i \Gamma_{ik}^i$$

c'est bien la formule (v. 25).

Que dirons-nous maintenant sur les *capacités*? Une capacité scalaire  $\tau$  peut se bâtir au moyen d'un déterminant semblable à (v. 27) mais contenant des vecteurs contravariants. Le même raisonnement s'appliquerait très directement et nous donnerait :

$$(v. 31) \quad \frac{D\tau}{Dx^k} = \frac{\partial \tau}{\partial x^k} + \tau \sum_i \Gamma_{ik}^i$$

On retrouve le même résultat en se rappelant que le produit  $\alpha\tau$  d'une den-

sité  $\alpha$  par une capacité  $\tau$  fournit un scalaire pur, dont la dérivée ne contient aucun terme correctif :

$$(v. 32) \quad \frac{D(\alpha\tau)}{Dx^k} = \frac{\partial(\alpha\tau)}{\partial x^k}.$$

Nous savons donc maintenant former les dérivées covariantes de tenseurs ou pseudo-tenseurs quelconques.

### VI. — Remarques sur les divergences de densités tensorielles d'ordre quelconque.

Nous avons indiqué (chap. IV, § 9), les précautions à prendre, pour appliquer l'opération de divergence à des densités tensorielles d'ordre supérieur. Les formules que nous venons d'établir confirment ces remarques. Prenons d'abord une densité contravariante, et appliquons la relation (v. 26).

$$(v. 33) \quad \sum_i \frac{D\alpha^i}{Dx^i} = \sum_i \frac{\partial\alpha^i}{\partial x^i}$$

les deux derniers termes  $-\sum_{ih}\alpha^i\Gamma_{ih}^h + \sum_{ij}\alpha^i\Gamma_{ij}^i$  se compensent, puisqu'ils ne

diffèrent que par le nom des indices muets. Passons maintenant à une densité deux fois contravariante  $\alpha^{ij}$ ; sa formule de dérivation sera du type (v. 26), avec un terme de plus :

$$(v. 34) \quad \frac{D\alpha^{ij}}{Dx^k} = \frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x^k} - \alpha^{ij}\sum_h\Gamma_{kh}^h + \sum_h[\alpha^{ih}\Gamma_{kh}^j + \alpha^{hj}\Gamma_{kh}^i].$$

La divergence donnera :

$$\sum_i \frac{D\alpha^{ij}}{Dx^i} = \sum_i \frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x^i} + \sum_{ih}[-\alpha^{ij}\Gamma_{ih}^h + \alpha^{ih}\Gamma_{ih}^j + \alpha^{hj}\Gamma_{ih}^i]$$

les indices  $i, j, h$  sont muets et les  $\Gamma$  sont symétriques. Nous allons échanger les noms des indices dans le dernier terme ; nous remplacerons  $i$ , par  $h$  et  $h$  par  $i$  ; dans ces conditions ce dernier terme compense le premier et il reste :

$$(v. 35) \quad \sum_i \frac{D\alpha^{ij}}{Dx^i} = \sum_i \frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x^i} + \sum_{ih}\alpha^{ih}\Gamma_{ih}^j.$$

La divergence d'une densité tensorielle deux fois contravariante ne se réduit donc pas, en général, à la somme des dérivées ordinaires de cette densité ; mais ce cas sera réalisé si la densité  $\alpha^{ih}$  est antisymétrique, car alors les termes de la dernière somme se compenseront deux à deux :

$$(v. 36) \quad \alpha^{ih} = -\alpha^{hi} \quad \alpha^{ih}\Gamma_{ih}^j + \alpha^{hi}\Gamma_{ih}^j = 0.$$



Nous aurons de nouveau la formule simple :

$$(v. 37) \quad \sum_i \frac{D\alpha^i}{Dx^i} = \sum_i \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^i} = \text{Div } \alpha^i.$$

C'est bien cette nécessité de l'antisymétrie de  $\alpha^i$  que nous avons constatée par un raisonnement direct (chap. IV, § 9).

## VII. — Dérivée absolue d'un vecteur. Lignes géodésiques.

Étudions le mouvement, dans l'hyperespace à  $r$  dimensions, d'un point mobile ; nous nous donnerons, par exemple, les coordonnées  $x^k(t)$  du point comme des fonctions du temps  $t$ . Le point mobile peut déplacer avec lui un certain vecteur  $u^i$  contravariant ; quelle sera la variation vraie de ce vecteur, en fonction du temps ? Nous devons prendre garde aux termes de correction pour transport parallèle, qui entreront là comme dans la dérivée covariante ; nous formerons :

$$(v. 38) \quad \dot{u}^i = \frac{Du^i}{Dt} = \frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{hk} \Gamma_{hk}^i u^h \frac{dx^k}{dt}.$$

Cette expression représente bien la dérivée de  $u^i$  par rapport au temps ; si  $\dot{u}^i$  est nul, le mouvement du point mobile ne s'accompagne d'aucune variation du vecteur  $u^i$  transporté ; l'accroissement  $Du^i$  (équ. v. 9) est nul ; le vecteur  $u^i$  a été simplement transféré parallèlement d'un point à un autre. L'expression (v. 38) sera appelée *dérivée absolue* du vecteur  $u^i$ .

Dans ce mouvement d'un point mobile, il y a un vecteur particulièrement important à considérer, c'est la *vitesse* du point mobile :

$$(v. 39) \quad u^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

La variation de cette vitesse se définira d'après la formule (v. 38) qui nous donne :

$$(v. 40) \quad \dot{u}^i = \frac{Du^i}{Dt} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{hk} \Gamma_{hk}^i \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt}.$$

Cette dérivée représente l'*accélération absolue véritable* du point mobile ; son expression ne dépend pas du choix d'axes particuliers envisagés. Un mouvement à vitesse constante s'obtiendra en posant  $\dot{u}^i$  égal à zéro :

$$(v. 41) \quad \dot{u}^i = \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{hk} \Gamma_{hk}^i \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad \text{géodésique.}$$

Ce mouvement à vitesse constante nous définit un petit segment de ligne droite ; le raccord, de proche en proche, de ces petits segments rectilignes donne une *ligne géodésique*.

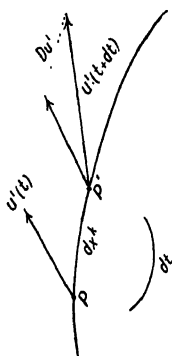


Fig. v. 2.

**VIII. — Le transport d'une quantité à distance finie, et les conditions d'intégrabilité.**

Nous savons transporter, d'un point  $P$  de l'espace à un point voisin  $P'$ , diverses grandeurs : pour un scalaire  $a$ , nous devons seulement comparer les valeurs numériques  $a$  et  $a'$  en  $P$  et  $P'$ ; pour un vecteur ou un tenseur, les postulats de transport parallèle nous ont fourni une définition complète.

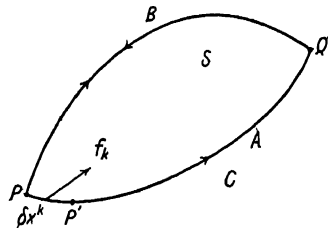


Fig. v. 3.

Cette définition permet un transport dans le voisinage immédiat du point  $P$  initial. Que se passe-t-il lorsque nous essayons de l'étendre de proche en proche? Prenons tout d'abord le cas d'un scalaire; au point  $P$ , ce scalaire  $a$  a une certaine valeur  $a$ ; au point voisin  $P'$  nous trouvons une valeur  $a'$  un peu différente; soient  $\delta x^k$  les composantes du vecteur  $PP'$ ; la variation de  $a$  sera proportionnée aux composantes  $\delta x^k$  du déplacement et nous poserons :

$$(v. 42) \quad \delta a = \sum_k f_k \delta x^k.$$

La formule de variation définit un certain vecteur covariant  $f_k$ ; suivons maintenant un trajet  $PP'AQ$  (fig. v. 3), jusqu'à un point  $Q$  assez distant; nous arrivons en  $Q$  avec une valeur  $a_Q$  qui se calcule par l'intégrale :

$$(v. 43) \quad a_Q = a_P + \sum_k \int_{PP'AQ} f_k dx^k.$$

L'intégrale représente le travail du vecteur  $f_k$  (équivalent à une force) sur le trajet  $PP'AQ$ .

Allons ensuite de  $P$  en  $Q$  par un autre chemin  $PBQ$ ; rien ne nous assure que nous arriverons au point  $Q$  avec la même valeur que précédemment :

$$a_Q = a_P + \int_{PBQ} f_k dx^k.$$

La différence des deux valeurs est donnée par l'intégrale prise sur le circuit fermé  $C$  ( $PAQBP$ ) :

$$(v. 44) \quad a_Q - a'_Q = \sum_k \oint_C f_k dx^k = \frac{1}{2} \sum_{kh} \int_S r_{kh} ds^{kh}.$$

Nous sommes ramenés au problème discuté au chapitre IV, §§ 5 et 6. L'intégrale de circulation de  $f_k$  le long du contour fermé  $C$  est égale à l'intégrale de surface du rotationnel (eq. iv. 24 bis) sur une surface s'appuyant sur  $C$ ; si le rotationnel n'est pas nul, la grandeur  $a$  n'est pas intégrable; la différence  $a_Q - a_P$  de (v. 43) sera différente pour chaque chemin d'intégration; mais si le rotationnel est nul, tous les contours  $C$  fermés donnent une circu-

lation totale nulle ; la différence  $a_Q - a_P$  de (v. 43) a une valeur bien définie indépendante du chemin d'intégration, et nous pouvons donner à  $a$  une valeur unique en chaque point de l'espace entier ; le vecteur  $f_k$  est alors un gradient (cf. iv. 25).

$$(v. 45) \quad f_k = \frac{\partial a}{\partial x^k}.$$

Nous devons donc *distinguer deux cas parmi les scalaires*. La variation d'un scalaire  $a$ , dans l'infiniment petit, est régie par un champ de vecteurs  $f_k$  ; si ce champ de vecteurs a un rotationnel nul :

$$(v. 46) \quad r_{kh} = \frac{\partial f_h}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^h} = 0$$

nous pouvons comparer les valeurs de  $a$  à toute distance, et définir  $a$  comme une fonction univoque  $a(x')$  des coordonnées ; si le rotationnel n'est pas nul, la grandeur  $a$  n'est pas intégrable ; la comparaison ne peut se faire que dans l'infiniment petit, au voisinage immédiat du point  $P$  et ne peut être étendue plus loin d'une manière univoque.

Nous avons jusqu'à présent défini un *scalaire en un point  $P$*  par la condition que ce scalaire devait être invariant à tous les changements de coordonnées ; les remarques précédentes étaient indispensables pour préciser la manière de définir le transport d'un scalaire d'un point à un autre de l'espace.

Nous avons pris, pour simplifier la discussion, l'exemple du transport d'un scalaire  $a$  et de son intégrabilité ; les mêmes problèmes vont se poser à propos du transport d'un vecteur ou d'un tenseur ; la définition et le rôle du rotationnel étant les mêmes dans tous les cas (cf. chap. IV, fin du § 6), nous allons retrouver des opérations analogues, où figurera le rotationnel d'une expression à plusieurs indices, dont un covariant.

### IX. — Transport d'un tenseur à distance, cas d'intégrabilité.

En un point  $P$  de l'espace, prenons un vecteur  $u^i$ , et transportons-le parallèlement à lui-même en un point voisin  $P'$  ; la condition de parallélisme s'écrit (v. 3 ou v. 9) :

$$Du^i = du^i + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i u^j dx^k = 0.$$

Les variations vraies  $Du^i$  des composantes  $u^i$  sont nulles, ce qui oblige à admettre des variations  $du^i$  des composantes mesurées localement en  $P$  ou  $P'$  :

$$(v. 47) \quad du^i = - \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i u^j dx^k = \sum_k f_k^i / x^k,$$

avec :

$$f_k^i = - \sum_j \Gamma_{jk}^i u^j.$$

Effectuons un transport le long d'un circuit fermé  $C$ , comme nous l'avons fait sur la figure (v. 3) du paragraphe précédent, et formons l'intégrale de  $du^i$  le long de ce trajet ; cette intégrale de ligne se transforme en une intégrale de

surface, sur une surface ouverte S s'appuyant sur le contour C. Nous avons développé ce calcul au chapitre IV, § 6, pour une intégrale :

$$\oint_C f_k dx^k = \frac{1}{2} \int_S \int_{kh} \left[ \frac{\partial f_h}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^h} \right] ds^{kh}.$$

Ici, nous avons un indice supérieur  $i$  en plus, ce qui ne change rien au résultat :

$$(v. 48) \quad \oint_C f_k^i dx^k = \frac{1}{2} \int_S \int_{kh} \left[ \frac{\partial f_h^i}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k^i}{\partial x^h} \right] ds^{kh}.$$

Nous voyons apparaître un rotationnel, tout comme au paragraphe précédent :

$$(v. 49) \quad r_{kh}^i = \frac{\partial f_h^i}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k^i}{\partial x^h}.$$

Si ce rotationnel est nul, le transport est intégrable ; sinon, l'intégration est impossible ; prenons l'expression de  $f_k^i$  en (v. 47) et nous trouvons :

$$r_{kh}^i = \sum_j u^j \left[ \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma_{jk}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jh}^i \right] + \sum_j \Gamma_{jk}^i \frac{\partial u^j}{\partial x^h} - \sum_j \Gamma_{jh}^i \frac{\partial u^j}{\partial x^k}$$

les dernières dérivées se tirent directement de v. 47 :

$$(v. 50) \quad r_{kh}^i = \sum_{jl} [u^j \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma_{jk}^i - u^j \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jh}^i - \Gamma_{jk}^i \Gamma_{lh}^j u^l + \Gamma_{jh}^i \Gamma_{lk}^j u^l].$$

Dans les 2 derniers termes, nous échangerons les indices muets  $j$  et  $l$  de manière à faire apparaître partout  $u^j$  en facteur. Les formules (v. 48 et 50) nous donneront ainsi, après parcours d'un circuit fermé C et retour au point initial P, une variation  $\delta u^i$  du vecteur :

$$(v. 51) \quad \delta u^i = \sum_k \oint_C f_k^i dx^k = \frac{1}{2} \sum_{kh} \int_S \int r_{kh}^i ds^{kh} = -\frac{1}{2} \sum_{jkh} \int_S \int R_{j,kh}^i u^j ds^{kh}$$

avec :

$$(v. 52) \quad R_{j,kh}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jh}^i - \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma_{jk}^i + \sum_l \Gamma_{lk}^i \Gamma_{jh}^l - \sum_l \Gamma_{lh}^i \Gamma_{jk}^l.$$

On retrouve un signe « moins » dans cette formule (v. 51) comme dans (v. 47).

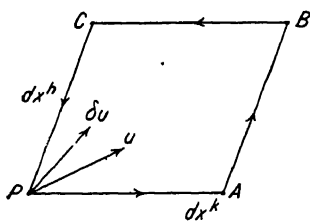


Fig. v. 4.

Le transport de vecteurs sera intégrable si les expressions R sont toutes nulles ; un point essentiel est à noter, c'est que les R sont les composantes d'un tenseur à 4 indices ; les  $\Gamma$  ne sont pas des tenseurs, nous l'avons souligné, car ces quantités ne sont pas attachées à un point donné, mais à cheval sur 2 positions ; la formule (v. 47) par exemple, nous donne  $\delta u^i$  (au point P') en fonction des vecteurs  $u^j$  et  $dx^k$  définis au point P. Au contraire, les R se rapportent

à des grandeurs ramenées toutes à un même point P ; nous prenons en ce point un déplacement  $dx^k$  ; un autre  $dx^h$ , et un vecteur  $u^j$  ; nous transpor-

tons  $u^j$  parallèlement à lui-même le long du parallélogramme PABCP ; nous revenons en P avec un vecteur qui a varié de  $\delta u^i$  ;  $\delta u^i$  est un 4<sup>e</sup> vecteur défini au même point P que les 3 premiers. La formule (v. 52) appliquée à ce circuit de la figure v. 4 donne le résultat suivant, qu'un calcul direct confirme très simplement :

$$(v. 53) \quad \delta u^i = - \sum_{jkh} R_{j,kh}^i u^j dx^k dx^h = - \sum_{jkh} R_{j,kh}^i u^j ds^{kh}.$$

Le facteur  $\frac{1}{2}$  de la formule (v. 51) disparaît parce que  $ds^{kh} = -ds^{hk} = dx^k dx^h$ , et que R est antisymétrique en  $h$  et  $k$ . Les  $\delta u^i$ ,  $u^j$ ,  $dx^k$ ,  $dx^h$  sont 4 vecteurs en P, donc R est un tenseur, incontestablement attaché au point P unique.

Nous avons étudié le transport d'un vecteur contravariant, mais nous pourrions aussi bien transporter un vecteur covariant  $v_j$ . La formule (v. 47) serait remplacée par :

$$(v. 54) \quad Dv_j = 0 \quad dv_j = \sum_k f_{jk} dx^k$$

avec :

$$f_{jk} = + \sum_l \Gamma_{jk}^l v_l,$$

conformément aux formules v. 10 à 14.

Nous aurions à transformer l'intégrale de  $f_{jk}$  sur le contour C en une intégrale du rotationnel  $r_{j,kh}$  sur la surface S :

$$r_{j,kh} = \frac{\partial f_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial f_{jk}}{\partial x^h}.$$

Les calculs se feraient exactement comme dans l'exemple précédent, pour aboutir au résultat suivant :

$$(v. 55) \quad \delta v_j = + \frac{1}{2} \sum_{ikh} \int_S \int R_{j,kh}^i v_i ds^{kh}.$$

Les formules des dérivées covariantes avaient même aspect général pour  $u^i$  et  $v_j$ , mais avec un changement de signe, que l'on revoit en (v. 47) et (v. 54) ; de même, après un transport parallèle en circuit fermé, on retrouve des formules très semblables (v. 51) et (v. 55) mais avec inversion de signe. Cette formule montre la nature tensorielle des R, tout comme (v. 53).

Le transport d'un vecteur, sur un circuit fermé, ne redonne pas le vecteur initial. Il revient au même de dire que, si nous transportons un vecteur d'un point P en un point Q, nous n'obtiendrons pas le même résultat si nous suivons deux chemins différents PAQ ou PBQ.

Ce fait essentiel entraîne l'inégalité de deux dérivés secondes  $\frac{D}{Dx^k} \frac{D}{Dx^h}$  et  $\frac{D}{Dx^h} \frac{D}{Dx^k}$ . Ainsi, pour un vecteur covariant  $v_j$ , on trouve :

$$\frac{D}{Dx^k} \frac{Dv_j}{Dx^h} - \frac{D}{Dx^h} \frac{Dv_j}{Dx^k} = \sum_l v_l R_{j,hk}^l.$$

L'ordre de dérivation devra donc être soigneusement respecté. Pour un vecteur contravariant  $u^i$ , on obtient une formule semblable, avec signe —.

**X. — Transport en circuit fermé d'un tenseur quelconque, ou d'un pseudo-tenseur.**

Les formules (v. 51) et (v. 55) démontrées pour un vecteur contravariant et un vecteur covariant s'étendent sans peine à un *tenseur quelconque*. La règle sera tout à fait semblable à celle que nous avons trouvée au paragraphe 4 pour la dérivation covariante. Un tenseur  $t^i_{\ j}$  se transformera, après parcours d'un circuit fermé C, de la même manière qu'un produit  $u^i v_j w_k$  ; il y aura à ajouter trois termes de variation, avec signes — pour les indices contravariants du tenseur et signes + pour les indices covariants du tenseur :

$$(v. 56) \quad \delta t^i_{\ j} = \frac{1}{2} \sum_{skh} \int \int_S \{ -R^i_{\ skh} t^k_{\ j} + R^j_{\ kh} t^i_{\ s} + R^s_{\ i, kh} t^i_{\ j} \} ds^{kh}.$$

Nous pourrions tirer, de cette formule générale, les renseignements relatifs à la variation d'un pseudo-tenseur ; mais il est plus simple de se reporter à la formule de transport parallèle (v. 25) ; une densité  $\alpha$  sera *transportée parallèlement* si sa dérivée covariante est nulle, ce qui donne :

$$\frac{D\alpha}{Dx^k} = \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} - \alpha \sum_i \Gamma^i_{\ ik} = 0.$$

Donc :

$$(v. 57) \quad d \log \alpha = \sum_i \Gamma^i_{\ ik} dx^k.$$

Cette formule est exactement du type (v. 42), le plus simple que nous ayons eu à envisager ; l'intégrale sur un circuit fermé C se change en une intégrale de surface du rotationnel, suivant le schéma ordinaire :

$$(v. 58) \quad \delta \log \alpha = \frac{1}{2} \sum_{kh} \int \int_S r_{kh} ds^{kh}.$$

avec :

$$r_{kh} = \sum_i \left( \frac{\partial \Gamma^i_{\ hi}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{\ ki}}{\partial x^h} \right).$$

Cette expression est plus simple que celles que nous avons rencontrées plus haut, mais elle peut s'y ramener ; formons le *tenseur de courbure contracté de Ricci et Einstein* :

$$(v. 59) \quad R_{j, h} = \sum_i R^i_{\ j, ih} = \sum_{i, l} \left[ \frac{\partial \Gamma^i_{\ jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{\ ji}}{\partial x^h} + \Gamma^i_{\ li} \Gamma^l_{\ jh} - \Gamma^i_{\ lh} \Gamma^l_{\ ji} \right]$$

c'est un tenseur qui conserve seulement 2 indices  $j$  et  $h$  en évidence ; le premier et les deux derniers termes sont symétriques en  $j, h$  puisque les  $\Gamma$  offrent déjà cette symétrie ; nous voyons alors la relation suivante :

$$(v. 60) \quad r_{kh} = \sum_i (R^i_{\ k, ih} - R^i_{\ h, ik}) = R_{k, h} - R_{h, k}.$$

La variation d'une densité scalaire, après circuit fermé, se ramène donc encore au tenseur de courbure, mais sous une forme contractée assez particulière ; pour une capacité scalaire  $\tau$  le résultat sera semblable, avec un

simple changement de signe, puisqu'un produit  $\mathcal{C}\tau$ , véritable scalaire, doit rester inaltéré :

$$(v. 61) \quad \delta \log \tau = - \frac{1}{2} \sum_{kh} \int_S \int r_{kh} ds^{kh}.$$

Dans toutes nos formules d'intégration, sur une surface  $S$  appuyée au contour  $C$ , nous voyons apparaître des expressions du type rotationnel, anti-symétriques en  $k$  et  $h$ .

### XI. — Signification géométrique de ces formules : courbure de l'espace.

D'après l'étude que nous venons de faire, il apparaît que toute la question, du transport à distance des tenseurs se réduit à l'étude du tenseur  $R^i_{j, kh}$  à quatre indices. Combien avons-nous de composantes indépendantes ? Leur nombre est réduit par les relations suivantes :

$$(v. 62) \quad R^i_{j, kh} = - R^i_{j, hk} \quad \text{antisymétrie } k, h.$$

Cette antisymétrie est évidente sur la formule (v. 52) ; elle s'explique aisément sur le schéma de la figure v. 4, car intervertir les deux déplacements  $dx^k$  et  $dx^h$  c'est inverser le sens de parcours sur le circuit PABCP ; cette antisymétrie résulte d'ailleurs de ce que les  $R$  sont obtenus à partir d'une formule de rotationnel (v. 49). Une autre série de relations s'obtient, en s'appuyant sur la formule (v. 52) et tenant compte de la symétrie des  $\Gamma$  pour leurs deux indices inférieurs ; la voici :

$$(v. 63) \quad R^i_{j, kh} + R^i_{k, hj} + R^i_{h, jk} = 0.$$

Les trois termes se déduisent par permutation circulaire des trois indices inférieurs  $j, k, h$ .

Quelle signification géométrique faut-il attribuer à ces résultats ? Tout d'abord, il est évident qu'il ne s'agit pas d'une propriété des vecteurs ou tenseurs, mais de l'espace lui-même, et tout particulièrement de la loi de parallélisme à distance, telle que nous l'avons définie au début de ce chapitre.

Tant que nous restons dans les espaces affines, il nous est assez difficile de

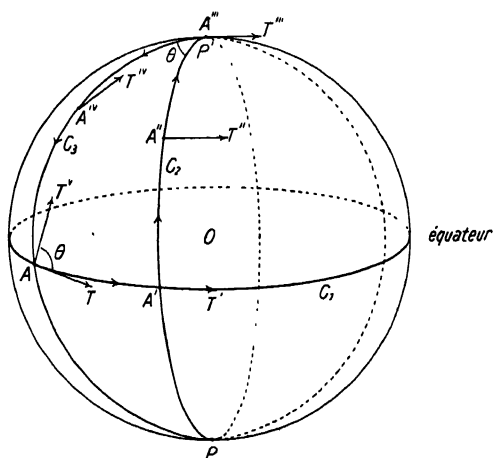


Fig v. 5.

nous faire une représentation géométrique précise ; aussi allons-nous

prendre un exemple tiré de la géométrie usuelle, pour trouver une analogie avec nos résultats actuels. Considérons un espace à deux dimensions, constitué par la surface d'une sphère (fig. v. 5), et admettons comme loi de transport parallèle, la règle que le vecteur transporté doit faire un angle constant avec un grand cercle; le grand cercle est alors une ligne géodésique, conformément à la définition du paragraphe 7, puisque sa tangente se transporte parallèlement à elle-même, en faisant toujours le même angle (nul) avec la ligne de transport (grand cercle).

Partons alors d'un point A avec un vecteur AT qui soit justement tangent au grand cercle  $C_1$ ; sur notre figure ce cercle représente l'équateur, si nous prenons POP' comme ligne des pôles. Allons jusqu'à un méridien  $C_2$  et à partir de ce moment, remontons suivant le méridien jusqu'au pôle; le vecteur doit, dans ce transport, rester perpendiculaire au méridien; nous avons représenté ses positions A'T', puis A''T'' et A'''T''' au pôle P'. Arrivé là, nous allons redescendre par un autre méridien  $C_3$ , qui fait un angle  $\theta$  avec le premier; notre vecteur va glisser, en gardant un angle constant  $\frac{\pi}{2} - \theta$  avec le cercle  $C_3$ ; lorsque nous sommes revenus au point de départ A, notre vecteur s'est transporté suivant A'''T''' puis A''T'' et enfin AT''; nous arrivons avec un vecteur AT'' qui a tourné d'un angle  $\theta$  par rapport au vecteur initial AT.

Ainsi donc, en adoptant sur la sphère la règle la plus simple de transport parallèle (règle qui laisse le vecteur toujours tangent à la sphère, sans l'écarter hors des deux dimensions que nous nous sommes fixées) nous retrouvons des particularités analogues à celles que nous indiquent nos formules. La cause en est évidente: c'est la *courbure* de la sphère; si nous refaisons le même essai sur un plan (avec le postulat d'Euclide) tout transport à distance finie suivant un circuit fermé nous ferait revenir à la position initiale; si notre surface était applicable sur un plan, nous aurions le même résultat; mais la sphère ou tout autre surface non applicable sur un plan nous conduit à une rotation du vecteur, après un transport parallèle sur un circuit fermé.

Le tenseur R que nous avons trouvé caractérise donc la *courbure de l'espace*, et le fait que cet espace n'est pas applicable sur un espace plan à axes rectilignes. La condition:

$$(v. 64) \quad R^i_{j, kh} \equiv 0$$

caractérise un *espace plan*; dans cet espace, nous pourrions avoir, pour des circonstances particulières, employé des coordonnées curvilignes; mais il sera possible de revenir à des axes ayant toutes les propriétés d'axes rectilignes; c'est ce qu'on appelle aussi un *espace linéaire*; une fois qu'on a choisi des axes rectilignes on retombe sur les propriétés très simples que nous avons admises au début du chapitre II.

## XII. — Un espace à courbure nulle est linéaire.

Dans un espace plan (linéaire) où l'on a, pour une raison quelconque, choisi des axes curvilignes, on constate que le tenseur de courbure  $R^i_{j, kh}$  est identiquement nul. Réciproquement, si ce tenseur est nul, l'espace est



linéaire ; on peut trouver des coordonnées  $\bar{x}^r$  géodésiques dans tout l'espace, et qui nous fourniront les axes rectilignes.

Les équations (v. 8) indiquaient le mode de formation de coordonnées géodésiques au voisinage d'un point de l'espace ; si les  $R_{j,kh}^i$  sont tous nuls, ces équations sont *intégrables* ; en effet, nous avons trouvé :

$$(v. 8) \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} = \delta_l^i - \sum_m \Gamma_{lm}^i d\bar{x}^m.$$

Il y a intégrabilité si les dérivées secondes sont égales :

$$(v. 65) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n} = - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} \sum_m \Gamma_{nm}^i d\bar{x}^m = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l} = - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^n} \sum_m \Gamma_{lm}^i d\bar{x}^m.$$

Au premier ordre, cette relation est satisfaite par la symétrie des  $\Gamma$  vis-à-vis de leurs indices inférieurs ; au deuxième ordre, il faut prendre les dérivées avec les mêmes précautions qu'au paragraphe 9 de ce chapitre (v. 49 à v. 52) et l'on obtient la condition de nullité des  $R_{j,kh}^i$ . Si donc les  $R_{j,kh}^i$  sont nuls, les équations des axes géodésiques sont intégrables, et nous pouvons obtenir un système d'axes rectilignes ; pour lesquels le transport parallèle à distance se réduit à l'égalité des composantes  $u$ , comme en v. 1.

## CHAPITRE VI

# GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE, ESPACE DE RIEMANN

### I. — Définitions élémentaires.

Il y aura une *métrique* dans notre géométrie, à partir du moment où nous supposons que nous pouvons comparer entre eux les divers vecteurs unités  $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_r$ , qui nous servent suivant les divers axes de coordonnées. Nous admettons donc désormais que tous ces vecteurs peuvent être mesurés au moyen d'une même unité de longueur; cette même unité pourra servir à mesurer aussi la valeur absolue d'un vecteur d'orientation quelconque, et nous saurons donner un sens à la distance de deux points voisins.

Pour commencer, nous partirons d'un espace euclidien, dont les vecteurs de base  $\vec{e}_i$  auraient tous la même longueur 1, et seraient orthogonaux entre eux; nous admettons donc les définitions de géométrie usuelle, mais dans un espace à  $r$  dimensions. Le carré de la distance de deux points voisins sera :

$$(vi. 1) \quad (ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots (dx^r)^2.$$

Dans cet espace euclidien, nous pourrions même parler de la distance de deux points situés à distance finie, la formule (vi. 1) étant valable uniformément dans tout l'espace.

Changeons de vecteurs de base, et passons à de nouvelles coordonnées  $\bar{x}^1 \dots \bar{x}^r$  qui pourront être curvilignes. En un point donné, nous aurons un nouveau système d'unités locales  $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_r$  surlignées, avec les relations :

$$(vi. 2) \quad \begin{aligned} \bar{e}_m &= \sum_i \alpha_m^i e_i, & dx^i &= \sum_m \alpha_m^i d\bar{x}^m \\ e_i &= \sum_m \beta_i^m \bar{e}_m, & d\bar{x}^m &= \sum_i \beta_i^m dx^i \end{aligned}$$

La forme quadratique homogène (vi. 1) qui exprime le carré de la distance de deux points voisins prend l'aspect suivant :

$$(vi. 3) \quad (ds)^2 = \sum_i (dx^i)^2 = \sum_{i, l, m} \alpha_l^i \alpha_m^l d\bar{x}^l d\bar{x}^m = \sum_{l, m} \bar{g}_{lm} d\bar{x}^l d\bar{x}^m$$

avec :

$$(vi. 4) \quad \bar{g}_{lm} = \sum_i \alpha_i^l \alpha_i^m = \bar{g}_{ml}.$$

La forme quadratique est toujours homogène par rapport à  $dx^1 \dots dx^m$  des coordonnées, mais elle prend un aspect plus simple si l'on considère les doubles produits de ces déplacements. A cause de la symétrie, nous avons  $\frac{r(r+1)}{2}$  composantes  $g_{ik}$  et non pas  $r^2$ .

Rappelons que la formule (vi. 3) est écrite en supposant qu'on fasse séparément les sommes sur  $l$  et sur  $m$ , de sorte qu'on voit apparaître séparément les termes  $\bar{g}_{lm}$  et  $\bar{g}_{ml}$ . Pour trois dimensions la formule (vi. 3) s'écrit ainsi (en omettant les traits de surbrillance) :

$$(vi. 5) \quad \begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{13}dx^1dx^3 \\ &+ g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{23}dx^2dx^3 \\ &+ g_{31}dx^3dx^1 + g_{32}dx^3dx^2 + g_{33}(dx^3)^2 \\ &= g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 \\ &+ 2g_{31}dx^3dx^1. \end{aligned}$$

Nous avons supposé, dans ce premier paragraphe, que nous partions d'un espace euclidien, en axes rectilignes orthogonaux, et que nous introduisions des coordonnées curvilignes arbitraires. Cela nous a permis de former une expression (vi. 3) d'aspect plus général. Nous ne garderons plus, dans la suite de l'exposé, l'hypothèse que notre hyperspace soit réductible au cas euclidien. Nous poserons *a priori* une forme quadratique homogène, qui nous servira à définir le carré de la distance de deux points voisins, et nous admettrons que les coefficients  $g$  qui y figurent peuvent être des fonctions tout à fait quelconques des coordonnées. Nous aurons alors à rechercher ultérieurement dans quels cas ces espaces généraux sont susceptibles d'être ramenés à une forme plus simple.

## II. — Définition générale ; tenseur métrique fondamental.

Nous admettons, pour introduire une métrique, la possibilité de comparer entre elles, en chaque point, les unités de longueur de différentes orientations. Dans ce chapitre, il nous suffira d'avoir un *mètre orientable*, mais fixé à un point donné ; nous devrons ensuite étudier la question de la comparaison des unités de longueur en divers points, c'est-à-dire nous préoccuper des postulats nécessaires pour définir un *mètre transportable*. Ce problème sera discuté au chapitre VII.

Pour le moment, nous restons en un point fixe bien défini, et nous comparons entre eux des segments orientés en tous sens. Soient  $dx^i$  les composantes d'un vecteur infiniment petit, en un point  $P(x^1 \dots x^r)$  ; le carré de la longueur du vecteur sera, par définition, donné par une expression :

$$(vi. 6) \quad ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k \quad g_{ik} = g_{ki}.$$

Les coefficients de cette forme quadratique homogène peuvent être pris symétriques ( $g_{ik} = g_{ki}$ ) sans que cela restreigne la généralité ; en effet si l'on avait des  $g_{ik}$  non symétriques il suffirait de former la combinaison des termes  $i, k$  et  $k, i$  :  $\frac{1}{2} (g_{ik} + g_{ki}) dx^i dx^k$  pour éliminer la partie non symétrique de  $g$ . Les  $g_{ik}$  sont des fonctions des coordonnées  $x^1 \dots x^r$  du point P où se fait la mesure.

Le  $ds^2$  est un scalaire, qui reste invariant dans un changement d'axes de référence ; les  $dx^i dx^k$  sont contravariants, donc les  $g_{ik}$  forment un tenseur covariant *symétrique*. Cela se voit directement sur les formules de transformation ; le changement d'axes (vi. 2), appliqué à (vi. 6) donne :

$$(vi. 7) \quad ds^2 = \sum_{i,m} \bar{g}_{im} d\bar{x}^i d\bar{x}^m \quad \bar{g}_{im} = \sum_{ik} g_{ik} \alpha_i^i \alpha_m^k \quad g_{ik} = \sum_{lm} \beta_l^i \beta_k^m \bar{g}_{lm}.$$

La formule précédente (vi. 3) était un cas particulier de (vi. 7) ; on y avait admis la forme euclidienne (vi. 1), c'est-à-dire un tableau de  $g_{ik}$  ainsi construit :

$$(vi. 8) \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les  $g_{ik}$  sont appelés *tenseur métrique fondamental*. Nous aurons souvent à considérer le déterminant  $g$  des  $g_{ik}$  :

$$(vi. 9) \quad g = |g_{ik}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{r1} & g_{r2} & \dots & g_{rr} \end{vmatrix}$$

De ce déterminant, nous pouvons extraire le mineur  $G_{ik}$  correspondant à un certain élément  $g_{ik}$  ; ces mineurs nous permettent d'écrire le développement de  $g$  par rapport à une ligne ou une colonne déterminée :

$$(vi. 10) \quad \begin{aligned} g &= \sum_k g_{ik} G_{ik} && \text{développement par rapport à la ligne } i \\ g &= \sum_i g_{ik} G_{ik} && \text{développement par rapport à la colonne } k. \end{aligned}$$

De plus, nous obtenons les relations :

$$(vi. 11) \quad \sum_k g_{ik} G_{jk} = 0 \quad \sum_i g_{ik} G_{il} = 0 \quad i \neq j \text{ et } k \neq l.$$

La première somme représente le développement d'un déterminant qui aurait deux lignes identiques ( $i$  et  $j$ ) ; la seconde somme correspond à un déterminant dont les colonnes  $k$  et  $l$  seraient identiques ; tous ces déterminants sont nuls.

Nous pouvons résumer ces formules sous une forme plus condensée. Posons :

$$(vi. 12) \quad g^{ik} = \frac{G_{ik}}{g}.$$

Nous avons écrit  $g^{ik}$  avec deux indices en haut ; il nous faudra montrer que

ces grandeurs constituent un tenseur contravariant. Nous savons déjà que ces  $g^{ik}$  sont symétriques, comme les  $g_{ik}$ ; d'autre part, ils satisfont aux relations :

$$(vi. 13) \quad \begin{aligned} \sum_k g_{ik} g^{jk} &= \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ \sum_i g_{ik} g^{il} &= \delta_k^l = \begin{cases} 1 & \text{si } k=l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \end{aligned}$$

Les seconds membres  $\delta_i^j$  ou  $\delta_k^l$  de ces relations sont invariants dans tous les changements d'axes; il est donc indispensable que les  $g^{ik}$  soient contravariants, puisque les  $g_{ik}$  sont covariants. On vérifie facilement que toutes les relations (vi. 13) restent valables pour les  $\bar{g}_{im}$  et  $\bar{g}^{im}$  si l'on admet :

$$(vi. 14) \quad \bar{g}^{im} = \sum_{ik} \beta_i^l \beta_k^m g^{ik} \quad g^{ik} = \sum_{lm} \alpha_l^i \alpha_m^k \bar{g}^{lm}.$$

Nous voici donc en possession des entités fondamentales suivantes :

tenseur symétrique  $g_{ik}$  et son déterminant  $g$

tenseur symétrique  $g^{ik}$  et son déterminant  $g' = g^{-1}$ .

Les formules de multiplication des déterminants donnent en effet directement, d'après les formules (vi. 13) :

$$(vi. 15) \quad g' = |g^{ik}| = g^{-1}.$$

### III. — Exemples simples. Coordonnées curvilignes dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Avant de pousser plus loin l'analyse, donnons quelques exemples élémentaires; prenons tout d'abord des *coordonnées obliques dans un plan* (fig. vi. 1) avec deux unités  $e_1$  et  $e_2$  différentes sur les deux axes. Le contour OQP parallèle aux axes est constitué des vecteurs dont les longueurs vraies sont les suivantes :

$$\begin{aligned} OQ &= e_1 x^1 \\ QP &= e_2 x^2 \end{aligned} \quad \text{'' '' ''}$$

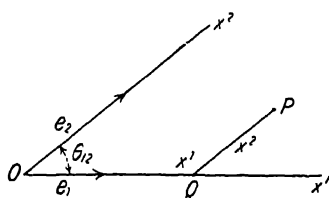


Fig. vi. 1.

donc :

$$(vi. 16) \quad OP^2 = (e_1 x^1)^2 + (e_2 x^2)^2 + 2e_1 x^1 e_2 x^2 \cos \theta_{12},$$

ce qui nous donne :

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + (g_{22}dx^2)^2 + 2g_{12}dx^1 dx^2,$$

avec :

$$(vi. 17) \quad g_{11} = (e_1)^2 \quad g_{22} = (e_2)^2 \quad g_{12} = e_1 e_2 \cos \theta_{12}$$

en appelant  $\theta_{12}$  l'angle des deux axes.

Le tableau des  $g_{ik}$  est donc le suivant :

$$(vi. 18) \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 \cos \theta_{12} \\ e_1 e_2 \cos \theta_{12} & e_2^2 \end{pmatrix}.$$

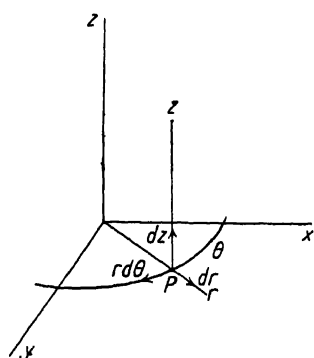


Fig. vi. 2.

Passons à des *coordonnées cylindriques* (fig. vi. 2) ; nous prendrons :

$$x^1 = r \quad x^2 = \theta \quad x^3 = z.$$

A partir d'un point P, nous obtenons 3 déplacements infinitésimaux *orthogonaux* lorsque nous faisons les variations  $dr$ , ou  $d\theta$ , ou  $dz$  ; leurs longueurs vraies sont données par :

$$dr \quad r d\theta \quad \text{et} \quad dz,$$

ce qui nous montre que les unités locales de longueur sont :

$$(vi. 19) \quad e_1 = 1 \quad e_2 = r \quad e_3 = 1.$$

Le  $ds^2$  a pour valeur :

$$(vi. 20) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 ;$$

donc le tableau des  $g_{ik}$  a l'aspect que voici :

$$(vi. 21) \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r^2$$

le déterminant  $g$  est égal à  $r^2$ .

En *coordonnées sphériques* nous retrouverons des lignes coordonnées toujours orthogonales entre elles (fig. vi. 3).

Les coordonnées usuelles  $x, y, z$  s'expriment en fonction de :

$$x^1 = r \quad x^2 = \theta \quad x^3 = \varphi$$

par les formules bien connues :

$$(vi. 22) \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Les déplacements  $dr, d\theta, d\varphi$  sont orthogonaux, avec les unités locales :

$$(vi. 23) \quad e_1 = 1 \quad e_2 = r \quad e_3 = r \sin \theta$$

et l'on a :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

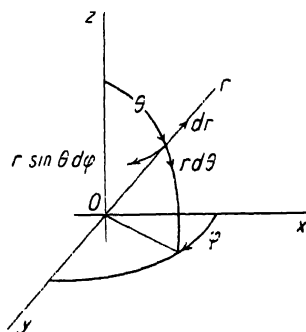


Fig. vi. 3.

ce qui donne le tableau des  $g_{ik}$  :

$$(vi. 24) \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2 \theta.$$

Les *coordonnées elliptiques planes* consistent dans l'emploi, comme lignes coordonnées, d'ellipses et d'hyperboles homofocales (fig. vi. 4). Nous les obtenons en posant :

$$(vi. 25) \quad \begin{cases} x = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ y = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta \end{cases}$$

et nous pourrions avoir une troisième coordonnée  $z$ , donnant un système de coordonnées elliptiques cylindriques. La courbe  $\xi = \xi_0$  est une ellipse ; en effet, gardons  $\xi$  constant, mais  $\eta$  variable, nous avons :

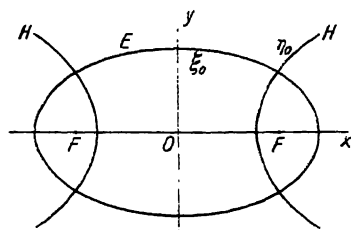


Fig. vi. 4.

$$\left( \frac{x}{a \operatorname{ch} \xi_0} \right)^2 + \left( \frac{y}{a \operatorname{sh} \xi_0} \right)^2 = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1.$$

On verrait de même comment la courbe  $\eta_0$  est une hyperbole.

Les variations  $d\xi$  et  $d\eta$  donnent des déplacements orthogonaux, dont les longueurs vraies sont :

$$a\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} \, d\xi \quad a\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} \, d\eta.$$

Donc :

$$(vi. 26) \quad e_1 = e_2 = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}$$

sont les valeurs des deux unités locales, relatives à  $\xi$  et  $\eta$  et les  $g_{ik}$  sont représentés par le tableau :

$$(vi. 27) \quad g = |g_{ik}| = \begin{vmatrix} a\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} & 0 & 0 \\ 0 & a\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 [\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta].$$

Bien d'autres systèmes de coordonnées curvilignes ont été utilisés dans l'espace à 3 dimensions ; citons encore les coordonnées elliptiques dans l'espace, qui emploient comme surfaces coordonnées des ellipsoïdes, des hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes, tous homofocaux. Un cas particulier de ce système donne les coordonnées paraboliques <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> PH. FRANCK et R. v. MISES. *Differential Gleichungen der Physik*. Vieweg, Braunschweig, 1930, vol. 1, p. 753.

H. BATEMAN. *Partial differential equations of math. physics*. Cambridge Univ. Press, 1932, p. 421.

IV. — *Interprétation des  $g_{ik}$ ; leur sens géométrique.*

Dans presque tous ces systèmes de coordonnées, on s'est arrangé pour employer des *lignes coordonnées orthogonales* (fig. vi. 5). Soient alors  $e_1, e_2$  et  $e_3$  les unités locales, les variations  $dx^1, dx^2, dx^3$ , fournissent des segments orthogonaux de longueurs vraies :

$$(vi. 28) \quad \begin{aligned} dl_1 &= e_1 dx^1 & dl_2 &= e_2 dx^2 \\ dl_3 &= e_3 dx^3. \end{aligned}$$

Ces unités locales  $e_k$  seront des fonctions quelconques des coordonnées  $x^1, x^2, x^3$ ; on trouvera alors :

$$ds^2 = (e_1 dx^1)^2 + (e_2 dx^2)^2 + (e_3 dx^3)^2.$$

D'où les  $g_{ik}$  :

$$(vi. 29) \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^2 \end{vmatrix} = (e_1 e_2 e_3)^2.$$

Les  $g^{ik}$  contravariants se calculent facilement, d'après la règle (vi. 12) :

$$(vi. 30) \quad |g^{ik}| = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{e_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e_3^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(e_1 e_2 e_3)^2}$$

et l'on retrouve bien la règle générale, que ce nouveau déterminant  $g'$  est l'inverse de  $g$ .

Cet exemple nous servira de type; toutes les formules du paragraphe 3 se ramènent à ce schéma unique; il s'agit toujours de coordonnées orthogonales, à unités  $e_k$  variables; le caractère essentiel de cette orthogonalité, c'est le fait que les  $g_{ik}$  et  $g^{ik}$  forment des *tableaux diagonaux*; il ne reste dans le  $ds^2$  que des termes carrés, mais tous les termes mixtes sont nuls. Dès qu'on emploie des coordonnées obliques, comme en (vi. 18), ce caractère disparaît.

Prenons le cas général, avec la formule :

$$(vi. 6) \quad ds^2 = \sum_i \sum_k g_{ik} dx^i dx^k$$

et cherchons la signification géométrique des coefficients  $g_{ik}$ . Sur un axe  $k$ , nous avons une certaine unité de longueur  $e_k$ , de sorte qu'un déplacement  $dx^k$  correspond à une longueur réelle :

$$(vi. 31) \quad dl_k = e_k dx^k.$$



Or, la formule (vi. 6) nous montre que, pour un déplacement  $dx^k$  si (toutes les autres composantes  $dx^i$  étant nulles, si  $i \neq k$ ), le carré de longueur est :

$$(vi. 32) \quad ds^2 = g_{kk}(dx^k)^2 \quad \text{axe } k.$$

La comparaison des deux expressions nous montre le sens des  $g_{kk}$  diagonaux :

$$(vi. 33) \quad g_{kk} = (e_k)^2.$$

Prenons maintenant des déplacements dans le plan  $i, k$ , c'est-à-dire supposons  $dx^i$  et  $dx^k$  différents de zéro et toutes les autres composantes nulles ; notre formule fondamentale (vi. 6) nous donne alors :

$$(vi. 34) \quad ds^2 = g_{ii}(dx^i)^2 + g_{kk}(dx^k)^2 + 2g_{ik}dx^i dx^k \quad \text{plan } ik.$$

Comparons cette formule à (vi. 16 ou 17) ; nous voyons que, pour des déplacements infiniment petits dans le plan  $ik$ , nous avons affaire à des axes obliques, faisant entre eux un angle  $\theta_{ik}$  :

$$(vi. 35) \quad g_{ik} = e_i e_k \cos \theta_{ik} = \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \cos \theta_{ik}.$$

Les  $g_{ik}$  diagonaux et non diagonaux prennent ainsi un sens géométrique très simple et s'expriment en fonction des unités de longueur locales  $e_k$  suivant les divers axes, ainsi que des angles  $\theta_{ik}$  des axes deux à deux. Les  $\frac{r(r+1)}{2}$  quantités  $g_{ik}$  sont bien complètement définies au moyen des  $r$  unités  $e_k$  et des  $\frac{r(r-1)}{2}$  angles  $\theta_{ik}$ . Le compte de variables indépendantes est le même.

Dans ces formules, nous devons, par généralité, prévoir le cas où certains  $g_{kk}$  diagonaux seraient négatifs. Si nous voulons garder l'interprétation (vi. 33) nous admettrons alors des unités de longueur  $e_k$  imaginaires. De même, en (vi. 35) nous pouvons trouver des angles  $\theta_{ik}$  imaginaires, soit que la formule nous donne un  $\cos \theta_{ik}$  imaginaire, soit qu'elle fournisse un cosinus supérieur à 1 en valeur absolue.

Les  $g_{ik}$  pouvant être positifs ou négatifs, il y aura dans notre hyperspace général certaines *directions de longueur nulle* ; ce seront celles pour lesquelles le  $ds^2$  s'annulera.

## V. — Déplacements d'indices ; composantes covariantes ou contravariantes d'un même vecteur ou tenseur ; valeur absolue ; produit scalaire.

En géométrie affine, la variance d'un vecteur ou d'un tenseur était une qualité intangible, à laquelle nous ne pouvions rien changer ; c'est ce qui faisait l'intérêt de toutes les formules de cette géométrie sans métrique ; il avait fallu les étudier et les adapter à cette règle absolue, et préciser d'une manière tout à fait stricte à quel type de vecteur ou tenseur pouvait s'appliquer une certaine opération.

Dès que nous introduisons une métrique, ces barrières tombent. Nous avons à notre disposition 2 tenseurs fondamentaux, celui des  $g_{ik}$  et celui des  $g^{ik}$  qui nous permettent une multitude de combinaisons nouvelles. Partons d'un vecteur contravariant  $u^k$  et formons la multiplication contractée  $\sum_k g_{ik} u^k$ ; nous obtenons un tenseur covariant (par l'indice  $i$  inférieur); nous l'appellerons composante covariante du vecteur  $\vec{u}$ :

$$(vi. 36) \quad u_i = \sum_k g_{ik} u^k.$$

La formule inverse se trouve aisément:

$$(vi. 37) \quad u^k = \sum_j g^{jk} u_j;$$

en effet, portons (vi. 37) dans (vi. 36) et nous trouvons:

$$u_i = \sum_{k,j} g_{ik} g^{jk} u_j = \sum_j \delta_i^j u_j = u_i$$

d'après (vi. 13). Ainsi donc, un vecteur  $\vec{u}$  peut être représenté à volonté par ses composantes covariantes ou par ses composantes contravariantes. La distinction rigoureuse de la géométrie affine a disparu.

Les mêmes règles sont valables pour des tenseurs quelconques. Une multiplication contractée avec les  $g_{ik}$  ou  $g^{ik}$  permettra de faire monter ou descendre un indice à notre choix:

$$(vi. 38) \quad \begin{cases} t^j_k = \sum_h g_{hk} t^{jh} \\ t^{jh} = \sum_l g^{hl} t^j_l. \end{cases}$$

Nous discuterons au paragraphe 6 le sens géométrique de ces opérations, afin de nous familiariser avec elles. Voyons encore quelques formules importantes. Les déplacements  $dx^k$  définissent un certain vecteur infiniment petit, par ses composantes contravariantes. Les composantes covariantes de ce déplacement infinitésimal sont:

$$(vi. 39) \quad dx = \sum_k g_{ik} dx^k \quad dx^j = \sum_i g^{ji} dx_i$$

et le  $ds^2$  peut aussi bien s'écrire:

$$(vi. 40) \quad ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx^k = \sum_i dx_i dx^i = \sum_{i,j} g^{ij} dx_i dx_j.$$

Il est indispensable de se rappeler l'équivalence complète de ces formules: Un vecteur  $u^k$  typique sera donné par la *vitesse* d'un point:

$$u^k = \frac{dx^k}{dt}.$$

Les mêmes formules vont nous permettre de définir la valeur absolue de cette vitesse:

$$(vi. 41) \quad |u|^2 = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \sum_{i,k} g_{ik} u^i u^k = \sum_i u_i u^i = \sum_{i,j} g^{ij} u_i u_j.$$

Pour un vecteur  $\vec{u}$  quelconque, nous admettrons les formules (vi. 41) comme *formules de définition de la longueur du vecteur*.

Enfin, nous allons pouvoir définir le *produit scalaire* de deux vecteurs  $u$  et  $v$ . En géométrie affine, ce produit scalaire ne pouvait être formé qu'entre deux vecteurs de variances opposées (ii. 41) :

$$(u. 41) \quad s = (uv) = \sum_i u_i v^i \quad \text{affine.}$$

Nos définitions nous permettent d'étendre ce résultat et d'écrire :

$$(vi. 42) \quad (uv) = \sum_i u_i v^i = \sum_{ik} g_{ik} u^k v^i = \sum_k u^k v_k = \sum_{jk} g^{jk} u_j v_k.$$

Les formules (vi. 36 ou 37) montrent l'équivalence de toutes ces expressions.

Nous pourrions enfin parler de l'angle  $(\widehat{uv})$  de ces deux vecteurs, en posant :

$$(vi. 43) \quad (uv) = |u| \cdot |v| \cos(\widehat{uv})$$

$$\cos(\widehat{uv}) = \frac{\sum g_{ik} u^i v^k}{\sqrt{(\sum g_{ik} u^i u^k)(\sum g_{ik} v^i v^k)}}.$$

On doit toutefois noter que cet angle pourra fort bien être imaginaire ; de même, les carrés des longueurs de vecteurs  $u$  ou  $v$  peuvent se trouver négatives ; nous admettons, en effet, des *signes quelconques*, pour tous les  $g_{ik}$  sans aucune restriction. La formule (vi. 43) est bien d'accord avec nos notations antérieures. Prenons un vecteur  $u^1$  dirigé *suitant l'axe 1* ; et un vecteur  $v^2$  dirigé *suitant l'axe 2* ; toutes les composantes  $u^i$  ( $i \neq 1$ ) sont nulles, ainsi que les  $v^k$  ( $k \neq 2$ ). La formule (vi. 43) va nous donner l'angle  $\theta_{12}$  des deux axes 1 et 2 :

$$\cos \theta_{12} = \frac{g_{12} u^1 v^2}{\sqrt{g_{11} (u^1)^2 g_{22} (v^2)^2}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}$$

en accord complet avec (vi. 35).

Nous pouvons opérer les déplacements d'indices, suivant la formule fondamentale (vi. 38), en prenant pour tenseur les  $g_{ik}$  eux-mêmes ; nous trouvons alors les composantes :

$$g_{ik} \quad g_i^k \quad \text{et} \quad g^{ik}$$

les  $g_i^k$  mixtes sont égaux à  $\delta_i^k$ , c'est-à-dire zéro si  $i \neq k$  et 1 si  $i = k$  ; cela résulte directement des formules vi. 13 :

$$(vi. 44) \quad g_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

En axes euclidiens orthogonaux, les  $g_{ik}$  et  $g^{ik}$  prennent aussi la même forme ; nous avons remarqué ce fait au paragraphe 1 (éq. vi. 1). Dans ces axes, les

composantes covariantes ou contravariantes sont numériquement égales :

$$(vi. 45) \quad x_k = x^k \quad g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \dots & & \end{pmatrix}.$$

Cette remarque fait comprendre pourquoi la distinction entre composantes covariantes et contravariantes n'avait pas été reconnue pendant fort longtemps ; mathématiciens et physiciens se bornaient à poser leurs lois et postulats fondamentaux en axes euclidiens orthogonaux (système cartésien).

Partons d'un tenseur  $t^{ik}$ , nous pouvons former les composantes mixtes  $t^i_j = \Sigma g_{jk} t^{ik}$ , et leur somme diagonale :

$$t = \Sigma_i t^i_i = \Sigma_{ik} g_{ik} t^{ik}.$$

Cette expression est un scalaire, invariant. Si le tenseur  $t^{ik}$  est antisymétrique, la somme diagonale est nulle, car les termes  $g_{ik} t^{ik}$  et  $g_{ki} t^{ki}$  sont deux à deux égaux mais de signes contraires. Tel est le cas pour un produit vectoriel, par exemple. La somme diagonale du tenseur métrique  $g$  est égale à  $r$ , nombre de dimensions de l'espace, d'après (vi. 44).

#### **VI. — Sens géométrique de ces opérations ; composantes d'un vecteur suivant le contour des axes et projections normales,**

Nous avons déjà noté, au chapitre II, § 5, que la notion de vecteur covariant était étroitement liée à celle d'une famille d'hyperplans parallèles (espaces à  $r - 1$  dimensions) dans l'hyperespace à  $r$  dimensions.

Nous partons d'un vecteur covariant  $a_k$  et d'un déplacement contravariant  $\delta x^k$  ; à vrai dire, nous avons pris un déplacement fini  $x^k$  [éq. II. 29], parce que nous n'avions pas encore envisagé les coordonnées curvilignes ; avec des coordonnées quelconques, il est indispensable de se restreindre à l'infiniment petit. Formons donc le produit scalaire :

$$\Sigma_k a_k \delta x^k = 0 ;$$

une telle relation linéaire entre les déplacements  $\delta x^k$  représente un petit élément d'hyperplan, et cet élément est perpendiculaire au vecteur  $a^k$ , car on a :

$$(vi. 46) \quad \Sigma a_k \delta x^k = \Sigma g_{ik} a^i \delta x^k = 0$$

ou :

$$\cos (\widehat{a, \delta x}) = 0$$

d'après (vi. 43). Ainsi donc, les composantes  $a^k$  d'un vecteur  $a$  définissent le contour projectif de ce vecteur, parallèlement aux axes, comme nous l'avions

noté chapitre II, § 5. Les composantes  $a_k$ , au contraire, définissent un petit élément plan perpendiculaire à ce vecteur.

Nous avons toujours insisté sur le fait qu'un vecteur ou un tenseur doit être considéré comme *attaché à un certain point de l'espace* que l'on étudie. Cette condition reste absolument nécessaire. Toutes les formules que nous venons d'établir n'ont de sens que si l'on emploie les *valeurs spéciales* que prennent les  $g_{ik}$  au même point.

Les  $g_{ik}$  sont variables d'un point à un autre. Aucun mélange ne doit être fait entre les  $g_{ik}$  relatifs à deux points différents, même voisins. Nous reviendrons sur ces questions de transport d'un vecteur, d'un point à un autre, lorsque nous étudierons, un peu plus loin, les postulats de transport parallèle et les dérivées covariantes.

Revenons sur la formule (vi. 36) qui définit les composantes covariantes d'un vecteur, et précisons le sens géométrique en faisant une figure pour 2 ou 3 dimensions (fig. vi. 6 et 7). Nous avons des axes obliques, et un

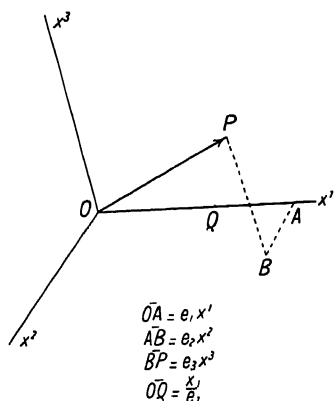


Fig. vi. 6.

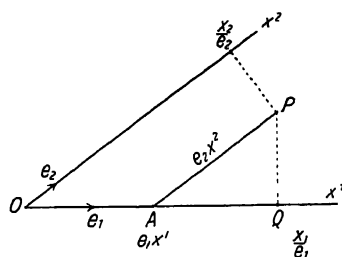


Fig. vi. 7.

contour OABP parallèle aux axes, dont les segments ont les *longueurs vraies* :

$$\overline{OA} = e_1 x^1 \quad \overline{AB} = e_2 x^2 \quad \overline{BP} = e_3 x^3.$$

Projetons ce contour sur l'axe  $Ox^1$ , de façon à obtenir le point Q, pied de la perpendiculaire abaissée de P sur  $Ox^1$  :

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= \overline{OA} + \overline{AB} \cos \theta_{12} + \overline{BP} \cos \theta_{13} \\ &= e_1 x^1 + e_2 \cos \theta_{12} x^2 + e_3 \cos \theta_{13} x^3; \end{aligned}$$

les angles  $\theta_{12}$  et  $\theta_{13}$  des axes sont donnés par (vi. 35); la formule (vi. 46) s'écrit donc :

$$e_1 \cdot \overline{OQ} = g_{11} x^1 + g_{12} x^2 + g_{13} x^3 = x_1$$

$$\overline{OQ} = \frac{x_1}{e_1}.$$

Ainsi donc, en projetant le vecteur  $\vec{OQ}$  sur l'axe numéro 1, nous obtenons un segment  $\overline{OQ}$  dont la longueur est  $\frac{x_1}{e_1}$ .

J'ai écrit en (vi. 46 et 47) des longueurs  $x^k$  finies; les formules sont vala-

bles, en réalité pour des segments  $\delta x^k$  infiniment petits, ou pour des vecteurs  $u^k$  finis, mais attachés à un point bien déterminé. La relation (vi. 47) peut être considérée comme une relation linéaire entre les variables  $x^1, x^2, x^3$ , à condition qu'on se donne  $x_1$  comme *fixe*. Elle définit alors un plan passant par P et perpendiculaire à l'axe n° 1.

**VII. — Espace euclidien tangent ;  
réduction du tableau des  $g_{ik}$  à la forme diagonale.**

Nous appelons euclidien un espace dont les coefficients  $g_{ik}$  sont constants ; dans cet espace nous aurons intérêt à choisir des axes orthogonaux, de manière à supprimer tous les  $g_{ik}$  en dehors de la diagonale, ce qui simplifiera l'exposé des résultats. En général, nos  $g_{ik}$  sont des fonctions des coordonnées ; si nous prenons leurs valeurs en un point donné, nous pouvons définir un espace euclidien (à  $g_{ik}$  constants), qui aurait justement ces valeurs particulières de  $g_{ik}$  ; ce sera l'espace euclidien tangent à notre espace courbe général.

Voyons alors comment procéder à la réduction des  $g_{ik}$  à un tableau diagonal ; cela reviendra à choisir des axes orthogonaux. Prenons une certaine direction, que nous choisirons comme nouvel axe  $\bar{x}^1$  ; nous aurons soin que ce soit une direction de longueur non nulle (chap. VI, § 4), dont le  $ds^2$  ne disparaisse pas identiquement. Pour un petit déplacement  $d\bar{x}^1$  nous aurons donc un certain  $ds^2$ , *positif* ou *négalif*. Nous définirons l'unité de longueur  $e_1$  suivant cet axe, de façon à obtenir  $\pm 1$  suivant le signe. Nous poserons donc, comme en (II. 12 et 13) :

$$(vi. 48) \quad \bar{e}_1 = \sum_k \alpha_1^k e_k \quad d\bar{x}^1 = \alpha_1^i d\bar{x}^i$$

$$ds_1^2 = \sum_{ik} g_{ik} \alpha_1^i \alpha_1^k (d\bar{x}^1)^2 = \pm (d\bar{x}^1)^2,$$

c'est-à-dire :

$$(vi. 49) \quad \bar{g}_{11} = \sum_{ik} g_{ik} \alpha_1^i \alpha_1^k = \pm 1 ;$$

cette définition est bien conforme à notre formule (vi. 7).

Cette direction particulière une fois choisie, nous allons procéder de manière à réduire d'une unité le nombre de dimensions de l'espace ; nous décomposerons chaque vecteur  $\vec{\delta x}$  en une composante  $\delta \bar{x}^1$  dans la direction  $\bar{e}_1$  et une composante  $\vec{\delta x}^*$  dans un espace à  $r - 1$  dimensions, orthogonal à notre nouvel axe  $\bar{x}^1$ . Ceci correspond aux opérations suivantes :

$$(vi. 50) \quad \vec{\delta x} = \delta \bar{x}^1 + \vec{\delta x}^*$$

avec :

$$(vi. 51) \quad (\vec{\delta x}^*, \bar{e}_1) = \sum g_{ik} \delta x^{*i} \alpha_1^k = 0.$$

La condition (vi. 51) indique bien l'orthogonalité du vecteur  $\vec{\delta x}^*$  de compo-

santes  $\delta x^i$  avec le vecteur  $\bar{e}_i$  dont les composantes sont  $\alpha_i^k$  d'après (vi. 48). Cherchons alors la longueur du vecteur initial  $\vec{\delta x}$ ; nous trouvons :

$$(vi. 52) \quad \delta s^2 = \sum_{ik} g_{ik} [\alpha_i^k \delta x^i + \delta x^{*i}] [\alpha_i^k \delta x^i + \delta x^{*k}]$$

car chaque composante  $\delta x^i$  du vecteur est la somme de  $\bar{\delta x}^i$  porté dans la direction  $\alpha_i^k$  et de  $\delta x^{*i}$  restant, orthogonal à  $\bar{\delta x}^i$ . En développant (vi. 52) nous trouvons :

$$\delta s^2 = \bar{g}_{11} (\bar{\delta x}^1)^2 + \sum_{ik} g_{ik} \alpha_i^k \bar{\delta x}^i \delta x^{*k} + \sum_{ik} g_{ik} \alpha_i^k \bar{\delta x}^i \delta x^{*i} + \sum_{ik} g_{ik} \delta x^{*i} \delta x^{*k}.$$

Les deux premières sommes sont égales, et d'ailleurs nulles d'après (vi. 51), de sorte qu'il reste :

$$(vi. 53) \quad \begin{aligned} \delta s^2 &= \bar{g}_{11} (\bar{\delta x}^1)^2 + \delta s^{*2} \\ \delta s^{*2} &= \sum_{ik} g_{ik} \delta x^{*i} \delta x^{*k}. \end{aligned}$$

Le terme  $\delta s^{*2}$  correspond à l'espace orthogonal, qui n'a plus que  $r - 1$  dimensions.

Nous continuerons ainsi de proche en proche ; dans l'espace à  $r - 1$  dimensions nous prendrons un nouvel axe  $2$ , auquel nous attribuerons une unité  $\bar{e}_2$  telle que le  $\bar{g}_{22}$  correspondant soit  $\pm 1$ , et ainsi de suite.

Au total, nous obtiendrons des axes  $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \dots \bar{x}^r$  qui décomposeront le  $ds^2$  en une somme de carrés positifs ou négatifs.

$$(vi. 54) \quad ds^2 = \sum_k \bar{g}_{kk} (d\bar{x}^k)^2 \quad \bar{g}_{kk} = \pm 1.$$

Il y aura ainsi  $p$  termes positifs et  $n$  termes négatifs :

$$(vi. 55) \quad p + n = r,$$

$r$  étant le nombre total de dimensions ; si nous admettons des  $\bar{x}^k$  imaginaires, nous pourrions ramener les termes négatifs au cas positif, — mais sans cela, rien ne peut modifier les deux nombres  $p$  et  $n$  qui sont des caractéristiques de l'espace étudié.

En relativité, par exemple, on traite le temps  $t$  comme une coordonnée équivalente aux 3 coordonnées d'espace  $x, y, z$  et l'on écrit un  $ds^2$  pour 4 dimensions :

$$(vi. 56) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad c \text{ vitesse de la lumière.}$$

En tous cas, le tableau des  $\bar{g}_{ik}$ , par rapport aux nouveaux axes orthogonaux, prend l'aspect très particulier *diagonal*, avec  $p$  termes  $+1$  et  $n$  termes  $-1$  :

$$(vi. 57) \quad |\bar{g}_{ik}| = \left[ \begin{array}{cccccc} +1 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ & 0 & +1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & -1 & \end{array} \right] \begin{array}{l} p \\ n \end{array}$$

Les transformations que nous venons d'étudier ne gardent leur forme que dans le voisinage immédiat du point considéré; dès qu'on s'en écarte notablement, les  $g_{ik}$  sont modifiés et l'aspect est changé. Nous aurons à revenir plus tard sur les questions de « courbure » des espaces, mais il fallait signaler dès maintenant le fait qu'en général, un espace de Riemann (tel que nous l'avons défini) n'est applicable sur un espace euclidien que dans l'infiniment petit.

### VIII. — Comment se transforme le déterminant $g$ lors d'un changement d'axes ?

Nous avons établi, en (vi. 7) les formules de transformation des éléments  $g_{ik}$  du tenseur métrique, lorsqu'on change de système de référence :

$$(vi. 7) \quad \bar{g}_{lm} = \sum_{ik} \alpha_l^i \alpha_m^k g_{ik}.$$

Nous voulons examiner maintenant la transformation subie par le déterminant  $g$  de tous ces coefficients. La formule ci-dessus va nous donner assez aisément la réponse; il suffit de la comparer avec la formule de multiplication des déterminants.

Partons de deux déterminants A et B, dont les éléments soient  $a_{il}$  et  $b_{jm}$ ; tous deux ont  $r$  lignes et colonnes; la formule de multiplication donne l'élément  $c_{im}$  du produit :

$$(vi. 58) \quad \begin{aligned} A \cdot B &= C \\ \sum_l a_{il} b_{lm} &= c_{im} \end{aligned}$$

Le produit C est un déterminant formé avec les  $r^2$  éléments  $c_{im}$ . La formule (vi. 7) se décompose en 2 produits de déterminants, de la manière suivante :

$$(vi. 59) \quad \begin{aligned} \sum_k \alpha_{mk} g_{ki} &= c_{mi} \\ \sum_i c_{mi} \alpha_{il} &= \bar{g}_{lm} \end{aligned}$$

Le déterminant  $\bar{g}$  des  $\bar{g}^{lm}$  est donc égal au produit de 3 déterminants :

$$\bar{g} = | \bar{g}_{lm} | = | \alpha_m^k | \cdot | g_{ki} | \cdot | \alpha |.$$

Les déterminants des  $\alpha$  sont ceux que nous avons appelés  $\Delta$ ; nous arrivons donc à la formule :

$$(vi. 60) \quad \bar{g} = \Delta^2 \cdot g.$$

Dans les formules de multiplication (vi. 59) nous n'avons tenu aucun compte de la position des indices, en haut ou en bas; cela n'a, en effet, aucune importance ici; un des indices indique la ligne, dans le déterminant, et l'autre caractérise la colonne; or si l'on échange les lignes et colonnes, le déterminant garde la même valeur.



**IX. — Les expressions  $|g|^{\frac{1}{2}}$  et  $|g|^{-\frac{1}{2}}$  sont les types des densités et capacités scalaires.**

Revenons sur la formule (vi. 60) que nous venons d'établir ; elle est riche de conséquences et va nous intéresser très vivement :

$$(vi. 60) \quad \overline{g} = \Delta^2 \cdot g.$$

Ce résultat a une importance extrême, car il va nous permettre de former, au moyen des  $g_{ik}$ , une *capacité* et une *densité scalaires* typiques.

Appelons  $|g|$  la valeur absolue du déterminant  $g$  ; il faut prendre cette précaution, parce que  $g$  lui-même peut être positif ou négatif ; la formule (vi. 60) nous montre que :

$$(vi. 61) \quad \sqrt{|\overline{g}|} = \Delta \sqrt{|g|}.$$

Donc :

$$(vi. 62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{|g|} \text{ sera le type des densités scalaires ;} \\ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \text{ sera le type des capacités scalaires.} \end{array} \right.$$

En conséquence, si  $\tau$  est une capacité tensorielle, de variance quelconque,  $\sqrt{|g|} \tau$  est un tenseur vrai. Si  $\mathfrak{A}$  est une densité tensorielle, de variance quelconque,  $\frac{1}{\sqrt{|g|}} \mathfrak{A}$  est un tenseur vrai.

Ces résultats méritent qu'on en recherche le sens géométrique profond. Nous avons remarqué, au chapitre III, § 5 qu'un élément de volume infinitésimal  $d\tau$  était le type de la capacité scalaire. Nous posions :

$$(vi. 63) \quad d\tau = dx^1 dx^2 \dots dx^r$$

c'est dire que nous faisons, brutalement, le produit des variations infiniment petites  $dx^k$  prises le long des divers axes. Cette définition nous donne un volume infinitésimal dont le contenu n'est pas explicité ; les  $dx^k$  sont mesurés en chaque point et dans chaque direction avec des règles de longueurs variables, puisque les unités  $e_k$  dépendent des coordonnées  $x$  ; le produit  $d\tau$  de (vi. 63) est un élément algébrique sans signification géométrique simple.

Pour définir un élément de volume mesurable, il nous faut comparer les longueurs définies, au point P, mais dans des orientations différentes, de façon à ramener à une même unité de longueur les divers déplacements  $dx^1 \dots dx^r$  ; c'est ce que les  $g_{ik}$  nous permettent de faire, et le résultat de cette mesure nous fournit :

$$(vi. 64) \quad dv = \sqrt{|g|} d\tau = \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^r$$

cette quantité est un *scalaire* ; sa valeur numérique a un sens absolu, indé-

pendant du point où on la définit ;  $dv$  représente la mesure du volume intérieur correspondant à  $d\tau$ .

La densité  $\sqrt{|g|}$  représente donc une densité de contenu volumétrique. Quelques exemples nous confirmeront l'exactitude de cette interprétation. En coordonnées cylindriques  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  (fig. vi. 2) nous avons trouvé (vi. 21) :

$$g = r^2 \qquad \sqrt{g} = r.$$

Or notre élément infinitésimal  $d\tau$  s'écrit ici :

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

et n'a aucun sens géométrique simple, tandis que :

$$(vi. 65) \qquad dv = \sqrt{g} d\tau = r dr d\theta dz$$

représente bien l'élément de volume en mesure vraie. De même en coordonnées sphériques (fig. vi. 3) nous trouvons en (vi. 24) :

$$\sqrt{g} = r^2 \sin \theta,$$

notre élément infinitésimal  $d\tau$ , d'après (vi. 63) s'écrit :

$$d\tau = r dr d\theta d\varphi,$$

et :

$$(vi. 66) \qquad dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

L'élément  $dv$  nous donne bien le contenu du volume défini par les variations  $dr$ ,  $d\theta$  et  $d\varphi$  des trois coordonnées.

Lorsque nous parlons d'une densité scalaire  $\alpha$  représentant la densité de masse ou d'électricité, nous savons que nos définitions ont été établies de telle sorte que l'expression :

$$(vi. 67) \qquad dM = \alpha d\tau$$

représente en valeur vraie la quantité de matière (ou d'électricité) contenue dans l'élément  $d\tau$  ; la grandeur  $dM$ , produit d'une capacité  $d\tau$  par une densité  $\alpha$  est un scalaire véritable.

Nous pouvons former un autre scalaire, fort intéressant, en prenant le rapport :

$$(vi. 68) \qquad S = \frac{dM}{dv} = \frac{\alpha d\tau}{\sqrt{|g|} d\tau} = \frac{\alpha}{\sqrt{|g|}}.$$

Cette expression mesure la quantité de matière  $dM$  par unité de contenu volumétrique  $dv$  ; c'est la *masse spécifique*, ou la charge électrique spécifique. Cette quantité est un scalaire, et se mesure en valeur absolue, quelles que soient les particularités des coordonnées. La formule nous montre comment  $\frac{1}{\sqrt{|g|}}$  joue le rôle d'une capacité, ainsi que nous l'avions annoncé en (vi. 62).

Ces remarques nous permettent de compléter les règles que nous avons données au chapitre II, §§ 8 et 14, pour reconnaître un tenseur ; les mêmes méthodes, mais avec un facteur en  $\sqrt{|g|}$ , comme indiqué en (vi. 62, 64 ou 68) nous apprennent à identifier une densité ou capacité tensorielle.

## CHAPITRE VII

# LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET LA DÉRIVÉE COVARIANTE EN GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE

### I. — Extension des formules du chapitre IV.

Nous avons pu définir, en géométrie affine, des opérations typiques : le *gradient*, qui s'applique à un scalaire ; le *rotationnel* qui joue sur un vecteur covariant  $a^i$  et la *divergence*, qui exige une densité contravariante  $\alpha$  ; récrivons ces formules de définition :

(VII. 1)	$a = \text{grad } V$	$a_i = \frac{\partial V}{\partial x^i}$	vecteur covariant.
(VII. 2)	$b = \text{rot } a_i$	$b_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k}$	tenseur covariant.
(VII. 3)	$\omega = \text{div } \alpha^i$	$\omega = \sum_i \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^i}$	densité scalaire.

Nous savons maintenant, grâce au tenseur métrique  $g_{ik}$ , changer à volonté la variance d'un vecteur ou d'un tenseur. Sans toucher aux définitions essentielles que nous venons de rappeler, nous allons pouvoir étendre énormément leur champ d'application ; au moyen des densités  $\sqrt{|g|}$  nous pourrons aussi passer d'un tenseur à une densité tensorielle ou inversement.

Ainsi, partant d'un vecteur contravariant  $\alpha^i$ , nous savons former une densité :

$$(VII. 4) \quad \alpha^i = \sqrt{|g|} \, a^i$$

dont nous prendrons la divergence  $\omega$  en (VII. 3) ; à partir de cette divergence, densité scalaire, nous établirons un véritable scalaire  $d$  :

$$(VII. 5) \quad d = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \omega = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} \, a^i).$$

Cet exemple montre la souplesse des transformations permises. Nous allons voir comment on en tire la définition générale d'un opérateur très important, le laplacien  $\Delta$ . Nous avons noté le rôle de cette opération fondamentale, au chapitre IV, mais nous n'avions pu en donner l'expression en géométrie affine ; seules les définitions métriques vont nous permettre d'atteindre ce résultat.

## II. — L'opérateur laplacien $\Delta$ .

En axes cartésiens orthogonaux, l'opérateur laplacien s'exprime par la somme des dérivées secondes :

$$(VII. 6) \quad \Delta V = \sum_k \frac{\partial^2 V}{(\partial x^k)^2};$$

cet opérateur joue sur un scalaire  $V$ , et fournit un autre *scalaire*, car on écrit des équations de propagation d'ondes, des types suivants :

$$(VII. 7) \quad \begin{aligned} \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta V - K^2 V &= 0. \end{aligned}$$

Ces formules impliquent pour  $\Delta V$  la nécessité d'obtenir un scalaire, que l'on puisse évaluer au scalaire  $V$  lui-même.

L'opération (VII. 6) en axes orthogonaux peut s'interpréter comme la *divergence* d'un vecteur, défini lui-même par un *gradient*; en effet, en axes orthogonaux, la divergence d'un vecteur est la somme des dérivées :

$$(VII. 8) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} a &= \sum \frac{\partial a_i}{\partial x^i} \\ a_i &= \frac{\partial V}{\partial x^i} & \operatorname{div} \operatorname{grad} V &= \sum \frac{\partial^2 V}{(\partial x^i)^2}. \end{aligned}$$

Ces formules doivent être transcrites avec précaution : en axes orthogonaux nous n'avons pas à distinguer entre composantes covariantes ou contravariantes; toutes deux sont numériquement égales. Lorsque nous voulons écrire une formule générale, il faut faire attention à ces changements de variance.

Un gradient est un vecteur covariant; or, dans l'opération de divergence il nous faut la contravariance; nous prendrons donc :

$$(VII. 9) \quad a^i = \sum_k g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k}$$

la sommation avec les  $g^{ik}$  contravariants nous permet de faire remonter l'indice; ensuite, nous n'avons qu'à prendre la formule (VII. 5) pour obtenir la divergence du gradient, réduite à l'état scalaire :

$$(VII. 10) \quad \begin{aligned} \Delta V &= \operatorname{div} \operatorname{grad} V \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|g|} g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right). \end{aligned}$$

N'oublions pas que  $|g|$  est la valeur absolue du déterminant des  $g_{ik}$  covariants; si nous voulons tout exprimer en fonction des  $g^{ik}$  contravariants, nous remplacerons  $g$  par  $g'$  :

$$(VII. 11) \quad |g| = \frac{1}{|g'|} \quad g' = |g^{ik}|.$$

Nous allons vérifier cette formule pour les exemples de *coordonnées curvi-*

lignes orthogonales, définies au chapitre VI, § 4 d'une manière générale. Les  $g_{ik}$  et  $g^{ik}$  ont alors les valeurs :

$$(VII. 12) \quad g = |g_{ik}| = \begin{vmatrix} e_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^2 \end{vmatrix} = (e_1 e_2 e_3)^2$$

$$g' = |g^{ik}| = \begin{vmatrix} e_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e_3^{-2} \end{vmatrix} = (e_1 e_2 e_3)^{-2};$$

tout s'exprime en fonction des trois unités de longueur locales  $e_1, e_2, e_3$  suivant les trois axes curvilignes. Le déplacement d'indices (VII. 9) se réduit à :

$$(VII. 13) \quad a^i = e_i^{-2} \frac{\partial V}{\partial x^i}$$

et l'opération du laplacien se détaille ainsi :

$$(VII. 14) \quad \Delta V = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial V}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{e_1 e_3}{e_2} \frac{\partial V}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial V}{\partial x^3} \right) \right].$$

C'est bien sous cette forme qu'on trouve la formule développée dans les traités d'analyse vectorielle; nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur la comparaison des définitions vectorielles usuelles et de nos notations tensorielles.

### III. — Exemples d'application.

Nous allons reprendre les types de coordonnées curvilignes et voir comment s'applique la formule (VII. 5) de la divergence scalaire et celle (VII. 14) du laplacien; dans les mêmes conditions d'orthogonalité (VII. 12) la *divergence* (VII. 5) *scalaire* s'écrit :

$$(VII. 15) \quad d = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \Delta V = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} (e_1 e_2 e_3 a^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (e_1 e_2 e_3 a^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (e_1 e_2 e_3 a^3) \right].$$

Prenons d'abord les *coordonnées cylindriques* définies au chapitre VI, § 3 (fig. VI. 2); nous avons :

$$(VII. 16) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$e_1 = 1 \quad e_2 = r \quad e_3 = 1, \quad g = r^2, \quad \sqrt{g} = r.$$

L'opération de divergence ramenée à un scalaire (VII. 15) donne :

$$(VII. 17) \quad d = \frac{1}{r} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (r a^i) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a^1) + \frac{\partial a^2}{\partial \theta} + \frac{\partial a^3}{\partial z}.$$

Les composantes  $a^1, a^2, a^3$  d'un vecteur sont automatiquement définies comme le seraient les composantes de vitesse  $\frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ;  $a^1$  et  $a^3$  sont donc des vitesses linéaires et  $a^2$  une *vitesse angulaire*. Nous verrons plus

loin que ces définitions ne sont pas celles qu'on emploie d'ordinaire en géométrie vectorielle.

Pour le *laplacien*, nous obtenons, par (VII. 14) :

$$\begin{aligned} \text{(VII. 18)} \quad \Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Appliquons encore nos formules aux *coordonnées sphériques* du chapitre VI, § 3, figure VI. 3 (éq. VI. 22-24) :

$$\begin{aligned} \text{(VII. 19)} \quad ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ e_1 &= 1 \quad e_2 = r \quad e_3 = r \sin \theta \quad \sqrt{g} = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

La *divergence*, rendue *scalaire*, s'écrit :

$$\text{(VII. 20)} \quad d = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (r^2 \sin \theta \cdot a^i) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a^1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a^2) + \frac{\partial a^3}{\partial \varphi}.$$

Comme dans l'exemple précédent, nos conventions nous ont conduit à définir  $a^1, a^2, a^3$  de telle sorte que  $a^1$  soit homogène à une vitesse linéaire, tandis que  $a^2$  et  $a^3$  seraient des vitesses angulaires. Le *laplacien* (VII. 14) nous donne :

$$\begin{aligned} \text{(VII. 21)} \quad \Delta U &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien les formules classiques dans ces deux exemples élémentaires.

#### IV. — Comparaison entre les notations vectorielles usuelles et les notations tensorielles; différences essentielles des définitions.

Nous venons de souligner la nature géométrique des conventions auxquelles nous a conduit la méthode systématique des tenseurs; précisons ce fait, dans l'exemple des *coordonnées orthogonales*; nous avons, le long d'un axe  $x^k$ , une unité de longueur locale :

$$\text{(VII. 22)} \quad e_k = \sqrt{g_{kk}} = \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}}$$

et tous les  $g_{ik}$  ou  $g^{ik}$  sont nuls, lorsque  $i$  diffère de  $k$ . Un vecteur  $\vec{a}$  est alors défini par ses composantes covariantes  $a_k$  ou contravariantes  $a^k$  :

$$\text{(VII. 23)} \quad a_k = e_k^2 a^k.$$

La longueur du vecteur est donnée par son carré :

$$\text{(VII. 24)} \quad |a|^2 = \sum_{ik} g_{ik} a^i a^k = \sum_k g_{kk} (a^k)^2 = \sum_k (e_k a^k)^2 = \sum_k \left( \frac{a_k}{e_k} \right)^2.$$

En géométrie vectorielle, l'usage s'est établi différemment. On se limite au cas exclusif des coordonnées orthogonales ; les coordonnées obliques ne sont jamais employées comme systèmes de référence ; or c'était surtout pour le cas oblique qu'il était important de distinguer entre composantes covariantes et contravariantes (chap. VI, § 3) ; dans les cas d'orthogonalité, on peut représenter un vecteur par un seul jeu de composantes, prises en vraie grandeur :

$$(VII. 25) \quad A_k = e_k a^k = e_k^{-1} a_k = \sqrt{a_k a^k}.$$

La longueur du vecteur sera donc, au carré :

$$(VII. 26) \quad |a|^2 = \sum_k A_k^2.$$

Reprenons l'exemple d'une vitesse ; un tel vecteur était représenté par des composantes contravariantes dont les unes étaient des vitesses linéaires, et les autres des vitesses angulaires, dans les exemples du paragraphe précédent. Si l'on se réfère aux notations vectorielles usuelles (VII. 25) on prendra comme composantes les vitesses linéaires, projetées suivant les diverses directions d'axes locaux.

En coordonnées cylindriques :

$$(VII. 27) \quad A_1 = a_r = a^1 \quad A_2 = a_\theta = r a^2 \quad A_3 = a_z = a^3.$$

En coordonnées sphériques :

$$(VII. 28) \quad A_1 = a_r = a^1 \quad A_2 = a_\theta = r a^2 \quad A_3 = a_\varphi = r \sin \theta a^3.$$

De telles conventions conduisent à des modifications profondes dans toutes les formules différentielles ; ainsi le *gradient* devra être construit de manière à constituer un vecteur, représenté par ses composantes en vraie grandeur ; on prend donc :

$$(VII. 29) \quad \vec{\Lambda} = \text{grad } V \quad \text{avec} \quad \Lambda_k = \frac{1}{e_k} \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Pour le *rotationnel*, nous avons une formule très simple, et de structure uniforme dans tous les systèmes d'axes :

$$(VII. 2) \quad r_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}.$$

Dans cette formule, il faut remplacer les  $a_i$  par les  $A_i$  tirés de (VII. 25) et ajouter des coefficients qui rendent les  $r_{ik}$  homogènes ; cela donne :

$$(VII. 30) \quad R_{ik} = \frac{r_{ik}}{e_i e_k} = \frac{1}{e_i e_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} (e_k A_k) - \frac{\partial}{\partial x^k} (e_i A_i) \right].$$

Pour la *divergence*, une correction analogue est nécessaire ; on prend donc la divergence scalaire de notre formule (VII. 15) et l'on en tire :

$$(VII. 31) \quad d = \text{div } A = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} (A_1 e_2 e_3) + \frac{\partial}{\partial x^2} (A_2 e_1 e_3) + \frac{\partial}{\partial x^3} (A_3 e_1 e_2) \right].$$

Nous avons écrit cette formule pour 3 dimensions ; la généralisation est évidente. Dans la formule du laplacien, aucun changement ; les vecteurs en sont éliminés : c'est un mode de formation du scalaire  $\Delta V$  tiré du scalaire  $V$ .

Nous indiquerons quelques références à divers traités classiques, pour permettre au lecteur de vérifier l'exactitude des affirmations que nous venons d'indiquer <sup>(1)</sup>.

A titre d'exemple, prenons l'expression de la divergence en coordonnées sphériques : nous l'avons écrite en (VII. 20) avec les composantes contravariantes du vecteur  $a^k$  ; les composantes de ce vecteur, en vraie longueur, dans les directions  $r, \theta, \varphi$  ont été données en (VII. 28) ; portons-les dans la divergence (VII. 20) et nous trouvons :

$$(VII. 32) \quad d = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

c'est bien la formule que l'on trouve partout.

Dans beaucoup de traités, on parle d'ailleurs peu des équations en axes curvilignes ; nous ferons donc une référence particulière à trois ouvrages <sup>(2)</sup>, où le problème est complètement discuté, pour les axes orthogonaux.

Ces auteurs appellent  $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}$  et  $\frac{1}{h_3}$  les longueurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$  des unités locales suivant les trois axes curvilignes orthogonaux. Leurs formules concordent alors exactement avec celles que nous avons indiquées dans ce paragraphe.

## V. — Le problème du transport des étalons de longueur ; invariance de jauge.

Lorsque nous avons introduit une métrique (chap. VI, § 2), il nous a fallu admettre, en chaque point de l'espace, un *étalon de longueur orientable*, que l'on puisse appliquer à volonté sur les divers axes, ou sur toute direction oblique. Cet étalon restait attaché à un point donné P ; si l'on passait à un point P' voisin, on trouvait un autre étalon de longueur, différent du premier. Ces postulats nous ont suffi jusqu'ici ; nous avons défini les opérateurs div et rot sans métrique, en espace affine ; grâce à la métrique locale (non transportable) nous avons pu ajouter l'opérateur laplacien  $\Delta$  ; les opérations de déplacements d'indice et la densité volumétrique  $\sqrt{|g|}$  ont donc déjà étendu le champ d'action.

Pour aller plus loin, il nous faut discuter le *transport des unités de longueur* ; que pouvons-nous dire, *a priori* ? Nous admettrons la continuité, de sorte que le mètre de l'observateur en P ne diffère pas trop du mètre employé par son voisin en P' ; rien ne nous dit que ces deux mètres seront nécessairement identiques. Soit  $\delta x^1 \dots \delta x^r$  le déplacement PP', nous pour-

<sup>(1)</sup> J. HADAMARD. *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, t. 1. Hermann, Paris, 1927, V<sup>e</sup> partie, chap. III, p. 469. — P. APPELL. *Mécanique rationnelle*, t. 1, 3<sup>e</sup> éd. Gauthier-Villars, Paris, 1909, chap. I. — H. BOUASSE. *Mécanique rationnelle*. Delagrave, chap. II. — G. BRUHAT. *Cours d'électricité*. Masson, 1934, chap. I. — G. BRUHAT. *Cours de mécanique physique*. Masson, 1934, chap. I.

<sup>(2)</sup> LEIGH PAGE. *Introduction to theoretical physics*. Van Nostrand, New-York, 1929, chap. I. — G. JOOS. *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akad. Verlag, Leipzig, 1934, 2<sup>e</sup> éd. p. 35. — PH. FRANK et R. VON MISES. *Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Vieweg, Braunschweig, 1930, chap. II, p. 82.



rons avoir une variation  $\delta l$  de la longueur d'un segment  $l$ , lorsqu'on le transportera de  $P$  en  $P'$ ; cette variation sera proportionnelle aux déplacements  $\delta x^k$  (condition de continuité) et nous poserons :

$$(VII. 33) \quad \delta l = l \sum_k f_k \delta x^k;$$

$\delta l$  est évidemment proportionnel à la longueur  $l$  du segment.

Cette formule introduit, en chaque point, un certain *vecteur covariant fondamental*  $f_k$ , qui définit les conditions de *transport du mètre*, ou suivant un terme souvent employé de *transport de la jauge*, unité de longueur.

Devons-nous conserver ce vecteur  $f_k$  de transport du mètre, ou bien pouvons-nous l'éliminer ? Tout dépend de la question d'*intégrabilité*. Transportons notre mètre le long d'un parcours fermé ABCDA, bâti sur deux déplacements  $\delta x^1$  et  $\delta x^2$  (fig. VII. 1); nous revenons au point A avec une certaine variation  $dl$  qu'il faut évaluer :

$$\frac{dl}{l} = \sum_{ABCD} f_k dx^k$$

nous avons à prendre la circulation de  $f_k$  sur le contour fermé; c'est calculer le rotationnel de  $f$  (chap. IV, §§ 2. et 4, chap. V, § 8) :

$$(VII. 34) \quad \frac{dl}{l} = (\text{rot } f)_{12} \delta x^1 \delta x^2 = \left( \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) \delta x^1 \delta x^2.$$

Si le rotationnel est identiquement nul, nous revenons au point de départ avec la même unité de longueur; mais si le rotationnel n'est pas nul, notre

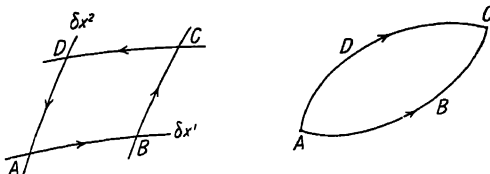


Fig. VII. 1.

unité de longueur sera changée, d'une quantité d'autant plus grande que nous aurons fait un circuit embrassant une surface plus étendue. H. Weyl a insisté sur le rôle possible de ces *variations de jauge*, mais il ne semble pas qu'on doive leur attribuer une grande importance en physique.

Si le rotationnel de  $f$  n'est pas nul, nous ne pouvons pas mettre tous nos étalons de longueur en accord; suivant que nous irons de A en C par le chemin ABC ou par la route ADC (fig. VII. 1) nous trouverons un résultat différent; force nous est de conserver nos mètres locaux, mal ajustés les uns sur les autres.

Les choses vont autrement, si le rotationnel de  $f$  est nul,  $\text{rot } f = 0$ , de sorte qu'on puisse poser  $f_k = \frac{\partial S}{\partial x^k}$ . Dans ce cas, nous pouvons *transporter notre mètre* de A en C par n'importe quelle route, le résultat est toujours le même; nous pourrions donc unifier tous les étalons de longueur dans l'espace entier; lorsque nous les aurons ainsi mis en accord, le transport d'un

segment  $l$  ne s'accompagnera plus d'aucune variation de longueur. Nous aurons réalisé l'*invariance de jauge* (en allemand *Eichinvarianz*; en anglais *Gauge invariance*) :

$$(VII. 35) \quad f_k \equiv 0.$$

Cette condition, nous l'admettrons désormais, et nous obtiendrons ainsi l'*espace de Riemann*, dans lequel notre *mètre* est, en chaque point, *orientable* en tous sens, et *en outre transportable* à distance.

Il va falloir maintenant envisager les conséquences de ce postulat sur nos problèmes de transport parallèle de vecteurs; nous aurons ensuite à étudier sous quelles conditions le transport parallèle peut être réalisé à distance, ce qui nous conduira à définir une courbure d'univers.

## VI. — Dérivées covariantes en géométrie métrique, dans l'espace de Riemann. Symboles de Christoffel.

Nous avons admis explicitement, dans notre définition de l'espace de Riemann, que nous possédions un *étalon de longueur transportable*, le même en tous points de notre espace. Cette condition va nous permettre de définir les coefficients  $\Gamma$  du transport parallèle, que nous avons introduits arbitrairement dans l'espace affine (Chap. V). Une condition essentielle du *transport parallèle d'un vecteur* sera en effet que *la longueur de ce vecteur reste inaltérée*. Prenons un vecteur  $u^i$  en un point P, de coordonnées  $x^i$  et transportons ce vecteur, parallèlement à lui-même, en un point voisin P' ( $x^i + dx^i$ ). Nous devons écrire que l'accroissement vrai  $Du^i$  de ce vecteur, au cours du transport, est nul, et nous utiliserons l'équation (v. 9) qui définit cette condition :

$$(VII. 36) \quad \begin{aligned} Du^i &= du^i + \sum_{hl} \Gamma_{hl}^i u^h dx^l = 0 \\ du^i &= - \sum_{hl} \Gamma_{hl}^i u^h dx^l. \end{aligned}$$

Les  $du^i$  représentent les variations qu'il faut donner aux valeurs numériques des composantes du vecteur, pour réaliser ce transport parallèle. Ecrivons maintenant que la longueur du vecteur est inaltérée. Au point P, nous avons :

$$(VII. 37) \quad |u|^2 = \sum_{ik} g_{ik} u^i u^k.$$

Cette expression ne doit pas varier dans le transport PP' :

$$d|u|^2 = \sum_{ik} [dg_{ik} u^i u^k + g_{ik} du^i u^k + g_{ik} u^i du^k] = 0.$$

Les  $du^i$  et  $du^k$  se tirent de (VII. 36) ce qui nous donne :

$$(VII. 38) \quad \sum_{ikh} [dg_{ik} u^i u^k - g_{ik} u^k \Gamma_{hl}^i u^h dx^l - g_{ik} u^i \Gamma_{hl}^k u^h dx^l] = 0.$$

Les indices  $i, k, h, l$ , étant muets, nous pouvons les échanger sans incon-

venient ; dans le second terme nous échangerons  $i$  et  $h$  ; dans le troisième terme,  $k$  et  $h$  ; nous faisons ainsi apparaître  $u^i u^k$  en facteur commun.

La relation (VII. 38) doit être tout à fait générale, et s'appliquer à n'importe quel vecteur  $u$  arbitraire. Il est donc indispensable que tous les facteurs de  $u^i u^k$  soient séparément nuls : nous en tirons :

$$dg_{ik} - \sum_{hl} g_{hk} \Gamma_{il}^h dx^l - \sum_{hl} g_{ih} \Gamma_{kl}^h dx^l = 0$$

ce qui nous donne :

$$(VII. 39) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \sum_h (g_{hk} \Gamma_{il}^h + g_{ih} \Gamma_{kl}^h).$$

La formule nous conduit à introduire de nouveaux coefficients  $\Gamma_{k,il}$  et  $\Gamma_{l,ik}$  avec trois indices en bas ; nous poserons :

$$(VII. 40) \quad \Gamma_{k,il} = \sum_h g_{kh} \Gamma_{il}^h.$$

Ces nouveaux  $\Gamma$  se déduisent des anciens par la descente d'un indice, exactement suivant les formules (VI. 38) que nous avons admises pour les tenseurs ; n'oublions pourtant pas que les  $\Gamma$  ne sont pas des tenseurs.

Nos nouveaux  $\Gamma_{k,il}$  sont symétriques par rapport aux deux indices  $il$  puisque les  $\Gamma_{il}^h$  sont symétriques. L'inversion de la formule (VII. 40) se fait automatiquement :

$$(VII. 41) \quad \Gamma_{il}^h = \sum_k g^{hk} \Gamma_{k,il}.$$

Notre formule (VII. 39) s'écrit maintenant :

$$(VII. 42) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{l,ik}.$$

Ecrivons les formules analogues, obtenues en échangeant les indices  $i, k, l$ .

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{l,ik}$$

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = \Gamma_{l,ik} + \Gamma_{i,kl}.$$

En écrivant ces formules, nous avons tenu compte de la symétrie des  $g$  et des  $\Gamma$ . Par addition et soustraction, nous trouvons alors la *formule fondamentale* :

$$(VII. 43) \quad 2\Gamma_{l,ik} = \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 2\Gamma_{l,ik}.$$

Toute la déduction repose sur l'hypothèse que notre étalon de longueur est transportable d'un point à un autre, et que le transport parallèle d'un vecteur ne modifie pas sa longueur vraie.

Les symboles  $\Gamma$ , que nous venons de définir ainsi, sont appelés symboles de Christoffel ; on les écrit souvent d'une manière un peu différente :

SYMBOLE DE CHRISTOFFEL DE PREMIÈRE ESPÈCE :

$$(VII. 44) \quad \Gamma_{l,ik} = [\begin{smallmatrix} l \\ i \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} k \end{smallmatrix}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right].$$

SYMBÔLE DE CHRISTOFFEL DE SECONDE ESPÈCE :

$$(VII. 43) \quad \{^h_{ik}\} = \Gamma^h_{ik} = \sum_l g^{hl} \Gamma_{l,ik} = \frac{1}{2} \sum_l g^{hl} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right].$$

Les notations  $\Gamma$  de Weyl paraissent plus pratiques, parce qu'elles placent les indices en des positions haut et bas qui correspondent à nos conventions : il y a à faire une sommation sur un indice répété en haut et en bas dans une formule. Les  $\Gamma$  ne sont pas des tenseurs, mais s'emploient dans les sommations d'une manière semblable.

Nous avons donné en détail, dans ce paragraphe, le calcul complet ; à vrai dire, tout peut être réduit à quelques mots ; lors du déplacement parallèle, les variations vraies  $Du^i$  des composantes d'un vecteur sont nulles (VII. 36). D'autre part nous voulons que le carré  $|u|^2$  du vecteur soit invariant (VII. 37). Il faut donc écrire :

$$(VII. 38 \text{ bis}) \quad D|u|^2 = D(\sum_{ik} g_{ik} u^i u^k) = 0,$$

$D$  représentant les accroissements vrais, contenant les facteurs correctifs  $\Gamma$  ; la condition (VII. 38 bis) correspond à (VII. 38). Du moment que les  $Du^i$  sont nuls, la condition (VII. 38 bis) entraîne :

$$(VII. 39 \text{ bis}) \quad Dg_{ik} = 0.$$

C'est exactement la condition que nous avons retrouvée en (VII. 39). Le calcul que nous avons refait ne servait qu'à retrouver l'expression de la dérivée covariante d'un tenseur  $g_{ik}$  covariant ; tout se réduit donc à ceci : en vertu de l'invariance de *jauge* (VII, § 5) les dérivées covariantes des  $g_{ik}$  sont nulles.

**VII. — Les dérivées covariantes des  $g_{ik}$   
et du déterminant  $g$  sont nulles ;  
toutes les densités ou capacités scalaires  
ont des dérivées covariantes nulles.**

Le résultat que nous venons de souligner est donc le suivant :

$$(VII. 46) \quad \begin{aligned} \frac{Dg_{ik}}{Dx^l} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \sum_h \Gamma^h_{kl} g_{ih} - \sum_h \Gamma^h_{il} g_{hk} \\ &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{i,kl} - \Gamma_{k,il} = 0. \end{aligned}$$

Nous aurions pu écrire directement cette formule, sans calcul, en nous reportant à la règle de dérivation covariante (v. 18).

Nous allons tirer, de cette très importante formule, diverses applications ; tout d'abord, nous pouvons faire sur les dérivées covariantes, des déplacements d'indice de haut en bas, comme sur tous les tenseurs ; peu importe que ces déplacements aient lieu avant ou après dérivation ; ainsi, prenons les composantes covariantes  $a_i$  ou contravariantes  $a^i$  d'un vecteur  $a$  :

$$a_i = \sum_j g_{ij} a^j$$

et formons les dérivées covariantes :

$$(VII. 47) \quad \begin{aligned} a_{,k}^j &= \frac{D a^j}{D x^k} \\ a_{i,k} &= \frac{D a_i}{D x^k} = \sum_j \frac{D g_{ij} a^j}{D x^k} = \sum_j g_{ij} a_{,k}^j. \end{aligned}$$

La dérivée covariante du  $g_{ik}$  étant nulle, le déplacement d'indice faire avant ou après l'opération  $D$ ; à ce point de vue, et pour permuter les indices, les notations  $a_{,k}^j$  et  $a_{i,k}$  sont plus commodes que les expressions différentielles  $D$ .

Prenons un autre exemple, celui des *densités tensorielles*. Pour une densité scalaire  $\alpha$  nous avons obtenu en (v. 25) la formule de dérivation :

$$(VII. 48) \quad \frac{D \alpha}{D x^k} = \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} - \alpha \sum_h \Gamma_{kh}^h.$$

D'autre part, nous savons que  $\sqrt{|g|}$  est un type de densité, qui représente la densité de contenu volumétrique (vi. 62). Nous devons avoir pour  $\sqrt{|g|}$  la relation (vii. 48), ou encore la formule :

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{D \sqrt{|g|}}{D x^k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^k} - \sum_h \Gamma_{kh}^h$$

les dérivées sont du type logarithmique; nous multiplierons par 2 pour avoir les log de  $g$  :

$$(VII. 49) \quad \frac{D \log g}{D x^k} = \frac{\partial \log g}{\partial x^k} - 2 \sum_h \Gamma_{kh}^h$$

$g$  est un déterminant dont il faut prendre la dérivée suivant la méthode ordinaire :

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \cdot (\text{mineur de } g_{ij}) = g \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

d'après la règle indiquée en (v. 29) et la formule (vi. 12). La dérivée covariante de  $g$  s'écrit de même, mais il y faut faire figurer les  $\frac{D g_{ij}}{D x^k}$  covariants, qui sont tous nuls, de sorte que l'expression (vii. 49) est identiquement nulle; nous trouvons donc la *formule importante* :

$$(VII. 50) \quad \frac{\partial \log g}{\partial x^k} = 2 \sum_h \Gamma_{kh}^h = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

Nous allons faire une application immédiate de ce résultat, en calculant l'opérateur laplacien  $\Delta$ ; nous avons obtenu en (vii. 10) l'expression du laplacien :

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|g|} g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right) = \sum_{ik} \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right) + g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^i} \right]$$

en tenant compte de (vii. 50) cette formule se transforme :

$$(VII. 51) \quad \Delta V = \sum_{ikh} \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right) + g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \Gamma_{ih}^h \right] = \sum_{ik} \frac{D}{D x^i} \left( g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right).$$

En effet, prenons une dérivée covariante par rapport à  $x^j$  de  $\Sigma_k g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k}$  :

$$(VII. 52) \quad \Sigma_k \frac{D}{Dx^j} \left( g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right) = \Sigma_k \frac{\partial}{\partial x^j} \left( g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right) + \Sigma_{hk} \Gamma_{jh}^i g^{hk} \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Dans la formule (VII. 51) il y a une somme pour  $j = i$  ; il en résulte que, dans le dernier terme de (VII. 52), il faut faire  $j = i$  et que les indices sont tous muets ; on retrouve (VII. 51) en posant :

$$i = j \rightarrow h \qquad h \rightarrow i ;$$

les dérivées covariantes des  $g$  étant nulles, nous pouvons les faire sortir et écrire :

$$(VII. 53) \quad \Delta V = \Sigma_{ik} g^{ik} \frac{D^2 V}{Dx^i Dx^k}.$$

Ainsi, par l'emploi des dérivées covariantes, nous avons pu mettre le laplacien sous une forme simple.

La formule (VII. 50) a une grosse importance, car  $\sqrt{g}$  est le type des densités ; or, sa dérivée covariante est automatiquement nulle. Nous en concluons que *toutes les densités et capacités scalaires ont des dérivées covariantes nulles*. Ce point est intéressant à souligner, et nous permettra des démonstrations très directes, par la suite. Pour les dérivées de densités ou capacités scalaires, on se rappellera la relation (VII. 50), très souvent utile.

### VIII. — Conséquences géométriques et signification des règles de transport parallèle ; coordonnées géodésiques.

Toutes les conséquences géométriques du transport parallèle, en géométrie de Riemann, résultent directement de la condition (VII. 46) ; la variation vraie des  $g^{ik}$  est nulle ; leur dérivée covariante est nulle.

Nous avons déjà constaté, au paragraphe 6, le résultat suivant, dont nous sommes partis :

$$(VII. 54) \quad |u|^2 = C^{te} \qquad \text{transport parallèle.}$$

Le carré de la longueur d'un vecteur est inaltéré dans le transport parallèle.

Prenons maintenant deux vecteurs  $u$  et  $v$  et formons le produit scalaire :

$$(VII. 55) \quad (uv) = \Sigma_{ik} g_{ik} u^i v^k = C^{te} \qquad \text{transport parallèle.}$$

Ce résultat est évident puisque  $Dg_{ik}$  est nul et que  $Du^i$  ou  $Dv^k$  sont nuls dans un transport parallèle. Comme  $(u.v)$ ,  $|u|^2$  et  $|v|^2$  sont constants, l'angle  $(\widehat{uv})$  des deux vecteurs reste aussi constant dans ce transport, car cet angle est défini par la relation :

$$(VII. 56) \quad \cos(\widehat{uv}) = \frac{(u.v)}{\sqrt{|u|^2} \cdot \sqrt{|v|^2}} = C^{te} \qquad \text{transport parallèle.}$$

Nous avons appelé *ligne géodésique* une ligne dont la tangente satisfait à la condition de transport parallèle. La formule (vii. 56) conduit donc à la conclusion suivante : pour aller d'un point P à un point voisin P', nous suivrons une ligne géodésique ; lorsque nous passons de P en P' la tangente Pv vient en P'v' (fig. vii. 2) et ce glissement correspond à un transport parallèle.

Un vecteur  $u$  arbitraire fait, au point P, un angle  $\widehat{uv}$  avec le vecteur Pv transportons le vecteur  $u$  en P', parallèlement à lui-même ; le vecteur parallèle  $u'$  fait avec la tangente P'v' à la géodésique le même angle  $\widehat{u'v'}$ .

Pour réaliser un transport parallèle, nous déplacerons le vecteur  $u$  le long d'une géodésique, en conservant constants la valeur absolue du vecteur et son angle avec la géodésique.

Nous avons déjà indiqué au chapitre V la possibilité de choisir les coordonnées de telle sorte que, dans le voisinage immédiat d'un certain point P, les lignes coordonnées suivent des géodésiques. C'est ce qu'on obtient en faisant un changement de variables qui annule les dérivées premières des  $g$  et par suite aussi tous les symboles de Christoffel  $\Gamma$  de première et seconde espèce. Ce changement de variables, nous l'avons indiqué au chapitre V, § 2, éq. (v. 8). Nous utiliserons souvent cette propriété, qui nous permettra de simplifier certains calculs ; nous supposerons choisis des axes géodésiques, annulant les  $\Gamma$ , et nous pourrons ainsi alléger les démonstrations.

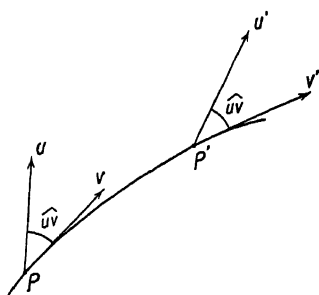


Fig. vii. 2.

Géodésique PP' ; la tangente  $v$  se transporte parallèlement de P en P'.

### IX. — Propriétés des géodésiques ; longueur minima.

Les géodésiques jouissent, dans l'espace de Riemann, d'une très intéressante propriété, celle d'être des lignes de longueur « stationnaire » ; si entre deux points A et B on trace diverses lignes, la plus courte ou la plus longue sera une géodésique. On parle souvent de *longueur minima*, ce terme est vrai pour les droites dans l'espace euclidien, mais dans des espaces courbes, on peut seulement affirmer la propriété de longueur stationnaire ; si

$$S = \int_A^B ds$$

est la longueur d'une courbe C allant de A à B, et

$$S + \delta S = \int_A^B (ds + \delta ds)$$

la longueur d'une courbe variée, voisine de la précédente, on pourra affirmer que :

$$(vii. 57) \quad \delta S = \int_A^B \delta ds = 0 \quad \text{si la courbe C est géodésique.}$$

Considérons la courbe C (fig. VII. 3) qui sera décrite, de A en B, par un point mobile; soit  $\lambda$  le paramètre servant de repère; un déplacement  $PP'$  sera représenté par :

$$dx^i = u^i d\lambda.$$

Prenons une courbe C géodésique; sa tangente se transporte parallèlement à elle-même, ce qui s'exprime par la condition que l'accroissement absolu de  $u^i$  soit nul :

$$Du^i = 0 \quad du^i = -\sum_{kl} \Gamma_{kl}^i u^k dx^l = -\sum_{kl} \Gamma_{kl}^i u^k u^l d\lambda$$

donc :

$$(VII. 58) \quad \frac{Du^i}{D\lambda} = \frac{\partial u^i}{\partial \lambda} + \sum_{kl} \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0;$$

c'est bien l'équation que nous avons donnée au chapitre V (eq. v. 41). Pour les composantes covariantes  $u_i$  de la tangente, nous aurons de même :

$$Du_k = 0 \quad du_k = \sum_{il} \Gamma_{il}^i u_i dx^l = \sum_{il} \Gamma_{il}^i u_i u^l d\lambda$$

$$(VII. 59) \quad \frac{Du_k}{D\lambda} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} - \sum_{il} \Gamma_{il}^i u_i u^l = 0.$$

Sur cette dernière équation, nous pouvons abaisser l'indice muet  $i$  sur  $\Gamma$  et le remonter sur  $u_i$ , car :

$$\sum_i \Gamma_{il}^i u_i = \sum_{ij} \Gamma_{il}^i u^j g_{ji} = \sum_j \Gamma_{j,kl} u^j.$$

Nous écrirons donc la dérivée absolue du vecteur  $u_k$  :

$$(VII. 60) \quad \frac{Du_k}{D\lambda} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} - \sum_{jl} \Gamma_{j,kl} u^j u^l = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} \sum_{jl} (\Gamma_{j,kl} + \Gamma_{l,kj}) u^j u^l = 0.$$

Le produit  $u^j u^l$  étant symétrique, nous regroupons ainsi les deux termes  $u^j u^l$  et  $u^l u^j$ . Tenons compte de (VII. 42) et nous trouvons :

$$(VII. 61) \quad \frac{Du_k}{D\lambda} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} \sum_{jl} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} u^j u^l = 0.$$

Telle est la forme la plus simple que l'on peut donner à l'équation d'une géodésique, et à la dérivée absolue d'un vecteur  $u_k$ .

Voyons maintenant le problème de la *longueur stationnaire*. Considérons une courbe APB qui sera supposée géodésique et une courbe variée voisine AQB :

$$(VII. 62) \quad \begin{array}{ll} P & \text{coordonnées } x^i(\lambda) \quad \text{vitesse } u^i(\lambda) = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} \\ Q & \text{coordonnées } x^i(\lambda) + \varepsilon y^i(\lambda) \quad \text{vitesse } u^i + \varepsilon v^i \end{array}$$

avec :

$$v^i = \frac{\partial y^i}{\partial \lambda}.$$



Si le paramètre auxiliaire  $\varepsilon$  est très petit, tandis que  $y(\lambda)$  est une fonction tout à fait arbitraire, notre point Q décrit une courbe variée quelconque, voisine de la géodésique C.

La longueur S de la courbe C est :

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\Sigma g_{ik} u^i u^k} d\lambda.$$

La variation de longueur sera :

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\delta(\Sigma g_{ik} u^i u^k)}{\sqrt{\Sigma g_{ik} u^i u^k}} d\lambda.$$

Le dénominateur est heureusement constant tout le long de la courbe C, car le vecteur  $u$  transporté parallèlement garde une longueur  $|u|$  constante ; nous sortirons donc ce terme hors de l'intégrale :

$$\begin{aligned} (\text{VII. 63}) \quad |u| \delta S &= \frac{1}{2} \int_A^B \delta(\Sigma g_{ik} u^i u^k) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_A^B \Sigma_{ikl} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \varepsilon y^l \cdot u^i u^k + g_{ik} u^i \cdot \varepsilon v^k + g_{ik} u^k \cdot \varepsilon v^i \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes sont égaux ; d'autre part  $v^k = \frac{\partial y^k}{\partial \lambda}$  ; échangeons les indices muets  $k$  en  $l$  dans le premier terme, et ensuite procédons à une intégration par parties ; la variation  $y^k$  étant nulle aux extrémités AB, il vient :

$$\begin{aligned} (\text{VII. 64}) \quad |u| \delta S &= \frac{1}{2} \int_A^B \Sigma_{ikl} \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \varepsilon y^k u^i u^l + 2 u_k \cdot \varepsilon \frac{\partial y^k}{\partial \lambda} \right] d\lambda \\ &= \int_A^B \Sigma_{ikl} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} u^i u^l - \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} \right] \varepsilon y^k d\lambda. \end{aligned}$$

En vertu de nos équations (VII. 61) tous ces termes sont identiquement nuls, ce qui prouve le caractère stationnaire de la géodésique, car  $\delta S$  est nul.

Le vecteur vitesse  $u'$  se déplace parallèlement à lui-même, tout du long de la géodésique ; sa longueur  $|u|$  reste constante ; si nous la prenons égale à l'unité, nous trouvons :

$$(\text{VII. 65}) \quad |u|^2 = \Sigma g_{ik} u^i u^k = 1 \quad ds^2 = d\lambda^2$$

le paramètre  $\lambda$  qui sert à décrire le parcours sur la courbe est alors simplement la longueur S de la courbe géodésique ; dans le cas où l'on n'utilise pas la condition (VII. 65), le paramètre  $\lambda$  est proportionnel à la longueur S mesurée suivant la géodésique.

## X. — Exemples.

Nous choisirons pour nos exemples les cas où les surfaces coordonnées sont orthogonales, de sorte que les  $g^{ij}$  et  $g_{ij}$  ne contiennent que les termes diagonaux, à deux indices égaux (chap. VI, § 4) :

$$g_{ij} = \delta_{ij} e_i^2 \quad g^{ij} = \frac{1}{g_{ii}}.$$

Prenons alors la formule (VII. 44) des symboles de Christoffel, de première espèce :

$$(VII. 44) \quad \Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right].$$

Si les trois indices  $i, j, k$  sont différents, tous les  $g$  qui figurent dans cette formule sont nuls, car ils ont toujours deux indices inégaux ; il nous reste donc seulement les cas suivants :

$$(VII. 66) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{i,jk} = 0 & \text{si } i \neq j \neq k \\ \Gamma_{i,kk} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} & i \neq k \\ \Gamma_{k,jk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^j} = \Gamma_{kk,j} & j \text{ pouvant être égal à } k. \end{array} \right.$$

Les symboles de Christoffel de seconde espèce (VII. 45) s'en déduisent aisément, en tenant compte du fait que les multiplicateurs  $g^u$  doivent avoir deux indices égaux :

$$(VII. 67) \quad \Gamma'_{jk} = \Sigma g^{iu} \Gamma_{i,jk} = g^{iu} \Gamma_{i,jk} = \frac{1}{g_{ii}} \Gamma_{i,jk};$$

donc :

$$(VII. 68) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma'_{jk} = 0 & \text{si } i \neq j \neq k \\ \Gamma'_{kk} = -\frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} & i \neq k \\ \Gamma'_{jk} = \frac{1}{2g_{kk}} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^j} = \Gamma'_{kj} & j \text{ pouvant être égal à } k. \end{array} \right.$$

Nous allons pouvoir écrire explicitement la variation vraie (ou absolue) d'un vecteur contravariant  $u^i$  pour un déplacement  $dx^k$  ; la formule (VII. 36) se simplifie de la manière suivante :

$$(VII. 69) \quad \begin{aligned} Du^i &= du^i + \Sigma \Gamma_{hk}^i u^h dx^k \\ &= du^i + \frac{1}{2g_{ii}} \left( \Sigma \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^h} (u^h dx^i + u^i dx^h) \right) - \frac{1}{2g^{ii}} \Sigma \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} u^k dx^k. \end{aligned}$$

Le transport parallèle se réalisera en égalant cette expression à zéro.

Comme exemple, prenons le cas d'un espace euclidien à 3 dimensions, où l'on utilise des coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$  que nous numérotions, dans cet ordre, 1, 2 et 3 (cf. fig. VI. 3) :

$$(VII. 70) \quad g_{11} = e_1^2 = 1 \quad g_{22} = e_2^2 = r^2 \quad g_{33} = e_3^2 = r^2 \sin^2 \theta.$$

Les formules de *transport parallèle* d'un vecteur contravariant sont alors les suivantes :

$$(VII. 71) \quad \begin{aligned} du^1 &= u^2 r d\theta + u^3 r \sin^2 \theta d\varphi \\ du^2 &= -\frac{u^1}{r} d\theta - \frac{u^2}{r} dr + u^3 \sin \theta \cos \theta d\varphi \\ du^3 &= -\frac{u^1}{r} d\varphi - \frac{u^3}{r} dr - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (u^2 d\varphi + u^3 d\theta). \end{aligned}$$

Dans ces coordonnées sphériques, la ligne des pôles présente une anomalie, car la longueur de l'unité  $e_3$  s'y annule :

$$g_{33} = e_3^2 = r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad \text{pour } \theta = 0 ;$$

c'est de là que provient, dans la formule de  $du^3$  le terme infini provoqué par  $\sin \theta$  au dénominateur.

Les composantes contravariantes peuvent nous servir à former les longueurs vraies des composantes du vecteur, projeté sur les trois lignes de coordonnées (chap. VII, § 4) ; nous n'aurons qu'à multiplier par les unités locales de longueur  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  pour trouver :

$$(VII. 72) \quad u_r = u^1 \quad u_\theta = r \cdot u^2 \quad u_\varphi = r \sin \theta u^3 ;$$

ce sont là les projections mesurées toutes trois en centimètres, unité commune de longueur ; lors d'un transport parallèle, ces composantes sont modifiées de la manière suivante :

$$(VII. 73) \quad \begin{aligned} du_r &= du^1 = u_\theta d\theta + u_\varphi \sin \theta d\varphi \\ du_\theta &= r \cdot du^2 + u^2 dr = -u_r d\theta + u_\varphi \cos \theta d\varphi \\ du_\varphi &= r \sin \theta du^3 + u^3 \sin \theta dr + u^3 r \cos \theta d\theta = -(u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) d\varphi. \end{aligned}$$

Là encore, nous avons obtenu les variations  $du_r$ ,  $du_\theta$ ,  $du_\varphi$  en vraie longueur. Ce retour aux composantes en vraie longueur a supprimé l'anomalie soulignée précédemment, sur la ligne des pôles  $\theta = 0$ . Les formules (VII. 73) sont d'une interprétation géométrique simple et correspondent exactement aux conditions élémentaires de transport d'un vecteur parallèlement à lui-même, en coordonnées sphériques. Nous laisserons au lecteur le soin de faire cette vérification ; il suffit d'exprimer  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_\varphi$  en fonction des projections  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  sur trois axes rectangulaires fixes, ces dernières projections restant constantes ; on voit immédiatement la conservation de la longueur du vecteur :

$$(VII. 74) \quad u_r du_r + u_\theta du_\theta + u_\varphi du_\varphi = 0.$$

Prenons maintenant un exemple différent, où nous aurons une courbure totale non nulle ; nous choisirons une sphère de rayon 1, dans un espace à 3 dimensions. Il suffira de garder les formules précédentes, en y faisant  $r = 1$  ;  $dr = 0$  ;  $u_r = 0$  ; sur cette surface à 2 dimensions, un vecteur n'a plus que deux composantes, qui sont  $u_\theta$  et  $u_\varphi$  en mesure vraie. Les formules (VII. 73) donnent :

$$(VII. 75) \quad \begin{aligned} du_\theta &= u_\varphi \cos \theta d\varphi \\ du_\varphi &= -u_\theta \cos \theta d\varphi. \end{aligned}$$

Nous allons voir, sur certains cas particuliers, comment s'opère le transport d'un vecteur parallèlement à lui-même, sur la surface de la sphère, lorsque ce vecteur est assujéti à rester toujours dans le plan tangent à cette sphère.

Sur la figure VII. 4 nous avons indiqué un circuit partant d'un point A sur l'équateur (angle  $\varphi_1$ ), allant en B (angle  $\varphi_2$ ) le long de l'équateur, puis remon-

tant de B au pôle P suivant un méridien et redescendant du pôle P en A par le méridien de A. Appelons  $\Phi$  la différence :

$$(vii. 76) \quad \Phi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Quelles variations des composantes du vecteur  $u$  allons-nous observer ?

De A en B le facteur  $\cos \theta$  reste nul, car  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , donc :

$$(vii. 77) \quad \text{de A à B} \quad du_0 = 0 \quad du_\varphi = 0.$$

Sur le méridien BP, aucune variation de l'angle  $\varphi$  ; donc :

$$(vii. 78) \quad \text{de B à P} \quad d\varphi = 0 \quad du_0 = 0 \quad du_\varphi = 0.$$

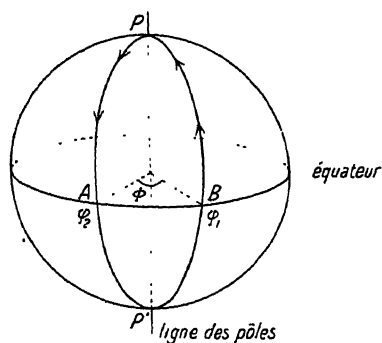


Fig. VII. 4.

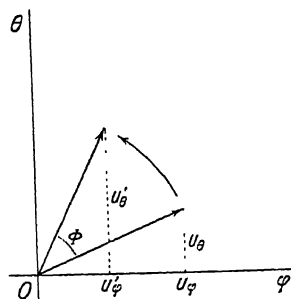


Fig. VII. 5.

Au pôle P, nous devons faire attention à tenir compte de la rotation  $\Phi$  sur l'angle  $\varphi$  ;  $\cos \theta$  est ici égal à 1 ; nous trouvons une variation finie :

$$(vii. 79) \quad \Delta u_0 = \int_{\Phi} u_{\varphi} d\varphi \quad \Delta u_{\varphi} = - \int_{\Phi} u_0 d\varphi.$$

Nous redescendons de P en A sur un méridien, sans autre changement puisque  $d\varphi$  est ici nul. La variation des deux composantes  $u_0$  et  $u_{\varphi}$  est donc donnée par (vii. 79) ; or ces formules représentent, dans un plan  $\theta, \varphi$  une rotation du vecteur  $u$  d'un angle  $\Phi$ , comme le montre la figure VII. 5.

Nous revenons donc, après avoir parcouru le circuit fermé ABPA, avec un vecteur  $u$  qui a tourné d'un angle  $\Phi$  fini ; la sphère est une surface courbe, sur laquelle notre critérium de transport d'un vecteur en circuit fermé se justifie entièrement.

Le transport parallèle consiste essentiellement, nous l'avons souligné, en un transport du vecteur le long d'une géodésique, de telle sorte que la longueur du vecteur et son angle avec la géodésique restent constants. Sur la sphère, ce sont les grands cercles qui forment les géodésiques. Dans l'exemple précédent, nous avons justement choisi un circuit formé de trois grands cercles : l'équateur et deux méridiens ; pendant le transport le long de ces grands cercles, nous n'avons observé aucun changement des composantes ; le vecteur

gardait même longueur et même angle. La rotation s'est produite lorsqu'au pôle nous sommes passés d'un méridien à l'autre, ce qui modifiait les valeurs des composantes, en laissant le vecteur invariable dans le plan tangent au pôle.

# **XI. — La courbure d'un espace de Riemann. Tenseur de Riemann-Christoffel.**

Nous avons étudié, à la fin du chapitre V, les problèmes de courbure de l'espace affine. Toutes ces questions vont être reprises maintenant avec une précision nouvelle. Dans l'espace affine, nous avons introduit des coefficients arbitraires  $\Gamma$  pour définir le transport parallèle des tenseurs. En géométrie métrique, le *postulat d'invariance de jauge* qui caractérise l'espace de Riemann, nous a permis d'exprimer les  $\Gamma$  en fonction des dérivées des  $g_{ik}$  du tenseur métrique fondamental. Les  $R^i_{j, kh}$  qui représentent la courbure de l'espace sont donc eux aussi complètement fixés; les expressions établies à la fin du chapitre V (éq. v. 52) font intervenir les dérivées premières des  $\Gamma$ , donc les dérivées secondes des  $g_{ik}$ .

Récrivons les deux formules de *transport en circuit fermé* pour un vecteur contravariant  $u'$  ou covariant  $u_i$ , d'après (v. 51 et 55) :

$$\begin{aligned} \delta u' &= -\frac{1}{2} \sum_{j, kh} \int \int R^i_{j, kh} u^j ds^{kh} \\ \delta u_i &= \frac{1}{2} \sum_{i, kh} \int \int R_{i, kh} u_i ds^{kh}. \end{aligned}$$

Ces deux formules étaient irréductibles en géométrie affine, car rien ne nous permettait de déplacer les indices d'un vecteur; mais en géométrie métrique, le tenseur  $g$  de la métrique nous donne le moyen de passer des composantes covariantes aux composantes contravariantes d'un même vecteur ou tenseur. Dans la première formule, multiplions les deux membres par  $g_{il}$  et sommons sur  $i$  nous obtenons :

$$(vii. 81) \quad \delta u_i = \sum_i g_{il} \delta u^l = -\frac{1}{2} \sum_{i, kh} \int \int R_{i, kh} g_{il} u^l ds^{kh} = -\frac{1}{2} \sum_{j, kh} \int \int R_{ij, kh} u^j ds^{kh}.$$

Dans la seconde formule, remplaçons  $u_i$  par  $\sum_j g_{ij} u^j$ , puis effectuons la somme  $\sum_i R_{i, kh} g_{ij}$  qui donne  $R_{jl, kh}$ , nous trouvons :

$$(vii. 82) \quad \delta u_i = \frac{1}{2} \sum_{j, kh} \int \int R_{jl, kh} u^j ds^{kh}.$$

Comparons ces deux formules (vii. 81) et (vii. 82); elles ne diffèrent que par le signe et l'échange des deux indices  $ij$ ; nous voici donc en possession d'un résultat important :

$$(vii. 83) \quad R_{ij, kh} = -R_{ji, kh}.$$

Nous savions déjà (chap. V) que  $R$  était antisymétrique en  $kh$ ; il est encore antisymétrique en  $jl$ , et satisfait en outre aux relations (v. 63); cet ensemble de conditions va restreindre beaucoup le nombre des composantes de ce *tenseur de courbure de Riemann-Christoffel*. Les relations (vii. 83) peuvent se retrouver par un calcul algébrique direct, mais le raisonnement géométrique précédent est bien plus clair et fait saisir le rôle de ces conditions nouvelles.

Cette antisymétrie en  $lj$  donne le mécanisme de la conservation de la longueur d'un vecteur; d'après l'invariance de jauge, un transport parallèle conserve le carré  $|u|^2$  de la longueur d'un vecteur  $u$ ; tout le calcul du paragraphe 6 de ce chapitre est basé sur cette remarque. Si le transport parallèle *conserve*  $|u|^2$  *inchangé*, il en sera *a fortiori* de même pour un *transport en circuit fermé*; or, nous avons des variations  $\delta u'$  des composantes; la variation du carré de la longueur sera :

$$(vii. 84) \quad \delta |u|^2 = \sum_{ik} (g_{ik} u^i \delta u^k + g_{ik} u^k \delta u^i) = 2 \sum_{ik} g_{ik} u^i \delta u^k$$

puisque nous avons fait un circuit fermé et sommes revenus au point de départ, les  $g_{ik}$  n'ont pas changé; la variation de  $|u|^2$  est nulle si le vecteur  $u^i$  et la variation  $\delta u^k$  sont orthogonaux; c'est bien ce que montre (vii. 84); nous devons donc vérifier si la condition suivante est remplie :

$$\delta |u|^2 = 2 \sum_{ik} g_{ik} u^i \delta u^k = 2 \sum_i u^i \delta u_i = 0;$$

or, la dernière somme s'exprime aisément, d'après (vii. 81) :

$$(vii. 85) \quad \sum_i u^i \delta u_i = -\frac{1}{2} \sum_{ij, kh} \int \int R_{ij, kh} u^i u^j ds^{kh}.$$

Cette expression est bien nulle, d'après la relation d'antisymétrie (vii. 83), donc cette antisymétrie est essentielle pour assurer la conservation de longueur en circuit fermé.

Le tenseur  $R_{ij, kh}$  à 4 indices covariants est important par ses propriétés d'antisymétrie vis-à-vis des deux groupes d'indices. Nous calculerons donc son expression complète. Partons de (v. 52) :

$$(vii. 86) \quad \begin{aligned} R_{ij, kh} &= \sum_i g_{il} R_{j, kh}^i = \sum_{ir} g_{li} \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jh}^i - \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{rk}^i \Gamma_{jh}^r - \Gamma_{rh}^i \Gamma_{jk}^r \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{l, jh} - \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma_{l, jk} + \sum_i \left( \Gamma_{jk}^i \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \Gamma_{jh}^i \frac{\partial g_{li}}{\partial x^h} \right) \\ &\quad + \sum_r (\Gamma_{l, rk} \Gamma_{jh}^r - \Gamma_{l, rh} \Gamma_{jk}^r) \end{aligned}$$

en introduisant les  $\Gamma$  à 3 indices inférieurs, d'après (vii. 40). Appelons  $r$  tous les indices muets, dans les deux dernières sommes; les termes se regroupent, car il faut tenir compte de (vii. 42) :

$$(vii. 87) \quad \Gamma_{l, rk} - \frac{\partial g_{lr}}{\partial x^k} = -\Gamma_{r, lk}.$$

Nous trouvons donc :

$$\begin{aligned}
 (\text{vii. 88}) \quad R_{lj, kh} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{l, jh} - \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma_{l, jk} + \Sigma [\Gamma_{r, lh} \Gamma_{jk}^r - \Gamma_{r, lk} \Gamma_{jh}^r] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{lh}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^h \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^h \partial x^l} \right] \\
 &\quad + \Sigma_{rs} g^{rs} [\Gamma_{r, lh} \Gamma_{s, jk} - \Gamma_{r, lk} \Gamma_{s, jh}].
 \end{aligned}$$

Cette formule fait apparaître une symétrie par rapport aux deux groupes d'indices :

$$(\text{vii. 89}) \quad R_{lj, kh} = R_{kh, lj}$$

en plus des antisymétries en  $lj$  ou  $kh$ , et des relations relatives à la permutation circulaire des trois derniers indices, comme en (v. 63) :

$$(\text{vii. 90}) \quad R_{lj, kh} + R_{lk, hj} + R_{lh, jk} = 0.$$

Grâce à ces diverses symétries, on peut démontrer qu'il y a exactement  $\frac{1}{12} r^2(r^2 - 1)$  composantes distinctes, dans un espace à  $r$  dimensions.

Les différents auteurs ne sont pas toujours d'accord sur la manière de placer les indices, pour les  $R_{lj, kh}$  et les  $\Gamma_{l, rk}$  ; l'ordre que nous avons choisi est celui qu'emploie H. Weyl, mais presque chaque auteur a le sien ; cela se traduit par quelques changements de signes dans les formules, par suite des antisymétries et symétries que nous avons signalées. A titre de renseignement, Appell et Thiry donnent le tableau de correspondance des notations, que nous reproduisons ici en le complétant :

AUTEURS	COMPOSANTES MIXTES	COMPOSANTES COVARIANTES	TENSEUR CONTRACTÉ
Cet ouvrage. . . . .	$R_{\beta, \gamma\delta}^\alpha$	$R_{\alpha\beta, \gamma\delta}$	$R_{\beta\delta} = \Sigma_\lambda R_{\beta, \lambda\delta}^\lambda$
Appell-Thiry . . . . .	$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$	$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$R_{\beta\gamma} = \Sigma_\lambda R_{\beta, \gamma\lambda}^\lambda$
Weyl. . . . .	$F_{\beta\gamma\delta}^\alpha$	$F_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$R_{\beta\delta} = \Sigma_\lambda F_{\beta\lambda\delta}^\lambda$
Eddington } Becquerel }	$U_{\beta\gamma\delta}^\alpha$	$B_{\beta\gamma\delta\alpha}$	$G_{\beta\gamma} = \Sigma_\lambda B_{\beta\lambda\gamma}^\lambda$
Galbrun . . . . .	$R_{\beta\delta\gamma}^\alpha$	$R_{\alpha\beta\delta\gamma}$	$R_{\beta\gamma} = \Sigma_\lambda R_{\beta\lambda\gamma}^\lambda$
Juvet. . . . .	$R_{\beta\delta\gamma}^\alpha$	$R_{\beta\alpha\delta\gamma}$	$R_{\beta\gamma} = \Sigma_\lambda R_{\beta, \gamma\lambda}^\lambda$
Cartan . . . . .	$R_{\beta, \delta\gamma}^\alpha$	$R_{\beta\alpha, \delta\gamma}$	$R_{\beta\delta} = \Sigma_\lambda R_{\beta\delta\lambda}^\lambda$
Christoffel et Bianchi.	$(\beta\alpha; \delta\gamma)$	$(\beta\alpha, \delta\gamma)$	

**XII. — Le tenseur contracté de Ricci et Einstein  
et le transport des pseudo-tenseurs en circuit fermé.**

Nous avons étudié, au chapitre V, § 10, le transport en circuit fermé des densités ou capacités scalaires ; le résultat s'exprimait au moyen d'un tenseur contracté, formé à partir du tenseur général de courbure ; nous avons trouvé en (v. 58, 60, 61) :

$$(VII. 91) \quad \delta \log \tau = -\delta \log \tau = \frac{1}{2} \sum_{kh} \int \int [R_{k,h} - R_{h,k}] ds^{kh}$$

avec :

$$(VII. 92) \quad R_{k,h} = \sum_i R^i_{h,i,k} = \sum_{il} \left[ -\frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma^i_{ki} + \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^i_{kh} + \Gamma^i_{li} \Gamma^l_{kh} - \Gamma^i_{lh} \Gamma^l_{ki} \right].$$

Nous avons remarqué la symétrie en  $kh$  des trois derniers termes de sorte que :

$$(VII. 93) \quad R_{h,k} - R_{k,h} = \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma^i_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{hi} \right).$$

Or, nous avons étudié, au paragraphe 7 de ce chapitre, le transport parallèle des pseudo-tenseurs ; nous notions que  $\sqrt{g}$ , et par suite toutes les densités et capacités scalaires étaient invariants sur un transport parallèle ; c'était une conséquence directe de l'invariance de jauge. En conclusion,  $\sqrt{g}$ , ou une densité ou capacité scalaires sont invariants pour un transport parallèle en circuit fermé. L'expression (VII. 91) doit être nulle, et  $R_{h,k}$ , tenseur de courbure contracté de Ricci et Einstein doit être symétrique.

C'est ce que confirme la formule (VII. 50) :

$$\sum_i \Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial x^k} ;$$

donc :

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log g}{\partial x^h \partial x^k} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{hi}$$

et :

$$(VII. 94) \quad R_{h,k} = R_{k,h}.$$

Cette propriété de symétrie, très importante dans la théorie de la gravitation, en Relativité générale, se rattache donc directement à l'invariance de  $\sqrt{g}$  en transport parallèle, c'est-à-dire à l'invariance de jauge.

A partir des composantes deux fois covariantes du tenseur contracté  $R_{h,k}$  nous pouvons facilement écrire les composantes mixtes :

$$(VII. 95) \quad R^h_{,k} = \sum_i g^{hi} R_{i,k}$$

et former, par une nouvelle contraction, l'invariant de courbure :

$$(VII. 96) \quad R = \sum_k R^k_{,k} = \sum_{ik} g^{ki} R_{i,k}.$$



Ces expressions jouent un rôle essentiel dans la Relativité générale d'Einstein.

Notons que, du tenseur de courbure général à 4 indices, on ne peut déduire qu'un seul tenseur contracté à 2 indices; nous pouvons essayer de mettre l'indice muet inférieur en d'autres positions, et voici ce que nous obtenons :

$$\begin{aligned} R_{h,h} &= \sum_i R_{k,i,h}^i = - \sum_i R_{i,h,i}^i && \text{par antisymétrie des } R_{k,i,h}^i \\ \sum_i R_{i,k,h}^i &= 0. \end{aligned}$$

Ces relations expliquent qu'avec des différences apparentes dans les formules de définition, les divers auteurs aboutissent à des résultats équivalents, sauf quelques changements de signes.

### XIII. — Les identités de Bianchi.

Il existe, entre les dérivées partielles covariantes des  $R$ , des relations identiquement satisfaites; ces relations, dues à Bianchi, s'écrivent ainsi :

$$(VII. 97) \quad \frac{D}{Dx^h} R_{ij,kl} + \frac{D}{Dx^k} R_{ij,lh} + \frac{D}{Dx^l} R_{ij,hk} \equiv 0.$$

Ces identités se vérifient sans trop de peine, si l'on utilise les formules (VII. 88) pour les composantes covariantes du tenseur de courbure  $R$ , et que l'on se place dans un système de coordonnées géodésique au point considéré. Nous avons rappelé à la fin du paragraphe 8 en quoi consistait ce choix de coordonnées : on s'arrange de manière que les lignes coordonnées se confondent, dans le voisinage immédiat d'un certain point, avec des géodésiques, de telle sorte que les symboles  $\Gamma$  de Christoffel soient nuls en ce point, et que les dérivées covariantes se réduisent (localement) aux dérivées ordinaires.

L'identité (VII. 97) une fois vérifiée en un point et dans un certain système de coordonnées, reste valable pour tout autre système de références : sa forme tensorielle à 5 indices covariants nous garantit sa valeur générale. La même formule peut s'écrire avec des  $R$  à 2 indices contravariants, en faisant remonter les indices  $ij$  qui ne prennent qu'un rôle passif dans (VII. 97).

$$(VII. 98) \quad \frac{D}{Dx^h} R_{,kl}^{ij} + \frac{D}{Dx^k} R_{,lh}^{ij} + \frac{D}{Dx^l} R_{,hk}^{ij} \equiv 0.$$

Effectuons une contraction  $il$ , nous obtenons d'abord :

$$\sum_i \left[ \frac{D}{Dx^h} R_{,ki}^{ij} + \frac{D}{Dx^k} R_{,ih}^{ij} + \frac{D}{Dx^i} R_{,hk}^{ij} \right] = 0$$

ce qui s'écrit au moyen du tenseur de courbure contracté, dont on prend les composantes mixtes :

$$(VII. 99) \quad - \frac{D}{Dx^h} R_{,k}^{ij} + \frac{D}{Dx^k} R_{,h}^{ij} + \sum_i \frac{D}{Dx^i} R_{,hk}^{ij} = 0.$$

Nous pouvons procéder à une seconde contraction, sur les indices  $jk$ . Cette seconde opération va faire apparaître l'invariant de courbure  $R$  (vii. 96).

$$-\frac{DR}{Dx^h} + \sum_j \frac{DR^j_{,h}}{Dx^j} + \sum_i \frac{D}{Dx^i} R^i_{,h} = 0.$$

Les deux derniers termes sont identiques, de sorte que cette formule se transcrit ainsi :

$$(vii. 100) \quad -\frac{1}{2} \frac{DR}{Dx^h} + \sum_j \frac{DR^j_{,h}}{Dx^j} = 0$$

ou :

$$(vii. 101) \quad \sum_j \frac{D}{Dx^j} \left[ -\frac{1}{2} g^j_h R + R^j_{,h} \right] = 0.$$

Il suffit de se rappeler que les composantes mixtes  $g^j_h$  sont en réalité des  $\delta^j_h$ , c'est-à-dire zéro ou un suivant que  $j$  est différent de  $h$  ou égal à  $h$ .

Cette formule est essentielle dans les théories relativistes.

#### XIV. — *Coordonnées normales de Riemann ; un espace à courbure nulle est euclidien.*

Nous avons déjà noté l'intérêt que présente l'emploi de coordonnées géodésiques auprès d'un point  $P$  donné ; les  $\Gamma$  étant nuls en ce point, bon nombre de formules se trouvent fortement simplifiées. La méthode de Riemann permet de trouver un espace euclidien, osculateur à l'espace de Riemann pour le voisinage immédiat du point  $P$ .

Partons d'un système de repérage orthogonal, formé de  $r$  vecteurs orthogonaux unitaires ; en première approximation le  $ds^2$  se réduira à la forme :

$$(vii. 102) \quad ds^2 = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 \dots + (dv^r)^2 \quad g_{kl} = \delta_{kl}.$$

si nous supposons, pour simplifier, un espace à  $ds^2$  toujours positif ; il pourrait, en général, y avoir ici un certain nombre de carrés précédés de signes moins (Cf. Chap. VI. § 7). Les  $v^k$  représentent nos nouvelles coordonnées. Soient  $\alpha^k$  les cosinus directeurs d'une géodésique arbitraire issue du point  $P$  et  $s$  une longueur mesurée sur cette géodésique ; nous prendrons comme coordonnées d'un point  $M$ , sur cette géodésique, les expressions :

$$(vii. 103) \quad v^k = \alpha^k s.$$

Au voisinage du point  $P$  les symboles  $\Gamma$  sont infiniment petits du premier ordre, mais on peut obtenir leurs expressions, connaissant le tenseur de courbure  $R_{ij,kl}$  en ce point. L'équation générale d'une géodésique s'écrit, pour des coordonnées  $x^k$  quelconques (vii. 58) :

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \sum_{lm} \Gamma^k_{lm} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^m}{ds} = 0$$

mais avec nos coordonnées  $v^k$ , la dérivée seconde est nulle car les  $\alpha^k$  sont constants, et il nous reste :

$$\sum_{lm} \Gamma^k_{lm} \alpha^l \alpha^m = 0$$

ou encore :

$$(vii. 104) \quad \sum_{lm} \Gamma_{lm}^k v^l v^m = 0 \quad \sum_{lm} \Gamma_{k,lm} v^l v^m = 0.$$

Prenons les dérivées de cette seconde expression par rapport à  $s$ ; elles seront évidemment nulles, puisque ces identités ont lieu tout le long de la géodésique; donc :

$$(vii. 105) \quad \sum_{lmn} \frac{\partial \Gamma_{k,lm}}{\partial v^n} v^l v^m \alpha^n = 0$$

expression où nous pouvons encore remplacer  $\alpha^n$  par  $v^n$  qui lui est proportionnel. Ces identités (vii. 105) doivent être satisfaites pour une géodésique quelconque, donc pour des valeurs arbitraires des  $v$ ; écrivons donc que le coefficient de  $v^l v^m v^n$  est nul, et nous trouvons ;

$$(vii. 106) \quad \frac{\partial \Gamma_{k,lm}}{\partial v^n} + \frac{\partial \Gamma_{k,mn}}{\partial v^l} + \frac{\partial \Gamma_{k,nl}}{\partial v^m} = 0.$$

D'autre part, les  $\Gamma$  étant nuls au point P, le tenseur de courbure R de (vii. 88) se réduit à :

$$(vii. 107) \quad R_{kl,mn} = \frac{\partial \Gamma_{k,ln}}{\partial v^m} - \frac{\partial \Gamma_{k,lm}}{\partial v^n}.$$

Le système de ces deux équations (vii. 106 et 107) se résout de la manière suivante, que l'on vérifie aisément par un calcul direct :

$$(vii. 108) \quad \Gamma_{k,lm} = \frac{1}{3} \sum_n [R_{kl,nm} + R_{km,nl}] v^n ;$$

il faut naturellement tenir compte, dans le calcul, des symétries du tenseur R (Chap. VII, § 11) et de (vii. 90); la symétrie nécessaire de  $\Gamma_{k,lm}$  par rapport à  $lm$  est bien respectée par la formule (vii. 108).

Ayant obtenu les  $\Gamma_{k,lm}$  nous en tirons, par (vii. 42) les dérivées des  $g_{kl}$  :

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial v^m} = \Gamma_{k,l'm} + \Gamma_{l,k'm} = \frac{1}{3} \sum_n [R_{km,nl} + R_{lm,nk}] v^n$$

ce qui s'intègre, en tenant compte de la forme diagonale unité  $\delta_{kl}$ , à laquelle les  $g_{kl}$  se réduisent en première approximation (vii. 102) :

$$(vii. 109) \quad g_{kl} = \delta_{kl} + \frac{1}{3} \sum_{mn} [R_{km,nl} + R_{lm,nk}] v^m v^n.$$

Telles sont les expressions des  $g_{kl}$  de la métrique, dans un système de coordonnées normales de Riemann.

Nous voyons apparaître ici un résultat important; si le tenseur de courbure de Riemann n'est pas nul, l'espace ne peut être euclidien, car les  $g_{kl}$  ne sont réductibles à la forme diagonale que dans l'infiniment petit. Ce fait ressortait d'ailleurs déjà nettement de nos études sur le transport de tenseurs en circuit fermé, ces transports parallèles ne pouvant ramener le tenseur à sa valeur initiale que si le tenseur de courbure R était identiquement nul. En revanche, lorsque le tenseur de courbure est entièrement nul, la formule (vii. 109) nous montre que les  $g_{kl}$  peuvent être ramenés à la forme euclidienne dans un domaine de dimensions finies autour du point de départ P, et de proche en proche dans tout l'espace. L'espace est donc euclidien.

Les géomètres ont étudié diverses variétés d'espaces de Riemann non euclidiens, et la relativité généralisée d'Einstein utilise des espaces de ce genre, où le temps est incorporé comme une quatrième dimension, à côté des trois dimensions d'espace. Nous n'entrerons pas, pour le moment, dans ces discussions.

### XV. — *Courbure Riemannienne; courbure moyenne de Ricci.*

Prenons, en un point, deux vecteurs contravariants  $\xi^k$  et  $\eta^h$ , de longueur 1; ils définissent une section plane  $(\xi, \eta)$ . La *courbure Riemannienne*, pour l'orientation ainsi précisée, se représente par l'expression :

$$(VII. 110) \quad K_{(\xi, \eta)} = \sum_{klmn} R_{klmn} \xi^k \eta^l \xi^m \eta^n.$$

On démontre que la connaissance, en un point, des courbures Riemanniennes  $K_{(\xi, \eta)}$ , pour toutes les sections planes  $(\xi, \eta)$  passant en ce point, entraîne la connaissance de tout l'ensemble du tenseur  $R_{klmn}$  de Riemann-Christoffel [E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, p. 198].

Reportons-nous à la formule (VII. 80) qui donne l'accroissement  $\delta u'$  d'un vecteur  $u'$  après transport en circuit fermé autour d'un élément de surface  $ds^{mn}$ , et prenons l'élément de surface construit sur les deux vecteurs  $\xi^k$  et  $\eta^h$  :

$$ds^{mn} = \xi^m \eta^n.$$

Transportons le vecteur  $\eta^h$  lui-même le long de ce circuit fermé, et appliquons la formule (VII. 80); nous revenons au point de départ avec un accroissement :

$$(VII. 111) \quad \delta \eta^h = - \frac{1}{2} \sum g^{hk} R_{klmn} \eta^l ds^{mn}.$$

Formons maintenant le produit scalaire de  $\delta \eta^h$  avec l'autre vecteur de base  $\xi$ , nous retrouvons la courbure Riemannienne, au facteur  $-\frac{1}{2}$  près :

$$(VII. 112) \quad K_{(\xi, \eta)} = -2 \sum g_{ik} \xi^k \delta \eta^i = \sum g_{ik} g^{ih} R_{hlmn} \xi^k \eta^l \xi^m \eta^n.$$

Cette construction précise donc le sens géométrique de la définition (VII. 110).

Donnons-nous maintenant un seul vecteur  $\xi^k$  de longueur 1, nous pouvons définir la *courbure moyenne de Ricci*, qui représente une courbure moyenne de l'espace suivant la direction  $\xi$  :

$$(VII. 113) \quad \rho(\xi) = \sum R_{kh} \xi^k \xi^h.$$

Cette expression est formée au moyen du tenseur contracté de Ricci, tel que nous l'avons défini en (VII. 93). Il importe de ne pas confondre ces deux définitions de courbure de l'espace de Riemann.

## CHAPITRE VIII

# LA MÉCANIQUE RATIONNELLE ET L'EMPLOI DES GEOMÉTRIES DE RIEMANN

### I. — *Utilité de la géométrie de Riemann en mécanique classique.*

La géométrie de Riemann trouve une application importante dans les problèmes de mécanique rationnelle ; il est intéressant d'étudier, sous ce jour particulier, les théorèmes généraux de la mécanique classique, car l'extension à la mécanique ondulatoire ou à la théorie de la relativité s'en trouve grandement facilitée. Dans ces deux théories nouvelles, en effet, la géométrie de Riemann est indispensable à tous les raisonnements.

Il est aisé de voir comment la géométrie générale va s'introduire dans les questions de mécanique. Considérons un système de  $N$  points matériels ; ces points se meuvent dans l'espace ordinaire, euclidien à 3 dimensions ; ils peuvent être soumis à des forces extérieures et agir les uns sur les autres suivant des lois quelconques ; les  $3N$  coordonnées de ces  $N$  points peuvent nous servir à former un hyperspace à  $3N$  dimensions que l'on nomme l'*extension en configuration*. Aussi longtemps que les divers points mobiles restent libres ; notre espace contient nécessairement les

(viii. 1)

$$r = 3N \text{ dimensions}$$

et reste euclidien. Mais nous pouvons avoir à tenir compte de *liaisons* : certains points seront assujettis à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface données ; d'autres devront rester à distance fixe de certains points mobiles, etc. Nous supposerons des *liaisons holonomes*, qui pourront dépendre du temps ; la liaison est dite holonome si elle s'exprime par une relation en termes finis :

(viii. 2)

$$F(x_1 \dots x_N, t) = 0.$$

Que signifie une condition de ce genre, du point de vue géométrique ? Nous avons représenté notre système de  $N$  points réels par un seul point fictif  $P$ , de coordonnées  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$  dans l'extension en configuration, à  $3N$  dimensions ; toute l'évolution du système pouvait être connue, lorsqu'on savait calculer la trajectoire du point représentatif  $P$  dans son extension. Lorsqu'on se donne une liaison holonome (viii. 2), on oblige le point  $P$  à rester sur une certaine hypersurface ; ce point se meut donc dans

une extension réduite, qui ne possède plus que  $3N - 1$  dimensions ; cette extension réduite perdra, en général, son caractère euclidien.

Si la relation de liaison (VIII. 2) est linéaire par rapport à toutes les variables  $x_1 \dots x_N$  elle représente un hyperplan, et définit un sous-espace d'ordre  $3N - 1$  qui reste encore euclidien. Mais la relation de liaison ne sera pas, en général, linéaire, la surface (c'est-à-dire le sous-espace) sera courbe, et pour étudier le mouvement du point représentatif P dans cet espace courbe, nous sommes bien forcés de nous servir de la géométrie de Riemann.

Nous reprendrons donc, à ce point de vue, les théorèmes généraux de mécanique, et nous verrons qu'ils prendront une signification géométrique très simple.

## II. — Principe de d'Alembert.

Les lois de la mécanique se déduisent aisément du principe de d'Alembert (1) : les forces extérieures appliquées au système doivent être équilibrées par les forces d'inertie ; si donc on forme la résultante des forces extérieures et d'inertie, cette résultante est nulle ; son travail est nul pour n'importe quel déplacement virtuel.

Lorsque les points matériels sont soumis à des liaisons, la restriction à apporter est la suivante : les déplacements virtuels ne seront plus complètement arbitraires, mais devront être compatibles avec les liaisons. Cela signifie que les forces d'inertie et les forces extérieures n'ont plus une résultante nulle, mais que leur résultante est normale aux surfaces qui représentent les liaisons : si un point est assujéti à se mouvoir sur une sphère, la résultante des forces extérieures et des forces d'inertie sera normale à la sphère. Au point de vue physique, on s'expliquera ce résultat aisément : pour maintenir la liaison, et garder le point sur la sphère, on relie ce point par une tige (non pesante, inextensible !) au centre O de la sphère ; la résultante de toutes les forces va se trouver dirigée suivant cette tige et sera compensée par la réaction de la tige.

Supposons donc que nous ayons N points matériels, de masses  $m_1, m_2, \dots$  ; pour simplifier l'écriture des formules, nous appellerons  $x^1, x^2, x^3$  les coordonnées  $x, y, z$  du premier point, et  $m_1, m_2, m_3$  les masses correspondantes, qui seront naturellement égales numériquement ;  $x^4, x^5, x^6$  seront les coordonnées du second point, et  $m_4, m_5, m_6$  sa masse, et ainsi de suite. Nous aurons donc, au total,  $3N$  coordonnées  $x^k$  et autant de masses  $m_k$  qui leur correspondent.

Nous indiquerons par un point supérieur la dérivée  $\frac{d}{dt}$  ; ainsi  $\dot{x}^k$  est la vitesse  $\frac{dx^k}{dt}$  de la coordonnée  $x^k$ .

L'énergie cinétique totale T est :

$$(VIII. 3) \quad T = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\dot{x}^k)^2.$$

(1) P. APPELL. *Mécanique rationnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1911, t. 2, chap. 23 et 24. — L. BRILLOUIN. *L'atome de Bohr*, 2<sup>e</sup> éd. Presses Universitaires, Paris, 1931, chap. 1 à 6. — G. BRUHAT. *Cours de Mécanique Physique*. Masson, Paris, 1934, chap. 9.

Suivant la direction  $x^k$  agira, sur le point correspondant, une force extérieure  $X_k$ ; la force d'inertie est  $m_k \ddot{x}^k$ , et si tous les points sont libres, sans liaisons, nous avons :

$$-X_k + m_k \ddot{x}^k = 0.$$

$$(viii. 4) \quad \sum_k (-X_k + m_k \ddot{x}^k) \delta x^k = 0$$

quels que soient les déplacements virtuels  $\delta x^k$  envisagés; c'est le principe de d'Alembert.

Admettons maintenant un certain nombre  $l$  de liaisons holonomes, dépendant du temps, suivant (viii. 2). Nous allons avoir à étudier le mouvement d'un point représentatif dans un espace à :

$$(viii. 5) \quad r = 3N - l \quad \text{dimensions.}$$

Nous prendrons de nouvelles coordonnées  $q^1 \dots q^r, q^{r+1} \dots q^{3N}$  choisies de telle sorte que les  $l$  dernières restent nulles, par suite des liaisons imposées; c'est dire que ces liaisons s'écriront :

$$(viii. 6) \quad F_1(x^1 \dots, x^{3N}, t) = q^{r+1} = 0,$$

$$\dots$$

$$F_l(x^1 \dots, x^{3N}, t) = q^{3N} = 0;$$

il nous restera donc à utiliser les  $r$  premières variables  $q^i$  et le temps, et nous pourrions résoudre les équations de manière à exprimer les  $x^1 \dots x^{3N}$  en termes finis :

$$(viii. 7) \quad \begin{aligned} x^1 &= f^1(q^1 \dots q^r, t) \\ x^k &= f^k(q^1 \dots q^r, t) \\ x^{3N} &= f^{3N}(q^1 \dots q^r, t). \end{aligned}$$

Nous obtiendrons, à chaque instant  $t$ , des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons, si nous admettons des variations absolument arbitraires  $\delta q^i$  des  $r$  premières variables, mais en ayant soin que les  $q^{r+1} \dots q^{3N}$  restent toujours nulles. La variation correspondante des  $x^k$  sera donc :

$$(viii. 8) \quad \delta x^k = \sum_i \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \delta q^i$$

et le principe de d'Alembert s'écrira très simplement :

$$(viii. 9) \quad \sum_{i,k} [-X_k + m_k \ddot{x}^k] \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \delta q^i = 0.$$

Nous pouvons résumer ces formules de la manière suivante :

$$(viii. 10) \quad \sum_i (P_i - Q_i) \delta q^i = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} m_k \frac{d^2 x^k}{dt^2} \\ Q_i &= \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} X_k. \end{aligned}$$

Remarquons tout de suite, le caractère tensoriel de ces relations; nous

passons des coordonnées initiales  $x^k$  aux coordonnées finales  $q'$  au moyen du tableau des coefficients :

$$(VIII. 11) \quad \alpha_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial q'}$$

ce qui est conforme au schéma général (II. 51), et les formules (VIII. 10) représentent simplement la transformation de vecteurs covariants :

$$Q_i = \sum_k \alpha_i^k X_k.$$

Nous sentons donc déjà comment les formules des transformations tensorielles vont nous fournir un cadre très général, dans lequel la mécanique classique s'inscrit avec une netteté particulière.

### III. — Equations de Lagrange.

Nous allons transformer les termes  $P_i$ , qui représentent les forces d'inertie dans nos formules (VIII. 10), de manière à les exprimer exclusivement au moyen des nouvelles variables  $q'$ . Cela nous permettra de nous libérer complètement des variables en surnombre, et de poser tout le problème dans l'extension en configuration réduite, à  $r$  dimensions, mais *non euclidienne*.

Appelons  $\frac{d}{dt}$  la variation d'une grandeur quelconque  $\Psi$ , prise le long de la trajectoire naturelle, c'est-à-dire en suivant l'évolution du système au cours du temps. Nous avons donc :

$$(VIII. 12) \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i.$$

Dans tout ce qui touche aux *équations de Lagrange*, on admet toujours qu'on traite les *coordonnées  $q^i$ , les vitesses  $\dot{q}^i$  et le temps  $t$  comme variables indépendantes*. L'expression  $P_i$  de (VIII. 10) va s'écrire ainsi :

$$(VIII. 13) \quad P_i = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} m_k \frac{d^2 x^k}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \sum_k m_k \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \right) - \sum_k m_k \frac{dx^k}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \right).$$

D'autre part, la formule (VIII. 7) nous donne :

$$(VIII. 14) \quad \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial x^k}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt}.$$

Le temps joue un rôle particulier, parce que nous avons supposé des liaisons holonomes mais fonctions du temps ; si nos liaisons étaient indépendantes du temps, nous pourrions supprimer  $t$  de toutes les formules (VIII. 7) et par conséquent aussi de (VIII. 14) ; cette dernière relation s'écrirait :

$$(VIII. 15) \quad \dot{x}^k = \sum_i \alpha_i^k \dot{q}^i$$

et signifierait simplement ceci : la vitesse se transforme comme un vecteur contravariant.

Gardons toute la généralité, avec le rôle spécial du temps. Les formules



(VIII. 14) expriment les vitesses  $\dot{x}^k$  en fonction des dérivées partielles  $\frac{\partial x^k}{\partial t}$  et des vitesses  $\dot{q}^i$  et nous en tirons :

$$\begin{aligned} \dot{x}^k &= \sum_i \alpha_i^k \dot{q}^i + \frac{\partial x^k}{\partial t} \\ \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial x^k}{\partial q^i} = \alpha_i^k. \end{aligned} \quad (\text{VIII. 16})$$

Nous porterons cette valeur dans le premier terme de (VIII. 13) et nous transformerons le second en remarquant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \right) = \frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial q^i} + \sum_h \frac{\partial^2 x^k}{\partial q^h \partial q^i} \dot{q}^h = \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{dx^k}{dt} \right).$$

Nous obtenons donc, pour (VIII. 13) la forme suivante :

$$P_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_k m_k \dot{x}^k \cdot \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{q}^i} \right) - \sum_k m_k \dot{x}^k \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial q^i}. \quad (\text{VIII. 17})$$

Or, nous devons comparer ce résultat à l'expression de l'énergie cinétique  $T$ , en fonction des  $\dot{x}^k$  ou des  $\dot{q}^i$  :

$$2T = \sum_k m_k (\dot{x}^k)^2. \quad (\text{VIII. 18})$$

Dans l'expression (VIII. 17) de  $P_i$ , le premier terme nous donne la dérivée temporelle de  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$ , tandis que le second terme représente  $\frac{\partial T}{\partial q^i}$ ; nous arrivons donc aux équations de Lagrange :

$$\begin{aligned} P_i - Q_i &= 0 && \text{d'après (VIII. 10)} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII. 19})$$

Nous voyons apparaître ici le moment conjugué à la coordonnée  $q^i$  :

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \\ \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII. 20})$$

Ces équations sont valables, répétons-le, si notre système comporte des liaisons holonomes contenant explicitement le temps; les forces  $Q_i$  sont absolument quelconques. S'il existe une énergie potentielle  $V$ , fonction des coordonnées, nous en tirons :

$$X_k = - \frac{\partial V}{\partial x^k} \quad Q_i = - \sum_k \frac{\partial V}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} = - \frac{\partial V}{\partial q^i}. \quad (\text{VIII. 21})$$

Du point de vue tensoriel, ces formules sont très claires : la force, vecteur covariant, est donnée par le gradient de  $V$  changé de signe. Insistons sur le fait que la dérivée  $\frac{dp_i}{dt}$  de (VIII. 20) est prise en suivant l'évolution du système, et se développe comme en (VIII. 12).

## IV. — Cas des liaisons indépendantes du temps.

Discutons tout d'abord l'exemple le plus simple, en supposant que le temps ne figure pas explicitement dans les liaisons (VIII. 7) de sorte que la formule (VIII. 14) se réduit à la formule (VIII. 15) de transformation d'un vecteur (vitesse) contravariant.

L'énergie cinétique  $T$  se traduit alors ainsi :

$$2T = \sum_k m_k (\dot{x}^k)^2 = \sum_{ij} M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

avec :

$$(VIII. 22) \quad M_{ji} = M_{ij} = \sum_k m_k \alpha_i^k \alpha_j^k.$$

Les masses initiales  $m_k$  étaient des constantes, qui représentaient les masses véritables des divers points matériels. Quand nous passons aux coordonnées  $q^i$ , nous trouvons des coefficients d'inertie  $M_{ij}$  qui jouent le rôle des masses; ils ne sont plus constants; ce sont des fonctions des coordonnées  $q^i$  mais pas du temps, car ces coefficients d'inertie dépendent essentiellement de la configuration du système et des liaisons. Le moment  $p_i$  conjugué à  $q^i$  a pour valeur :

$$(VIII. 23) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = \sum_j M_{ij} \dot{q}^j.$$

Le coefficient  $\frac{1}{2}$  disparaît, comme nous l'avons bien souvent remarqué : dans la formule (VIII. 22) nous admettons que les sommations soient faites indépendamment sur les indices  $i$  et  $j$ ; un terme  $M_{12}$  se trouve alors répété deux fois : pour  $i=1, j=2$  et  $i=2, j=1$ ; dans la somme (VIII. 23) au contraire ce terme ne figure qu'une fois. Les coefficients  $M_{ij}$  sont symétriques en  $i$  et  $j$ .

Quelle forme prend, finalement, notre équation de Lagrange (VIII. 20) lorsque nous y portons les expressions (VIII. 22 et 23) ?

$$(VIII. 24) \quad \frac{dp_i}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h - Q_i = 0.$$

La dérivée  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$  fait intervenir toutes les dérivées des coefficients d'inertie  $M$ ; dans la somme  $T$  j'ai changé l'indice  $i$  en  $h$  pour éviter des confusions. Supposons une énergie potentielle  $V$  et nous avons :

$$(VIII. 25) \quad \frac{dp_i}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0.$$

Cette expression peut être mise sous une forme plus compacte, si l'on introduit une fonction nouvelle, qui dépend directement des coordonnées  $q^i$  et des vitesses  $\dot{q}^i$ ; c'est la *fonction de Lagrange* :

$$(VIII. 26) \quad L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{j,h} M_{jh} \dot{q}^j \dot{q}^h - V;$$

on résumera les résultats (VIII. 23 et 25) sous la .

$$(VIII. 27) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i =$$

C'est sous cet aspect que sont présentées les équations de Lagrange dans tous les traités de mécanique rationnelle.

### V. — Interprétation géométrique.

Nous avons noté, çà et là, une série de formules qui ressemblaient étrangement à des expressions de la théorie des tenseurs ; toutes ces analogies vont devenir particulièrement claires si nous adoptons un point de vue purement géométrique, dont Schrödinger a souligné l'importance <sup>(1)</sup>. Dans l'extension en configuration à  $r$  dimensions, les coordonnées sont les  $q^i$ , mais nous n'avons pas encore défini la *métrique* ; adoptons comme tenseur métrique fondamental le système des coefficients d'inertie  $M_{ij}$ , et posons :

$$(VIII. 28) \quad ds^2 = \sum_{ij} M_{ij} dq^i dq^j.$$

Il est facile de voir quelles sont les conventions nécessaires pour arriver à cette formule. Chacun des points matériels réels, qui composent notre système, se meut dans l'espace euclidien ; jusqu'à présent, nous avons employé la même unité de longueur  $l$  pour mesurer tous les déplacements  $x^k$  de tous ces points. Adoptons maintenant une convention différente ; nous mesu-

rerons le déplacement  $y^k$  avec une unité  $lm_k^{-\frac{1}{2}}$  de sorte que :

$$\sqrt{m^k} x^k = y^k.$$

L'énergie cinétique totale du système prend alors la forme simple :

$$2T = \sum_k (\dot{y}^k)^2$$

comme s'il s'agissait du mouvement d'un point de masse 1 dans un espace euclidien à nombreuses dimensions ; si maintenant nous revenons de cet espace euclidien à l'extension en configuration des  $q$ , nous trouvons automatiquement la relation (VIII. 28).

L'énergie cinétique  $T$  s'écrira très simplement :

$$(VIII. 29) \quad T = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

quant au *moment*  $p^i$  conjugué à la coordonnée  $q^i$ , la formule nous montre que c'est simplement la *composante covariante de la vitesse* :

$$(VIII. 30) \quad p_i = \sum_j M_{ij} \dot{q}^j = \dot{q}_i.$$

<sup>(1)</sup> E. SCHRÖDINGER. *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*. Alcan, Paris, 1933, chap. II.  
— L. BRILLOUIN. *Atome de Bohr*, 2<sup>e</sup> éd. Presses Univ. Paris, 1931, chap. V.

Nous avons, somme toute, à étudier le mouvement d'un point représentatif dans l'extension en configuration à  $r$  dimensions; le point jouit d'une masse 1, d'après (VIII. 29) et le moment signifie seulement la vitesse covariante. L'équation de Lagrange (VIII. 25) s'écrit :

$$(VIII. 31) \quad \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0.$$

Ce résultat se simplifie tout de suite, si nous nous reportons à la formule de la *dérivée absolue*, telle que nous l'avons établie au chapitre VII, § 9; nous trouvons en (VII. 61) l'équation de transport parallèle d'un vecteur  $u_i$  covariant, c'est-à-dire l'équation exprimant que la dérivée absolue était nulle; cette dérivée absolue avait pour expression :

$$(VIII. 32) \quad \frac{Du_i}{D\lambda} = \frac{du_i}{d\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} u^j u^h;$$

pour une *géodésique*, cette *dérivée doit être nulle*.

Au lieu d'un paramètre quelconque  $\lambda$ , inscrivons le temps  $t$ ; et prenons pour les  $g_{jh}$  les coefficients d'inertie  $M_{jh}$ ;

$$(VIII. 32 \text{ bis}) \quad \frac{D\dot{q}_i}{Dt} = \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h = - \frac{\partial V}{\partial q^i} = Q_i.$$

Dans cette formule, comme dans toutes les précédentes, la dérivée  $\frac{d}{dt}$  est prise en suivant le mouvement du système et se développe comme en (VIII. 12), mais nos liaisons sont indépendantes du temps, de sorte que les  $M_{ij}$  ne contiennent pas  $t$  explicitement; donc :

$$\frac{d\dot{q}_i}{dt} = \sum_h \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}^h} \ddot{q}^h \right) = \sum_{j,h} \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial q^h} \dot{q}^j \dot{q}^h + M_{ij} \ddot{q}^j \right).$$

La formule (VIII. 32 bis) se développe donc ainsi :

$$(VIII. 33) \quad \frac{D\dot{q}_i}{Dt} = \sum_{j,h} \left[ M_{ij} \ddot{q}^j + \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial q^h} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^j \dot{q}^h \right] = - \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Cette forme explicite sera la plus commode, pour les applications à des problèmes particuliers. Il est très remarquable de voir combien l'introduction des dérivées absolues simplifie les formules : le mouvement se fait, dans l'extension en configuration, de manière que la dérivée absolue de la vitesse soit égale à la force appliquée  $Q$ . Nous avons défini les *géodésiques*, aux chapitres V et VII, de telle sorte que, dans un espace général, le mouvement libre d'un point se fasse suivant la géodésique; celle-ci joue ainsi, dans nos géométries, le rôle de la ligne droite dans les espaces euclidiens. Nous venons de vérifier que nos conventions avaient été heureusement choisies. S'il n'y a aucune force extérieure ( $Q_i = 0$ ) le mouvement du point se fait de manière que la dérivée absolue de la vitesse  $\frac{D\dot{q}_i}{Dt}$  soit nulle, et cela nous donne bien

l'équation (VII. 61) d'une géodésique.

L'adoption d'une métrique (VIII. 28) basée sur les coefficients d'inertie simplifie tous les résultats; la recherche des trajectoires (sous forces extérieures nulles) est ramenée à celle des géodésiques dans un espace de Riemann, à

courbure non nulle. Une fois qu'on aura trouvé la trajectoire géodésique, on saura comment le point représentatif décrit cette courbe; son énergie cinétique  $T$  reste constante, puisqu'il n'y a pas d'énergie potentielle. La vitesse reste donc constante :

$$(viii. 34) \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2T}.$$

Nous avons déjà remarqué, au chapitre VII, § 9, que le long d'une géodésique, le paramètre  $\lambda$  (ici  $t$ ) servant à décrire le mouvement variait proportionnellement à la longueur  $s$  mesurée suivant la géodésique.

Si l'énergie potentielle  $V$  n'est pas nulle, les trajectoires sont définies par les équations (viii. 33) et la vitesse du mobile s'obtient aisément; en tenant compte de la constance de l'énergie totale :

$$(viii. 35) \quad E = T + V = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + V$$

ce qui nous donne la *vitesse du mobile* dans l'extension en configuration :

$$(viii. 36) \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2(E - V)}.$$

On retrouve facilement sur les équations de Lagrange la preuve de la constance de l'énergie totale (viii. 35). Formons la dérivée  $\frac{dV}{dt}$  de l'énergie potentielle, en suivant l'évolution du système, et utilisons les équations de Lagrange (viii. 19-21) :

$$(viii. 37) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_i \frac{\partial V}{\partial q^i} \dot{q}^i = \sum_i \dot{q}^i \left[ \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \\ &= \sum_i \left( \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial q^i} + \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right). \end{aligned}$$

$T$  ne dépend pas du temps directement; le premier groupe de termes est donc le développement exact de  $\frac{dT}{dt}$ , dérivée prise en suivant le mouvement; dans le dernier terme, nous devons nous rappeler que l'énergie cinétique  $T$  est une forme homogène du second degré par rapport aux vitesses  $\dot{q}^i$  de sorte que :

$$\sum_i \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = 2T.$$

Les équations de Lagrange nous montrent donc que :

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{dT}{dt}$$

ce qui prouve bien la constance de  $T + V$ .

Dans la formule (viii. 36) l'énergie potentielle  $V$  est une fonction connue des coordonnées; on se fixe d'autre part l'énergie totale  $E$ ; la vitesse  $v$  est alors définie en chaque point  $P$  de l'extension en configuration; c'est une fonction des coordonnées seulement. Toutes les trajectoires ayant l'énergie totale  $E$  et se croisant en  $P$  ont même valeur absolue de la vitesse en ce point, mais des orientations différentes.

**VI. — Liaisons indépendantes du temps  
avec énergie potentielle ;  
comment ramener le problème mécanique  
à une recherche de géodésique ?**

En l'absence d'énergie potentielle, la trajectoire du point représentatif du système est une géodésique dans l'extension en configuration, considérée comme un espace de Riemann avec courbure non nulle. S'il y a une énergie potentielle, on peut encore réduire le problème mécanique à une recherche de géodésique, et ceci de plusieurs façons. Une *première méthode* consiste à garder un espace à  $r$  dimensions, analogue à l'extension en configuration, mais dans lequel on choisira une métrique spécialement adaptée ; on pourra, de cette façon, *déterminer la trajectoire* comme courbe géométrique, mais on n'obtiendra pas le mouvement réel du point représentatif du système sur cette courbe. Une géodésique, du point de vue que nous avons adopté, est toujours supposée décrite par le mouvement d'un certain point ; nous obtiendrons donc la forme de la trajectoire par le mouvement d'un point fictif, sans rapport avec le point représentant le système ; après coup, connaissant cette courbe trajectoire, il sera facile d'ajuster le mouvement du point représentatif véritable. Cette méthode un peu indirecte est moins satisfaisante que la *seconde méthode*, où l'on cherchera une géodésique, décrite par le point représentant vraiment le système, ce qui ne pourra s'obtenir qu'en *ajoutant une dimension, le temps*, de sorte qu'on tracera la géodésique dans un « espace-temps » à  $r + 1$  dimensions.

Prenons d'abord la *première méthode*, avec un espace à  $r$  dimensions dont les coordonnées sont les  $q^1 \dots q^r$  qui représentent une configuration du système. La formule (VIII. 25) nous donne l'équation de la courbe, telle qu'elle est réellement décrite par le point figuratif du système, en fonction du temps  $t$  ; nous pouvons modifier à notre gré la loi de mouvement du point sur cette courbe, sans changer la forme de celle-ci, en utilisant au lieu du temps  $t$  une autre variable  $\theta(t)$  ; posons donc :

$$(VIII. 38) \quad \theta = \theta(t) \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Avec ce nouveau paramètre  $\theta$ , l'équation (VIII. 25) s'écrit aisément, en explicitant le terme  $p$ , d'après (VIII. 23) :

$$(VIII. 39) \quad \omega \frac{d}{d\theta} \left( \omega \sum_j M_{jj} \frac{dq^j}{d\theta} \right) - \frac{\omega^2}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^1} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^h}{d\theta} + \frac{\partial V}{\partial q^1} = 0.$$

Telle est l'équation géométrique que nous fournit la mécanique, pour déterminer la trajectoire. Il s'agit de chercher maintenant dans l'espace des  $q^i$  une métrique telle que (VIII. 39) soit l'équation d'une géodésique. Posons :

$$(VIII. 40) \quad ds'^2 = F ds^2 = F \sum_{i,h} M_{ih} dq^i dq^h = \sum_{i,h} g'_{ih} dq^i dq^h$$

avec une fonction inconnue  $F(q^i)$  à déterminer au mieux.

L'équation d'une géodésique dans cet espace s'obtient sans peine ; nous formerons d'abord la nouvelle composante covariante d'une vitesse :

$$\frac{dq'_i}{d\theta} = \Sigma_h g'_{ih} \frac{dq^h}{d\theta} = F \Sigma_h M_{ih} \frac{dq^h}{d\theta}$$

puis nous aurons l'équation (VIII. 32) de la géodésique :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{dq'_i}{d\theta} \right) - \frac{1}{2} \Sigma_{j,h} \frac{\partial g'_{jh}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^h}{d\theta} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(VIII. 41) \quad \frac{d}{d\theta} \left( F \Sigma_h M_{ih} \frac{dq^h}{d\theta} \right) - \frac{1}{2} F \Sigma_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^h}{d\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q^i} \Sigma_{j,h} M_{jh} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^h}{d\theta} = 0.$$

Nous admettons que la géodésique est parcourue par le point fictif, de sorte que le paramètre  $\theta$  varie régulièrement ; d'après nos remarques générales, ce paramètre sera proportionnel à la longueur  $s'$  mesurée le long de la géodésique ; il est aussi simple, puisque nous disposons de  $\theta$  (équ. VIII. 38) de prendre  $\theta = s'$  ; dans ces conditions le dernier terme de (VIII. 41) est clair, car :

$$F \Sigma_{jh} \frac{dq^j}{ds'} \frac{dq^h}{ds'} = 1 ;$$

nous aboutissons donc à ceci :

$$(VIII. 42) \quad \frac{d}{d\theta} \left( F \Sigma_h M_{ih} \frac{dq^h}{d\theta} \right) - \frac{1}{2} F \Sigma_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^h}{d\theta} - \frac{1}{2F} \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0.$$

Multiplions par  $F$ , et nous voyons l'étroite parenté de notre géodésique (VIII. 42) avec la trajectoire mécanique (VIII. 39). Ces deux relations s'identifient si l'on prend :

$$(VIII. 43) \quad \omega = F = C - 2V \quad C \text{ constant.}$$

La solution généralement adoptée est :

$$(VIII. 44) \quad \omega = F = 2(E - V) \quad E \text{ énergie totale.}$$

C'est celle que propose Appell <sup>(1)</sup> et qui se justifie aisément par une règle de longueur minima que nous exposerons par la suite (§ 12) ; le choix du facteur (VIII. 44) suppose évidemment qu'on se soit fixé la valeur de l'énergie  $E$ .

Comme nous l'avons expressément précisé, cette méthode ramène la recherche de la trajectoire à celle d'une géodésique, mais le point fictif décrit la géodésique suivant une loi qui ne correspond pas au mouvement du point représentant le système. Une fois la trajectoire fixée, on obtiendra la loi de mouvement du système par (VIII. 36).

<sup>(1)</sup> APPELL. *Mécanique rationnelle*, t. 2, p. 437.

**VII. — Utilisation de géodésiques dans l'« espace-temps » ;  
allusion à la mécanique relativiste.**

La seconde méthode sera plus instructive ; nous choisirons un « espace-temps » à  $r + 1$  dimensions, qui seront les coordonnées  $q^i$  du système et le temps  $t$  (variable  $q^0$ ) ; nous prendrons une métrique ainsi choisie :

$$(VIII. 45) \quad dS^2 = (A - 2V + 2T)dt^2 = \sum_{i,j=0}^r g_{ij} dq^i dq^j = g_{00}(dq^0)^2 + \sum_{i,j=1}^r M_{ij} dq^i dq^j$$

avec :

$$\begin{aligned} g_{00} &= A - 2V & A \text{ constant} \\ g_{i0} &= g_{0i} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi donc, pour les coordonnées de configuration ( $i = 1 \dots r$ ) nous conservons la métrique si commode, dont nous avons fait usage au paragraphe 5 ; pour la coordonnée temporelle  $q^0$ , nous admettons une forme spéciale, où interviennent une constante  $A$  et l'énergie potentielle  $V$ . La géodésique sera supposée décrite en fonction du paramètre  $S$  qui représente une longueur mesurée sur cette courbe ; nous aurons un point mobile dont la vitesse covariante s'écrira :

$$\frac{dq_i}{dS} = \sum_{j=0}^r g_{ij} \frac{dq^j}{dS}$$

et l'équation de la géodésique sera (cf. VIII. 32) :

$$(VIII. 46) \quad \frac{d}{dS} \left( \frac{dq_i}{dS} \right) = \frac{d}{dS} \left( \sum_{j=0}^r g_{ij} \frac{dq^j}{dS} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j,h=0}^r \frac{\partial g_{jh}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{dS} \frac{dq^h}{dS}.$$

Considérons tout d'abord un indice  $i = 1 \dots r$ , relatif à une variable de configuration ; dans le dernier terme, nous isolerons la variable temporelle  $q^0$  qui joue un rôle à part ; et nous remplacerons  $g_{00}$  par sa valeur :

$$(VIII. 47) \quad \frac{d}{dS} \left( \sum_{j=1}^r M_{ij} \frac{dq^j}{dS} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^r \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{dS} \frac{dq^h}{dS} - \frac{\partial V}{\partial q^i} \left( \frac{dq^0}{dS} \right)^2$$

cette équation ressemble beaucoup à celle du mouvement du point représentatif (VIII. 25). Si nous pouvions écrire  $dt$  au lieu de  $dS$  l'identification serait complète. Ce résultat peut être obtenu avec une approximation très élevée, pourvu que nous choisissons une constante  $A$  très grande devant  $V$  et devant l'énergie cinétique  $T$  (c'est-à-dire devant l'énergie totale  $E$ ) :

$$(VIII. 48) \quad |A| \gg 2V + 2T \quad 2T = \sum_{i,j} M_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt},$$

car alors :

$$dS^2 \approx A dt^2$$

et l'équation (VIII. 47), allégée d'un facteur  $A^{-1}$  se réduit à :

$$(VIII. 49) \quad \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^r M_{ij} \frac{dq^j}{dt} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^r \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^h}{dt} - \frac{\partial V}{\partial q^i}$$

ce qui correspond bien à l'équation (VIII. 25) de la mécanique. Il est impor-



tant de préciser exactement dans quelles conditions le passage de l'équation (VIII. 47) à la forme (VIII. 49) est justifiée. Nous allons transformer (VIII. 47) en posant :

$$\frac{dq^h}{dS} = \dot{q}^h \frac{dt}{dS}$$

donc :

$$\sum_j M_{ij} \frac{dq^j}{dS} = \sum_j M_{ij} \dot{q}^j \frac{dt}{dS} = p_i \frac{dt}{dS},$$

d'après (VIII. 30) ; et enfin :

$$\frac{d}{dS} \left( p_i \frac{dt}{dS} \right) = p_i \frac{d^2 t}{dS^2} + \frac{dp_i}{dS} \frac{dt}{dS} = p_i \frac{d^2 t}{dS^2} + \dot{p} \left( \frac{dt}{dS} \right)^2.$$

Finalement, notre équation (VIII. 47) se transcrit ainsi :

$$(VIII. 50) \quad p_i \frac{d^2 t}{dS^2} + \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 \left[ \dot{p} - \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^r \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h + \frac{\partial V}{\partial q^i} \right] = 0.$$

Le premier terme vient seul s'ajouter à l'équation (VIII. 49). Le passage d'une formule à l'autre sera justifiée, si  $\frac{d^2 t}{dS^2}$  est très petit devant  $\left( \frac{dt}{dS} \right)^2$ . Que pouvons-nous dire à ce sujet ? La définition générale (VIII. 45) se transcrit ainsi :

$$(VIII. 51) \quad \begin{aligned} \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 &= (A + 2T - 2V) \\ \frac{dt}{dS} &= (A + 2T - 2V)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{d^2 t}{dS^2} &= -\frac{1}{2} (A + 2T - 2V)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dS} (A + 2T - 2V). \end{aligned}$$

Nous en tirons la valeur du rapport :

$$\frac{\frac{d^2 t}{dS^2}}{\left( \frac{dt}{dS} \right)^2} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dS} (A + 2T - 2V)}{(A + 2T - 2V)^{1/2}} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} (A + 2T - 2V)}{A + 2T - 2V}.$$

La constante A étant très grande, il est évident que ce rapport peut être rendu aussi petit qu'on le désire, ce qui justifie bien notre passage d'une équation à l'autre.

Le gros intérêt de cette méthode, c'est qu'elle correspond à la *mécanique relativiste d'Einstein*. Si l'équation mécanique classique (VIII. 49) est rigoureuse, notre mouvement n'est qu'approximativement équivalent à la géodésique (VIII. 47) ; mais en relativité on adopte le point de vue inverse ; on admet une nouvelle mécanique, avec  $A = \Sigma mc^2$ , qui fournit une constante extrêmement élevée et très supérieure à l'énergie totale du système, tant qu'on étudie des mouvements dont les vitesses sont faibles devant la vitesse  $c$  de la lumière ; on trouve alors, pour les faibles vitesses, l'équation (VIII. 47) qui se réduit à (VIII. 49). *La mécanique classique n'est plus qu'une approximation valable seulement pour de faibles vitesses.*

L'équation de la géodésique dans l'espace-temps nous fournit une équation supplémentaire, en prenant  $i = 0$  dans (VIII. 46) :

$$\frac{d}{dS} \left( g_{00} \frac{dq^0}{dS} \right) = \frac{1}{2} \sum_{jh=0}^r \frac{\partial g_{jh}}{\partial q^0} \frac{dq^j}{dS} \frac{dq^h}{dS} = 0.$$

Les  $M$  et l'énergie potentielle  $V$  ne dépendent pas explicitement du temps  $q^0$ ; leurs dérivées sont nulles et nous trouvons :

$$g_{00} \frac{dq^0}{dS} = (A - 2V) \frac{dt}{dS} = C^{\text{te}}.$$

Dans cette équation, nous serons obligés de porter  $\frac{dt}{dS}$ , pris dans (VIII. 51) et de chercher la seconde approximation en développant par rapport aux quantités très petites  $\frac{T}{A}$  et  $\frac{V}{A}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dS} &= A^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{V-T}{A} + \dots \right] \\ \text{(VIII. 52)} \quad g_{00} \frac{dq^0}{dS} &= (A - 2V) A^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{V-T}{A} \dots \right] \\ &= \sqrt{A} \left( 1 - \frac{2V}{A} + \frac{V-T}{A} \dots \right) = \sqrt{A} \left[ 1 - \frac{E}{A} \dots \right]. \end{aligned}$$

Ainsi donc, notre  $r + 1^{\text{ième}}$  équation géodésique, qui porte sur la variable temporelle, se réduit à la conservation de l'énergie; d'une manière générale, on constate toujours que le *moment*  $p_0$  conjugué de la variable  $q^0 = t$  s'exprime directement au moyen de l'énergie totale du système.

En mécanique relativiste, ces expressions ne sont valables que pour les faibles vitesses; lorsque les mobiles se déplacent avec des vitesses comparables à celle de la lumière, toutes les lois de la mécanique sont profondément modifiées.

### VIII. — Liaisons holonomes dépendant du temps, ou systèmes de référence en mouvement.

Nous avons établi aux paragraphes 2 et 3 des relations très générales, applicables même au cas où les *liaisons* (VIII. 6) *dépendent explicitement du temps*. Les mêmes formules pourront nous servir à représenter le mouvement d'un système, rapporté à des *axes en mouvement*; supposons, en effet, qu'il n'y ait pas de liaisons, de sorte que le nombre  $r$  des variables  $q$  soit égal au nombre  $3N$  des coordonnées  $x$ ; mais admettons entre les  $q$  et les  $x$  des formules du type (VIII. 7), cela reviendra à rapporter notre système à des axes curvilignes en mouvement, tracés au travers de l'espace euclidien au repos constitué par les  $x$ .

L'énergie cinétique (VIII. 18) s'écrit alors, en tenant compte de (VIII. 14) :

$$\text{(VIII. 53)} \quad 2T = \sum_k m_k \left( \frac{dx^k}{dt} \right)^2 = \sum_k m_k \left[ \frac{\partial x^k}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \dot{q}^i \right]^2.$$

Nous pourrions distinguer, dans cette énergie cinétique  $T$  les termes de degrés 0, 1, 2 par rapport aux vitesses  $q^i$  en posant :

$$\begin{aligned} 2T_0 &= \mu = \sum_k m_k \left( \frac{\partial x^k}{\partial t} \right)^2, & T &= T_0 + T_1 + T_2 \\ \text{(viii. 54)} \quad 2T_1 &= 2 \sum_i v_i \dot{q}^i, & v_i &= \sum_k m_k \frac{\partial x^k}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \\ 2T_2 &= \sum_{i,j} M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, & M_{ij} &= \sum_k m_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}. \end{aligned}$$

Tous ces coefficients  $\mu$ ,  $v$ ,  $M$  dépendent des coordonnées  $q$  et aussi du temps explicitement.

Nous allons voir comment il faut corriger, dans ce cas, les formules du paragraphe 4; le moment  $p$  conjugué de  $q^i$  s'écrit :

$$\text{(viii. 55)} \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = v_i + \sum_j M_{ij} \dot{q}^j$$

et la dérivée par rapport à  $q^i$  prend l'aspect :

$$\text{(viii. 56)} \quad \frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial q^i} + \sum_h \frac{\partial v_h}{\partial q^i} \dot{q}^h + \frac{1}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h.$$

L'équation de Lagrange (viii. 19) se transcrit ainsi :

$$\text{(viii. 57)} \quad \frac{dp_i}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial q^i} - \sum_h \frac{\partial v_h}{\partial q^i} \dot{q}^h - \frac{1}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h = Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Nous supposons tout de suite l'existence d'une énergie potentielle  $V$ . Avant toutes choses, nous allons établir le bilan énergétique du système. *Il n'y a plus conservation de l'énergie*, car les liaisons, variables au cours du temps, effectuent des travaux que nous ne pouvons prévoir explicitement. Voyons alors ce que nous pourrions tirer des équations de Lagrange.

Nous allons suivre la même méthode qu'au paragraphe 5 (éq. viii. 37) et nous écrirons la variation de l'énergie potentielle  $V$ , en suivant l'évolution du système :

$$\text{(viii. 58)} \quad \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial V}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{i=1}^r \dot{q}^i \left[ \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial t}$$

la transformation tient compte des équations de Lagrange (viii. 57); nous modifions maintenant le second terme :

$$\dot{q}^i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q^i} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial q^i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q^i} \dot{q}^i.$$

Ici, il faut faire attention à la décomposition de  $T$  en groupes homogènes de degrés 0, 1 et 2, car il en résulte :

$$\text{(viii. 59)} \quad \sum_i \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial q^i} = \sum_i \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} (T_0 + T_1 + T_2) = T_1 + 2T_2.$$

La formule (viii. 58) va donc se transcrire ainsi :

$$\frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_2) + \sum_{i=1}^r \left( \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) = - \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_2) + \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial t}$$

ou encore :

$$(viii. 60) \quad \frac{d}{dt} [V + T_2 - T_0] - \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Voilà la relation que nous obtenons, à la place de celle de conservation de l'énergie, dans le problème à liaisons variables (Cf. Appell, *Mécanique rationnelle*, 2, p. 329, avec un changement de signe sur V). Si nous appelons E la somme  $T + V$ , cette énergie totale ne reste pas en général constante :

$$(viii. 61) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (T_0 + T_1 + T_2 + V) = \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Toutefois, dans certains problèmes, il peut arriver que le second membre soit nul. Les liaisons variables n'effectuent aucun travail. Tel est le cas, par exemple, lorsque les équations (viii. 7) représentent simplement le passage des axes au repos (axes inertiels de Galilée) à un système de coordonnées en mouvement accéléré. Nous verrons plus loin, paragraphe 10, quelques exemples de ce type.

### IX. — Les systèmes à liaisons variables ; interprétation géométrique dans l'espace-temps.

Nous allons généraliser, pour les systèmes à liaisons holonomes variables, et soumis à une énergie potentielle, la méthode géométrique dans l'« espace-temps » à  $r + 1$  dimensions, qui nous a si brillamment servi au paragraphe 7. Nous poserons donc une métrique suivant les mêmes conventions :

$$(viii. 62) \quad dS^2 = (A + 2T - 2V)dt^2$$

mais T et V dépendent explicitement du temps ; A sera une quantité très grande en valeur absolue, que nous garderons constante. Voici donc les définitions, d'après (viii. 54) :

$$(viii. 63) \quad \begin{aligned} dS^2 &= (A + 2T_0 + 2T_1 + 2T_2 - 2V)dt^2 = \sum_{i,j=0}^r g_{ij}dq^i dq^j \\ g_{00} &= A + 2T_0 - 2V = A + \mu - 2V \\ g_{0i} &= g_{i0} = v_i \\ g_{ij} &= M_{ij}. \end{aligned}$$

Grâce à la grandeur de A nous pourrions, en première approximation, admettre :

$$dS^2 \approx A dt^2$$

et cette simplification nous redonnera les équations de la mécanique, tout comme au paragraphe 7. Lorsque nous aurons besoin d'une approximation supérieure, nous développerons :

$$(viii. 64) \quad \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 = (A + 2T - 2V)^{-1}.$$

Puis, comme au paragraphe 7, nous calculerons  $\frac{d^2 t}{dS^2}$ , et la formule (viii. 51)

se transcrit sans changement ; il suffit de se rappeler que  $T$  et  $V$  sont maintenant explicitement fonctions du temps :

$$(VIII. 65) \quad \frac{\frac{d^2 t}{dS^2}}{\left(\frac{dt}{dS}\right)^2} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt}(A + 2T - 2V)}{A + 2T - 2V}$$

ce rapport restera négligeable si  $A$  est assez grand.

Cherchons maintenant l'équation des géodésiques dans notre espace-temps, et commençons par une coordonnée de configuration ( $i = 1 \dots r$ ) ; nous avons tout d'abord à former la vitesse covariante :

$$(VIII. 66) \quad \frac{dq_i}{dS} = \sum_{j=0}^r g_{ij} \frac{dq^j}{dS} = v_i \frac{dt}{dS} + \sum_{j=1}^r M_{ij} \frac{dq^j}{dS} = p_i \frac{dt}{dS}.$$

Cette formule nous redonne bien une dépendance étroite entre la vitesse covariante et le moment  $p_i$  de (VIII. 55), comme aux paragraphes 5 et 7. L'équation des géodésiques est (VIII. 46) :

$$(VIII. 67) \quad \frac{d}{dS} \left( \frac{dq_i}{dS} \right) = \frac{d}{dS} \left( p_i \frac{dt}{dS} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j,h=0}^r \frac{\partial g_{jh}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{dS} \frac{dq^h}{dS} \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^i} (A + \mu - 2V) \cdot \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 + \sum_{h=1}^r \frac{\partial v_h}{\partial q^i} \frac{dq^h}{dS} \frac{dt}{dS} + \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^r \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{dS} \frac{dq^h}{dS}$$

en faisant ressortir le rôle particulier de la coordonnée  $q^0$  du temps et utilisant (VIII. 63).

Si l'on remplace simplement  $dS$  par  $\sqrt{A} dt$ , l'équation de la géodésique se réduit évidemment à l'équation de Lagrange (VIII. 57). Pour vérifier la valeur de cette approximation, nous procéderons comme en (VIII. 50), avec le même résultat :

$$p_i \frac{d^2 t}{dS^2} + \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 \left[ p_i - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} + \sum_h \frac{\partial v_h}{\partial q^i} q^h + \frac{1}{2} \sum_{j,h} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h \right] = 0.$$

L'expression entre crochet correspond à l'équation de Lagrange (VIII. 57) ; le premier terme est négligeable en vertu de (VIII. 65). La concordance des deux équations est bien celle que nous avons prévu.

Ainsi donc, la méthode de l'espace-temps à  $r + 1$  dimensions réussit parfaitement dans ce problème très général, avec liaisons holonomes dépendant du temps, et énergie potentielle. Nous venons d'étudier les équations géodésiques pour les coordonnées spatiales ( $i = 1 \dots r$ ). Que va nous donner l'équation relative au temps ? Nous formerons tout d'abord la vitesse covariante correspondante :

$$(VIII. 68) \quad \frac{dq_0}{dS} = \sum_{h=0}^r g_{0h} \frac{dq^h}{dS} = (A + 2T_0 - 2V) \frac{dt}{dS} + \sum_{h=1}^r v_h \frac{dq^h}{dS} \\ = [A + 2T_0 + T_1 - 2V] \frac{dt}{dS}.$$

Dans l'équation géodésique (VIII. 67) nous aurons à prendre la dérivée  $\frac{d}{dS}$  de cette expression, ce qui peut s'écrire ainsi :

$$(VIII. 69) \quad \frac{d}{dS} \left( \frac{dq_0}{dS} \right) = [A + 2T_0 + T_1 - 2V] \frac{d^2 t}{dS^2} + \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 \frac{d}{dt} [A + 2T_0 + T_1 - 2V].$$

Notre équation (VIII. 67) prend donc la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{(VIII. 70)} \quad \frac{d}{dS} \left( \frac{dq_0}{dS} \right) &= [A + 2T_0 + T_1 - 2V] \frac{d^2 t}{dS^2} + \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 \frac{d}{dt} [A + 2T_0 + T_1 - 2V] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (A + \mu - 2V) \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 + \sum_{h=1}^r \frac{\partial v_h}{\partial t} \frac{dq^h}{dS} \frac{dt}{dS} + \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^r \frac{\partial M_{jh}}{\partial t} \frac{dq_j}{dS} \frac{dq^h}{dS} \\
 &= \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{A}{2} + T_0 - V + T_1 + T_2 \right].
 \end{aligned}$$

Cette dernière forme est apparente : il suffit de remplacer tous les  $\frac{dq}{dS}$  par  $\dot{q} \frac{dt}{dS}$  et de se reporter à (VIII. 54).

Cette équation ne peut se traiter, comme les précédentes, en négligeant simplement le terme en  $\frac{d^2 t}{dS^2}$  ; sans doute, cette dérivée seconde est très petite, mais elle est multipliée par A, ce qui lui redonne le même ordre de grandeur que les autres termes ; nous nous appuierons donc sur (VIII. 65) :

$$\begin{aligned}
 \text{(VIII. 71)} \quad (A + 2T_0 + T_1 - 2V) \frac{\frac{d^2 t}{dS^2}}{\left( \frac{dt}{dS} \right)^2} &= -\frac{1}{2} \frac{A + 2T_0 + T_1 - 2V}{A + 2T - 2V} \frac{d}{dt} (A + 2T - 2V) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{T_1 + 2T_2}{A + 2T - 2V} \right] \frac{d}{dt} (A + 2T - 2V).
 \end{aligned}$$

Portons cette expression dans (VIII. 70) et regroupons les termes :

$$\text{(VIII. 72)} \quad \frac{T_1 + 2T_2}{A + 2T - 2V} \frac{d}{dt} (T - V) + \frac{d}{dt} (T_0 - T_2 - V) - \frac{\partial}{\partial t} (T - V) = 0.$$

Il faut, dans cette formule, se rappeler que A est constant ; pour T et V les deux dérivées prises, l'une  $\frac{d}{dt}$  en suivant le mouvement et l'autre  $\frac{\partial}{\partial t}$  comme dérivée partielle, sont tout à fait différentes.

Prenons d'abord les termes de la fin et reportons-nous à l'équation (VIII. 60) du bilan énergétique, nous voyons que ces termes se compensent exactement. Reste alors le premier terme, beaucoup plus petit puisqu'il comporte A au dénominateur. Nous pourrions le négliger.

Nous retrouvons ici encore la règle, déjà notée précédemment : l'équation géodésique pour la coordonnée temporelle  $q^0$  est en relation étroite avec le bilan énergétique du système.

## X. — Discussion et exemples.

Les remarques que nous venons de présenter aux paragraphes 7 et 9 montrent clairement comment le problème mécanique se ramène à l'étude des géodésiques dans un « espace-temps » à  $r + 1$  dimensions ; il s'agissait d'un système à énergie potentielle, qui pouvait être soumis à des liaisons holonomes dépendant du temps, ou rapporté à un système de référence composé d'axes curvilignes mobiles. Si les liaisons sont indépendantes du temps, ou

que les axes curvilignes soient fixes dans un système de Galilée, le temps s'élimine et les géodésiques se tracent dans l'extension en configuration à  $r$  dimensions (§ 5).

Essayons maintenant de voir ce que signifient les formules générales, lorsqu'on les interprète d'une manière plus terre à terre, dans l'espace à  $r$  dimensions, ou extension en configuration, dont le temps ne fait plus partie. Nous allons reprendre la formule (VIII. 57) de Lagrange, en développant explicitement tous les termes; nous avons tout d'abord la dérivée  $\frac{d}{dt} p_i$  prise en suivant le mouvement du système, d'après (VIII. 12); prenons donc  $p_i$  dans (VIII. 55) et dérivons :

$$(VIII. 73) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{h=1}^r \frac{\partial v_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \sum_{j,h=1}^r \left[ \frac{\partial M_{ij}}{\partial t} q^j + \frac{\partial M_{ij}}{\partial q^h} \dot{q}^j \dot{q}^h + M_{ij} \ddot{q}^j \right].$$

Portons cette expression dans (VIII. 57) et nous obtenons :

$$(VIII. 74) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial q^i} + \sum_{h=1}^r \left( \frac{\partial v_i}{\partial q^h} - \frac{\partial v_h}{\partial q^i} \right) \dot{q}^h + \sum_{j,h=1}^r \left[ \frac{\partial M_{ij}}{\partial t} \dot{q}^j + M_{ij} \ddot{q}^j + \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial q^h} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^j \dot{q}^h \right] + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0.$$

Nous allons étudier, sur quelques exemples particuliers, la signification des différents termes; disons tout de suite que le développement (VIII. 74) tient compte de toutes les *forces centrifuges et forces de Coriolis*. Les forces centrifuges sont appliquées uniformément à tous les points mobiles, qu'ils soient au repos dans les axes  $q$  ou en mouvement par rapport à ces axes; nous aurons donc à prévoir l'identification suivante :

$$(VIII. 75) \quad f_i = - \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial q^i} \quad \text{forces centrifuges.}$$

Les forces de Coriolis sont *proportionnelles à la vitesse*  $q^h$  du point mobile, dans les axes  $q$ ; ces forces seront données par le second groupe de termes :

$$(VIII. 76) \quad C_i = \sum_{h=1}^r \left( - \frac{\partial v_i}{\partial q^h} + \frac{\partial v_h}{\partial q^i} \right) q^h \quad \text{Coriolis.}$$

La formule fait apparaître le *rotationnel du vecteur covariant*  $v_h$ . Enfin les derniers termes, en  $M_{ij}$  sont tous les termes d'inertie; nous les retrouvons ici tout à fait semblables à ceux de la formule (VIII. 33) relative aux liaisons rigides; la seule innovation consiste dans le terme  $\frac{\partial M_{ij}}{\partial t}$ , nécessaire pour tenir compte de la variabilité des coefficients d'inertie  $M_{ij}$ .

Pour confirmer notre interprétation, nous prendrons quelques exemples simples, en les choisissant parmi les cas de systèmes de référence en mouvement; ces problèmes rentrent dans le schéma développé, comme nous le notions au début du paragraphe 6.

Soient  $x^1, x^2, x^3$  les coordonnées d'un point mobile libre, de masse  $m$  par rapport à 3 axes au repos, et  $q^1, q^2, q^3$  les coordonnées de ce point dans un système de référence en mouvement; nous prendrons d'abord un mouve-

ment *uniformément accéléré*; les équations (VIII. 7) exprimant les  $x$  en fonction des  $q$  seront :

$$(VIII. 77) \quad x^1 = q^1 + \frac{1}{2} \gamma t^2 \quad x^2 = q^2 \quad x^3 = q^3.$$

Les formules (VIII. 54) nous donnent :

$$(VIII. 78) \quad \begin{aligned} \mu &= \sum_k m_k \left( \frac{\partial x^k}{\partial t} \right)^2 = m \gamma^2 t^2 \\ \nu_i &= \sum_k m_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial t} & \nu_1 &= m \gamma t & \nu_2 &= \nu_3 = 0 \\ M_j &= \sum_k m_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j} & M_{11} &= M_{22} = M_{33} = m \\ & & M_{12} &= M_{23} = M_{32} = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors l'élément linéaire  $dS^2$  de l'espace-temps à 4 dimensions (VIII. 63), en l'absence de toute énergie potentielle  $V$  :

$$(VIII. 79) \quad dS^2 = (A + m \gamma^2 t^2) dt^2 + 2 m \gamma t dq^1 dt + m [(dq^1)^2 + (dq^2)^2 + (dq^3)^2].$$

Les forces centrifuges et de Coriolis sont ici :

$$(VIII. 80) \quad \begin{cases} f_1 = -\frac{\partial \nu_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial q^1} = -m \gamma & f_2 = 0 & f_3 = 0 \\ C_1 = C_2 = C_3 = 0. \end{cases}$$

Ces résultats sont bien connus, et n'exigent pas d'autres commentaires; dans ces axes accélérés, le point se meut comme s'il était soumis à une force extérieure —  $m \gamma$  dirigée suivant l'axe 1.

Nous trouverons un exemple un peu plus complet si nous prenons pour les  $q$  un système d'axes orthogonaux en rotation autour de l'axe  $x^3$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante.

Admettons que les axes coïncident en  $t = 0$ ; nous aurons :

$$(VIII. 81) \quad \begin{aligned} x^1 &= (q^1) \cos \omega t + (q^2) \sin \omega t & x^2 &= -(q^1) \sin \omega t + (q^2) \cos \omega t \\ & & x^3 &= (q^3). \end{aligned}$$

Les coefficients de la formule (VIII. 54) sont :

$$(VIII. 82) \quad \begin{aligned} \mu &= \sum_k m_k \left( \frac{\partial x^k}{\partial t} \right)^2 = m \omega^2 [(q^1)^2 + (q^2)^2] \\ \nu_i &= \sum_k m_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial t} = m \omega (q^2) & M_{11} &= M_{22} = M_{33} = m \\ & & M_{12} &= M_{23} = M_{31} = 0 \\ \nu_2 &= -m \omega (q^1) & \nu_3 &= 0. \end{aligned}$$

L'élément linéaire  $dS^2$  dans l'espace-temps à 4 dimensions prend la forme :

$$(VIII. 83) \quad dS^2 = [A + m \omega^2 ((q^1)^2 + (q^2)^2)] dt^2 + 2 m \omega [(q^2) dq^1 - (q^1) dq^2] dt + m [(dq^1)^2 + (dq^2)^2 + (dq^3)^2]$$



et voici les forces centrifuges et de Coriolis :

$$\begin{aligned}
 (viii. 84) \quad f_1 &= -\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial q^1} = +m\omega^2(q^1) & f_2 &= +m\omega^2(q^2) & f_3 &= 0 \\
 C_1 &= \sum_h \left( -\frac{\partial v_1}{\partial q^h} + \frac{\partial v_h}{\partial q^1} \right) \dot{q}^h = -2m\omega(\dot{q}^2) & C_2 &= +2m\omega(\dot{q}^1) & C_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

La force centrifuge  $+m\omega^2 r$  est bien connue; quant à la force de Coriolis, on sait qu'elle est effectivement donnée par les formules ci-dessus.

Nous avons donc correctement interprété nos formules générales; les équations de Lagrange ou les formules des géodésiques de l'espace-temps contiennent tous les termes de correction nécessaires. Les exemples précédents soulignent que les *forces fictives* dues au mouvement du système de référence mobile  $q$  sont proportionnelles à la masse  $m$  de la particule. Ce sont donc en réalité les *accélérations* qui sont données.

On sait tout le parti qu'Einstein a tiré de cette remarque : les forces de pesanteur et d'*attraction universelle* sont, elles aussi, rigoureusement proportionnelles aux masses; un champ d'accélération représente correctement ces phénomènes. Einstein a donc cherché à relier les effets de gravitation à des équations analogues aux précédentes; il lui faut un espace-temps dans lequel jouera un élément linéaire  $dS^2$  spécial, mais cet espace-temps ne pourra jamais être ramené à une forme euclidienne par le choix de coordonnées  $x$  particulières, car il aura une certaine *courbure* irréductible.

Revenons aux deux exemples précédents, du mouvement d'un point par rapport à un système de référence en mouvement accéléré. Il n'y a pas ici de liaisons véritables; aucun travail auxiliaire n'est fourni, de sorte que l'énergie totale  $E$  doit se conserver. Reportons-nous à l'équation (viii. 61) du bilan énergétique.

$$(viii. 85) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

L'énergie potentielle  $V$  est nulle; dans l'exemple de l'accélération constante (éq. viii. 78), nous avons :

$$\begin{aligned}
 T_1 + 2T_0 &= T_1 + \mu = m\gamma^2 t^2 + m\gamma t \dot{q}^1 \\
 \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) &= 2m\gamma^2 t + m\gamma \dot{q}^1 + m\gamma t \dot{\dot{q}}^1
 \end{aligned}$$

mais :

$$T = \frac{1}{2} m\gamma^2 t^2 + m\gamma t \dot{q}^1 + \frac{1}{2} m[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = m\gamma^2 t + m\gamma \dot{q}^1$$

donc :

$$(viii. 86) \quad \frac{dE}{dt} = m\gamma^2 t + m\gamma t \dot{\dot{q}}^1 = 0$$

car, en vertu de (viii. 80) l'accélération  $\ddot{q}^1$  équilibre la force fictive (centrifuge) et est égale à  $-\gamma$ .

Dans le problème des axes en rotation, nous aboutirons au même résultat. Voici le détail des calculs :

$$T_1 + 2T_0 = \mu + T_1 = m\omega^2[(q^1)^2 + (q^2)^2] + m\omega[(q^2)(\dot{q}^1) - (q^1)(\dot{q}^2)]$$

$$(viii. 87) \quad \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) = 2m\omega^2[(q^1)(\dot{q}^1) + (q^2)(\dot{q}^2)] + m\omega[(q^2)(\dot{q}^1) - (q^1)(\dot{q}^2)].$$

La dérivée partielle  $\frac{\partial T}{\partial t}$  est nulle puisqu'aucun des coefficients  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $M$  de *viii. 82* ne contient le temps; donc  $\frac{dE}{dt}$  est identique à la dérivée  $\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0)$ , et celle-ci est nulle, car le mouvement du point mobile, sous l'influence des forces centrifuges et de Coriolis est :

$$(viii. 88) \quad \begin{cases} m\ddot{q}_1 = f_1 + C_1 = m\omega^2(q^1) - 2m\omega(\dot{q}^2) \\ m\ddot{q}_2 = f_2 + C_2 = m\omega^2(q^2) + 2m\omega(\dot{q}^1). \end{cases}$$

Prenons un autre exemple, celui d'un point mobile, de masse  $m$  assujéti à rester dans un plan vertical tournant autour d'un axe vertical (contenu dans le plan) avec une vitesse constante  $\omega$ . Nous prendrons les équations (*viii. 81*) en y faisant  $q^2 = 0$ ; posons donc :

$$q^1 = \rho \quad q^3 = x^3 = z$$

et nous trouvons d'après (*viii. 82*) :

$$\mu = m\omega^2\rho^2 \quad \nu_1 = 0 \quad M = m$$

$$T = \frac{m}{2} (\omega^2\rho^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2).$$

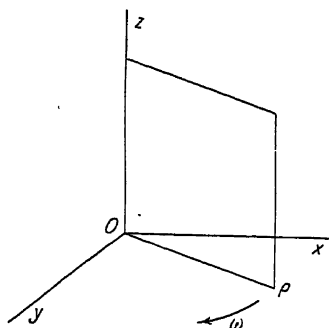


Fig. viii. 1.

Admettons une énergie potentielle  $V(\rho, z)$  indépendante du temps; notre espace-temps aura 3 dimensions  $\rho$ ,  $z$ ,  $t$  et son élément linéaire s'écrira :

$$(viii. 89) \quad dS^2 = (A + m\omega^2\rho^2 - 2V)dt^2 + m d\rho^2 + m dz^2.$$

Dans le plan  $\rho$ ,  $z$ , les mouvements seront les mêmes que si ce plan était au repos, mais que le point soit soumis à une énergie potentielle supplémentaire :

$$V' = -\frac{1}{2} m\omega^2\rho^2$$

car ces conditions nous donneraient :

$$(viii. 90) \quad dS^2 = (A - 2V' - 2V)dt^2 + m d\rho^2 + m dz^2.$$

Le  $dS^2$  étant identique au précédent, les géodésiques sont les mêmes, donc les mouvements se reproduisent sans changement.

Nous avons ici un exemple où les liaisons effectuent des travaux non nuls,

de sorte que l'énergie du point (mobile dans le plan en rotation) ne se conserve pas, la formule (VIII. 85) donne :

$$E = \frac{m}{2} (\omega^2 \rho^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + V,$$

$$(VIII. 91) \quad \frac{dE}{dt} = 2 \frac{dT_0}{dt} = \frac{d\mu}{dt} = 2m\omega^2 \rho \dot{\rho} \neq 0.$$

Si l'on étudie le mouvement correspondant à (VIII. 90), c'est-à-dire un point mobile dans un plan fixe avec les énergies potentielles  $V$  et  $V'$ , on lui fera porter une énergie :

$$(VIII. 92) \quad E' = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + V + V' = E - m\omega^2 \rho^2.$$

Cette expression  $E'$  reste effectivement constante, les variations de  $E$  et de  $m\omega^2 \rho^2$  se compensant.

### XI. — Principe de moindre action de Lagrange.

Les équations de la mécanique peuvent être ramenées à un principe de moindre action, soit sous la forme générale de Lagrange, soit sous l'aspect plus spécial de Maupertuis. Nous allons rappeler l'essentiel de cette réduction, qui nous permettra de confirmer les résultats obtenus dans les paragraphes précédents, et d'en mieux saisir le sens. La condition de « moindre action » se comparera directement à la propriété de « minimum de longueur » des géodésiques, et donnera tout son caractère de généralité aux équivalences que nous avons trouvées, entre la résolution d'un problème de mécanique et la recherche de certaines géodésiques.

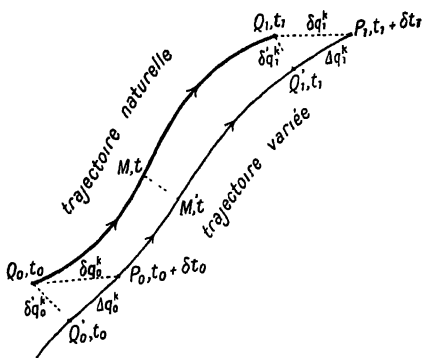


Fig. VIII 2

Considérons un problème très général, à liaisons holonomes dépendant du temps ; nous aurons une énergie cinétique  $T$  et une énergie potentielle  $V$  qui seront des fonctions des coordonnées spatiales  $q^k$ , des vitesses  $\dot{q}^k$  et du temps  $t$  explicitement. Nous formons alors la *fonction de Lagrange* (VIII. 26) :

$$(VIII. 93) \quad L(q^k, \dot{q}^k, t) = T(q^k, \dot{q}^k, t) - V(q^k, t).$$

Le moment  $p_k$  conjugué à la coordonnée  $q^k$  est donné par (VIII. 20 ou 27) :

$$(VIII. 94) \quad p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}$$

et les équations de Lagrange (VIII. 19 ou 27) prennent la forme :

$$(VIII. 95) \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^k}.$$

Nous allons étudier la valeur que prend, par suite de l'évolution du système, l'intégrale d'action :

$$(VIII. 96) \quad W = \int L dt.$$

Nous calculerons d'abord la valeur de cette intégrale, lors de l'évolution naturelle; le point représentatif part de la position initiale  $Q_0$  au temps  $t_0$  et aboutit en un point  $Q_1$  au temps  $t_1$ ; nous comparerons la valeur de  $W$  prise le long de ce mouvement naturel, à sa valeur pour une évolution arbitraire, partant d'un point  $P_0$  voisin de  $Q_0$ , en un temps  $t_0 + \delta t_0$ , pour aboutir en un point  $P_1$  voisin de  $Q_1$  à l'instant  $t_1 + \delta t_1$  (fig. VIII. 2). Soient  $q^1 \dots q^r$  les coordonnées d'un point  $M$  de la trajectoire naturelle; le système a la configuration  $M$  à l'instant  $t$ ; sur la trajectoire « variée » le point représentatif passerait en  $M'(q^1 + \delta q^1 \dots q^r + \delta q^r)$  à l'instant  $t$ . Nous voulons calculer :

$$(VIII. 97) \quad \delta W = \delta \int L dt = \int_{P_0, t_0 + \delta t_0}^{P_1, t_1 + \delta t_1} L dt - \int_{Q_0, t_0}^{Q_1, t_1} L dt.$$

Nous commencerons par tenir compte des variations  $\delta t_0$  et  $\delta t_1$  aux extrémités; appelons  $Q'_0$  le point de la trajectoire variée qui est atteint à l'instant  $t_0$  et  $Q'_1$  celui qui correspond à  $t_1$ . Les composantes du segment  $Q_1 P_1$  seront appelées  $\delta q^k_1$ ; celles du segment  $Q_1 Q'_1$  seront  $\delta' q^k_1$ , et celles du bout de la trajectoire variée :

$$(VIII. 98) \quad \text{segment } Q'_1 P_1 \quad \Delta q^k = \dot{q}^k_1 \delta t_1.$$

La vitesse  $\dot{q}^k_1$  sur la trajectoire variée ne diffère de celle de la trajectoire réelle que par un infiniment petit, qui ne donnerait dans  $\Delta q^k_1$  qu'une correction du second ordre. Des formules semblables sont valables auprès du point initial  $Q_0$ . Mettons donc à part les intégrations sur les segments terminaux  $Q'_0 P_0$  en  $P_1 Q'_1$ , et nous aurons :

$$(VIII. 99) \quad \begin{aligned} \delta W &= (L_1 \delta t_1)_{Q'_1 P_1} - (L_0 \delta t_0)_{Q'_0 P_0} + \int_{Q'_0, t_0}^{Q'_1, t_1} L dt - \int_{Q_0, t_0}^{Q_1, t_1} L dt \\ &= (L_1 \delta t_1)_{Q'_1 P_1} - (L_0 \delta t_0)_{Q'_0 P_0} + \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt. \end{aligned}$$

Quelle est, à l'instant  $t$ , la variation  $\delta L$  de la fonction de Lagrange ?

$$\delta L = L(M') - L(M) = \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right).$$

Nous avons choisi deux positions simultanées, il n'y a donc pas à introduire là une variation  $\frac{\partial L}{\partial t} \delta t$ , et les seules variations sont celles  $\delta q^k$  et  $\delta \dot{q}^k$  des coordonnées et vitesses. D'autre part :

$$\delta \dot{q}^k = \delta \left( \frac{dq^k}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta q^k).$$

Intégrons par parties :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} (\delta q^k) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right] - \delta q^k \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right).$$

Portons ces expressions dans (viii. 99), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \text{(viii. 100)} \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt &= \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right)_1 \delta' q_1^k - \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right)_0 \delta' q_0^k \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \right] \delta q^k dt. \end{aligned}$$

Dans les deux premiers termes, ce sont les  $\delta' q_1^k$  et  $\delta' q_0^k$  qui figurent, car l'intégrale  $\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt$  représente la différence des intégrales prises de  $Q_0$  à  $Q_1$  ou de  $Q_0$  à  $Q_1$ ; ce fait est bien visible sur la formule (viii. 99). *Point important : grâce aux équations de Lagrange* (viii. 94 et 95) *la dernière intégrale de* (viii. 100) *disparaît complètement.*

Regroupons les résultats obtenus en (viii. 99 et 100) :

$$\text{(viii. 101)} \quad \delta W = (L_1 \delta t_1)_{Q_1 P_1} - (L_0 \delta t_0)_{Q_0 P_0} + \sum_k p_{1k} \delta' q_1^k - \sum_k p_{0k} \delta' q_0^k$$

avec les notations (viii. 94) qui simplifient l'écriture.

Les déplacements  $\delta' q_1^k$  sont la différence entre les  $\delta q_1^k$  effectifs et les  $\delta q_1^k$  définis en (viii. 98) :

$$\begin{aligned} \vec{Q}_1 \vec{Q}_1' &= \vec{Q}_1 \vec{P}_1 - \vec{Q}_1' \vec{P}_1 \\ \delta' q_1^k &= \delta q_1^k - \Delta q_1^k = \delta q_1^k - \dot{q}_1^k \delta t_1. \end{aligned}$$

La formule (viii. 101) prend donc la forme définitive que voici :

$$\text{(viii. 102)} \quad \delta W = -H_1 \delta t_1 + \sum_k p_{1k} \delta q_1^k + H_0 \delta t_0 - \sum_k p_{0k} \delta q_0^k,$$

avec :

$$\text{(viii. 103)} \quad H = \sum_k p_k \dot{q}^k - L(q^k, \dot{q}^k, t).$$

La même transformation a été appliquée pour le voisinage du point initial  $Q_0$  et du point final  $Q_1$ . La fonction nouvelle  $H$  que nous venons de définir est la *fonction de Hamilton*.

Cette formule est d'une très grande importance pour tous les principes généraux de la mécanique. Nous en tirerons tout d'abord le *principe de moindre action de Lagrange*.

Supposons qu'il n'y ait aucune variation aux deux extrémités du mouvement; nous partons donc (fig. viii. 3) d'un mouvement naturel, s'effectuant sur la trajectoire  $Q_0 M Q_1$ , de l'instant  $t_0$  à l'instant  $t_1$ ; puis nous prenons une trajectoire voisine  $Q_0 M' Q_1$ , parcourue dans le même temps  $t_0$  à  $t_1$  : les variations  $\delta q_0^k$  et  $\delta q_1^k$  aux deux extrémités sont nulles (mêmes points terminaux  $Q_0$  et  $Q_1$ ); les variations  $\delta t_0$  et  $\delta t_1$  sont aussi nulles (même durée de parcours). Dans ces conditions, la variation de l'intégrale d'action est nulle :

$$\text{(viii. 104)} \quad \delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0.$$

Réciproquement, la condition (VIII. 104) suffit à fixer les équations du mouvement, si nous nous rappelons que cette condition doit être remplie, quel que soit le mouvement arbitraire varié qui sert à la comparaison : en effet,

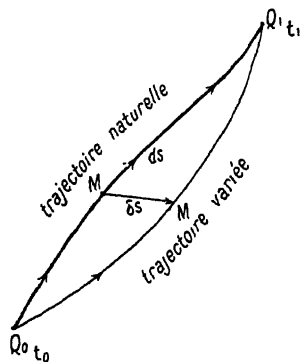


Fig. VIII. 3.

les  $\delta q^k$  et  $\delta t$  étant nuls aux extrémités, la variation  $\delta W$  se compose uniquement de l'intégrale de la seconde ligne, dans l'équation (VIII. 100). Cette intégrale ne peut être nulle, pour toute variation arbitraire  $\delta q^k$  que si toutes les parenthèses sont séparément nulles, ce qui nous redonne les équations de Lagrange (VIII. 94 et 95).

Comparons ces résultats à ceux que nous avons obtenus par voie géométrique, aux paragraphes 7, 8 et 9. Nous considérons un *espace-temps* à  $r + 1$  dimensions,  $q^0$  étant le temps et  $q^1 \dots q^r$  les coordonnées de configuration. Dans cet espace de Riemann, nous avons choisi notre métrique de manière à obtenir (VIII. 62) :

$$(VIII. 62) \quad dS^2 = (A + 2T - 2V)dt^2 = (A + 2L)dt^2$$

avec une constante  $A$  très grande devant  $T$ ,  $V$  ou  $L$ . Développons alors et gardons la première approximation :

$$dS = \sqrt{A + 2L}dt = \sqrt{A}(1 + \frac{L}{A} \dots)dt.$$

L'intégrale d'action  $W$ , prise suivant une trajectoire quelconque (naturelle ou variée) s'exprime directement en fonction de la longueur  $S$  de cette trajectoire dans l'espace-temps :

$$(VIII. 103) \quad S = \int_{q_0, t_0}^{q_1, t_1} dS = \int [\sqrt{A} + \frac{L}{\sqrt{A}} \dots] dt = \sqrt{A}(t_1 - t_0) + \frac{W}{\sqrt{A}} \dots$$

Lorsque les positions extrêmes  $Q_0 Q_1$  et l'intervalle de temps  $t_1 - t_0$  sont fixés, la variation de  $S$  et celle de  $W$  sont proportionnelles. Le minimum de l'un correspond au minimum de l'autre. Le mouvement naturel correspond au minimum de l'intégrale d'action  $W$ , donc au minimum de la longueur  $S$  de la trajectoire (mesurée suivant nos conventions VIII. 62); la trajectoire est nécessairement une *géodésique de l'espace-temps*. C'est bien ce que nous avons trouvé par l'étude détaillée des équations de mouvement.

## XII. — Systèmes conservatifs à liaisons holonomes indépendantes du temps.

Cette classe de systèmes est extrêmement importante, parce qu'elle satisfait à la *conservation de l'énergie totale*. L'énergie potentielle  $V$  dépend seulement des variables de configuration  $q^k$ ; l'énergie cinétique  $T$  dépend des  $\dot{q}^k$  et des  $q^k$  (forme quadratique homogène en  $\dot{q}^k$ ); le temps ne figure pas

explicitement ; la fonction  $L$  de Lagrange comprend aussi les  $q^k$  et  $\dot{q}^k$  et l'on a, pour un mouvement naturel :

$$E = T + V = C^{\text{te}}.$$

Nous avons admis, dans notre discussion du principe de minimum d'action, que nous pouvions comparer, au mouvement naturel du système, un mouvement « varié » absolument arbitraire. Sur ce mouvement varié, l'énergie totale  $E$  ne restera ni constante ni égale à celle du système sur son mouvement naturel.

Pour ces systèmes conservatifs, nous avons la relation :

$$(viii. 106) \quad L = T - V = 2T - E.$$

La fonction de Hamilton  $H$  va s'identifier avec l'énergie totale du système. En effet, les liaisons étant indépendantes du temps, l'énergie cinétique  $T$  est une fonction quadratique homogène des vitesses  $\dot{q}^k$ , ce qui entraîne la relation :

$$(viii. 107) \quad 2T = \sum_k p_k \dot{q}^k \quad \text{puisque} \quad p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}.$$

Dans ces conditions la relation (viii. 103) donne :

$$(viii. 108) \quad H = \sum_k p_k \dot{q}^k - L = 2T - L = E$$

et la formule (viii. 102) se transcrit ainsi :

$$(viii. 109) \quad \delta W = -E(\delta t_1 - \delta t_0) + \sum_k p_{1k} \delta q_1^k - \sum_k p_{0k} \delta q_0^k.$$

A côté de l'intégrale  $W$  définie en (viii. 96), nous aurons intérêt à considérer l'intégrale suivante :

$$(viii. 110) \quad F = 2 \int T dt = \int \sum_k p_k \dot{q}^k dt = \int \sum_k p_k dq^k.$$

En tenant compte de la relation (viii. 106), nous établissons la formule qui relie  $F$  et  $W$  :

$$(viii. 111) \quad W = \int L dt = \int (2T - E) dt = F - \int E dt.$$

Comparons les valeurs des intégrales  $F$ , prises sur deux trajectoires voisines, dont la première est une trajectoire naturelle du système, tandis que l'autre est une trajectoire voisine, tout à fait arbitraire, avec la seule condition de respecter les liaisons. Sur la trajectoire naturelle, l'énergie totale  $E$  reste constante, mais cela n'a pas lieu sur la trajectoire variée ; nous obtenons donc :

$$\delta F = \delta W + \delta \int E dt = \delta W + \int \delta E dt + E \delta t_1 - E \delta t_0$$

en mettant en évidence les variations aux extrémités 0 et 1 de la trajectoire. Dans cette formule, portons l'expression (viii. 109) ; il en résulte :

$$(viii. 112) \quad \delta F = \int \delta E dt + \sum_k p_{1k} \delta q_1^k - \sum_k p_{0k} \delta q_0^k.$$

Tel est le résultat général, dont nous aurons d'ailleurs à nous servir par la suite. Procédons maintenant à une simplification ; dans l'arbitraire des trajectoires variées, nous allons introduire une restriction. Nous n'admettrons plus, comme *mouvements variés* que ceux pour lesquels l'énergie totale reste constante et inchangée. Nous allons obtenir ainsi le *principe de Maupertuis*.

Si nous n'avons plus de variations de l'énergie totale, la valeur  $E$  reste constante et fixée une fois pour toutes ; les formules (VIII. 111 et 112) se simplifient alors ainsi :

$$W = F - Et$$

$$(VIII. 113) \quad \delta F = \sum_k p_{1k} \delta q_1^k - \sum_k p_{0k} \delta q_0^k.$$

Le minimum de  $W$ , à temps  $t$  donné, se confond avec celui de  $F$ . Admettons qu'il n'y ait pas de variations aux extrémités du parcours :

$$\delta q_1^k = 0 \quad \delta q_0^k = 0;$$

les points extrêmes de la trajectoire sont alors supposés fixes, comme sur le schéma de la figure VIII. 3 ; les instants  $t_0$  et  $t_1$  sont aussi donnés ; il n'y a pas de variation sur la durée du parcours  $Q_0 Q_1$  ; cela résulte du fait que l'énergie totale  $E$  est fixée, car si l'on se donne  $E$ , la durée  $t_1 - t_0$  du parcours s'en déduit (et inversement). Dans ces conditions, la variation  $\delta F$  de l'intégrale (VIII. 110) s'annule, ce qui constitue le principe de moindre action de Maupertuis.

Reprenons maintenant, avec ces données nouvelles, l'examen des méthodes géométriques que nous avons indiquées aux paragraphes 5, 6 et 7.

I (§ 5). Nous avons défini les propriétés géométriques de l'*extension en configuration*, hyperspace à  $r$  coordonnées  $q^1 \dots q^r$ , en nous servant de l'énergie cinétique  $T$  pour définir la métrique ; nous posions :

$$(VIII. 28) \quad ds^2 = 2T dt^2$$

ce qui nous donnait l'identité entre le *moment*  $p$ , conjugué à la coordonnée  $q^i$ , (d'après VIII. 94) et la *vitesse covariante*  $\dot{q}_i$ . Le mouvement du point représentatif du système, dans l'extension en configuration, est exactement celui d'un point réel de masse 1, sous l'influence d'une énergie potentielle  $V$ , et s'exprime par les conditions :

$$(VIII. 33) \quad \frac{Dp_i}{Dt} = \frac{Dq_i}{Dt} = - \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

En passant par une certaine position  $M(q^1 \dots q^r)$ , le point figuratif possède une vitesse  $v$ , parfaitement déterminée dès que l'énergie totale  $E$  est connue :

$$(VIII. 36) \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2T} = \sqrt{2(E - V)}.$$

Cette expression va nous permettre une transcription fort intéressante du principe de Maupertuis. Comparons, comme en (VIII. 113), deux trajectoires,



l'une naturelle, l'autre artificielle, mais ayant mêmes extrémités, même énergie totale, même durée de parcours :

$$(VIII. 114) \quad \int \delta(2T)dt = \delta \int 2Tdt = \delta \int \sqrt{2T}ds = \delta \int vds = 0$$

vu l'absence de variation aux extrémités nous pouvons, à volonté, poser le signe de variation  $\delta$  sous le signe d'intégration ou au dehors. Nous discuterons plus loin une interprétation de cette condition.

Si le système étudié est *libre, sans énergie potentielle*  $V$ , la vitesse  $v$  du point représentatif est constante, égale à  $\sqrt{2E}$ , le principe de Maupertuis (VIII. 114) se réduit à la condition :

$$(VIII. 115) \quad v = \sqrt{2E} \quad \delta \int ds = 0$$

c'est-à-dire à une condition de minimum de longueur de la trajectoire. Le point figuratif du système décrit donc une géodésique de l'extension en configuration. Il faut noter ici une curieuse particularité : quelle que soit l'énergie cinétique communiquée au système, le point représentatif décrit toujours la même courbe (la géodésique) pour aller du point initial  $Q_0$  au point final  $Q_1$  ; la durée du trajet est seule modifiée, car la vitesse du point est  $\sqrt{2E}$  le long de la courbe ; la durée d'évolution sera donc proportionnelle à  $(2E)^{-\frac{1}{2}}$ . Ces résultats sont tout à fait particuliers aux mouvements sans énergies potentielles.

II (§ 6). Nous pouvons prendre un espace à  $r$  dimensions, et choisir sa métrique d'une manière particulière, en posant (VIII. 40 et 44) :

$$ds'^2 = Fds^2 = 2(E - V)ds^2$$

$$ds' = \sqrt{2(E - V)}ds = \sqrt{2T}ds.$$

Le principe de Maupertuis sous la forme (VIII. 114) se réduit à un principe de longueur minima  $s'$  de la courbe trajectoire, dans ce nouvel espace. La trajectoire est donc une géodésique, comme nous l'avons constaté au paragraphe 6. Les conditions précédentes exigent qu'on se donne la valeur de l'énergie totale  $E$ , et qu'on ne compare que des mouvements de même énergie totale ; nous avons souligné ce point au paragraphe 6, et nous l'avons redit à propos du principe de Maupertuis.

La trajectoire est une géodésique de cet espace très particulier, mais le point figuratif du système ne décrit plus cette trajectoire avec une vitesse constante (cf. § 6).

III (§ 7). Si nous passons dans un « espace-temps » à  $r + 1$  dimensions, nous pouvons appliquer le principe général de Lagrange et non plus celui (plus restreint) de Maupertuis ; c'est ce que nous avons retrouvé au paragraphe précédent (VIII. 100 et 103).

**XIII. — La mécanique rationnelle comparée  
à une optique géométrique.  
Principe de Maupertuis et principe de Fermat.**

L'optique géométrique permet de calculer le trajet d'un rayon lumineux, lorsque celui-ci traverse un milieu isotrope hétérogène, de structure quelconque. L'*isotropie* est nécessaire pour qu'on puisse, en chaque point de l'espace, définir un indice optique ou, ce qui revient au même, une valeur locale de la *vitesse de propagation*, cette vitesse dépendant seulement des coordonnées de position  $q^k$ , mais non pas de la direction du rayon lumineux lorsqu'il passe au point considéré ; nous admettrons donc que nous pouvons donner une fonction :

$$(VIII. 116) \quad u(q^1 \dots q^r) = \text{vitesse du rayon lumineux.}$$

Cette vitesse  $u$  n'étant pas constante, d'un point à un autre, le milieu que nous considérons n'est *pas homogène*.

Lorsque ces conditions sont remplies, le trajet du rayon lumineux s'obtient par le *principe de Fermat* : pour aller d'un point  $Q_0$  initial à un point  $Q_1$  final, le rayon suit la route « la plus courte », c'est-à-dire celle pour laquelle la *durée du parcours est minima* :

$$(VIII. 117) \quad \delta \int dt = \delta \int \frac{ds}{u} = 0.$$

Bien entendu, il ne faut pas prendre à la lettre le mot « minimum ». La formule (VIII. 117) indique seulement une condition de stationarité ; lorsqu'on compare le rayon réel et un trajet voisin très peu différent, ayant mêmes extrémités  $Q_0, Q_1$ , la variation  $\delta$  de la durée de parcours est nulle. En réalité, la durée de parcours pourra être maxima vis-à-vis de certaines variations du rayon et minima pour d'autres. Une étude détaillée, dans certains systèmes optiques simples, montre que l'on obtient un maximum, ou un minimum, ou une condition mixte, suivant que le point final  $Q_1$  se trouve avant les deux focales ou après les deux focales ou entre celles-ci : nous pensons ici aux deux focales qui constituent l'image de la source  $Q_0$ , au travers du système optique constitué par le milieu hétérogène.

Nous avons déjà fait des restrictions analogues à propos du « minimum » de l'action de Lagrange ou du « minimum » de longueur des géodésiques.

Nous obtenons le trajet d'un rayon lumineux, au moyen du principe de Fermat, par une condition de minimum, qui se présente sous un aspect tout à fait semblable à la condition de moindre action de Maupertuis. Nous pourrions identifier ces deux principes, si nous admettons que la vitesse  $u$  d'une certaine onde fictive, dans l'extension en configuration, soit donnée par :

$$(VIII. 118) \quad u = \frac{K}{\sqrt{2(E - V)}} = \frac{K}{v}.$$

Les conditions (VIII. 114) de la mécanique rationnelle d'un système conservatif, et (VIII. 117) de l'optique géométrique sont alors identiques. La trajectoire du point représentatif est la courbe même que suit le rayon lumineux

fictif de notre optique. Nous avons insisté, à la fin du paragraphe 5, sur le fait que la vitesse  $v$  du mobile était définie, en chaque point de l'extension en configuration, dès qu'on s'était fixé la valeur  $E$  de l'énergie totale ; la direction du mouvement n'intervenait pas. Ce sont bien là les conditions de l'optique d'un milieu isotrope hétérogène, comme nous le supposons au début de ce paragraphe.

La trajectoire du mobile coïncide avec le rayon lumineux, mais, le long de cette courbe, le mobile se meut avec la vitesse  $v$  tandis que la surface d'onde se propage avec la vitesse  $u$ , inversement proportionnelle à  $v$ .

Cette réduction de la mécanique rationnelle à une optique particulière est à la base des méthodes de Hamilton pour la résolution des équations de la mécanique. Elle a servi de point de départ à L. de Broglie, dans sa découverte de la mécanique ondulatoire <sup>(1)</sup> ; L. de Broglie raisonnait en mécanique relativiste et la transcription pour la mécanique rationnelle a été précisée par E. Schrödinger, dont nous suivons ici le mode d'exposition.

#### XIV. — Équations de Hamilton, forme générale.

Nous avons rappelé, au paragraphe 11, les définitions de la fonction de Lagrange  $L$  et de celle de Hamilton  $H$ , pour un système très général, comportant des liaisons variables, de sorte que  $T$  et  $V$  dépendent explicitement du temps :

$$(viii. 93) \quad L(q^k, \dot{q}^k, t) = T(q^k, \dot{q}^k, t) - V(q^k, t)$$

$$(viii. 103) \quad H = \sum_k p_k \dot{q}^k - L(q^k, \dot{q}^k, t).$$

La fonction de Lagrange  $L$  contient les coordonnées  $q^k$ , les vitesses  $\dot{q}^k$  et le temps, comme variables indépendantes ; sa différentielle totale s'écrit :

$$(viii. 119) \quad dL = \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k + p_k d\dot{q}^k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

en vertu de la définition (viii. 94) des moments  $p_k$ . Quelles sont les variables dans la fonction de Hamilton ? Pour le voir, nous développerons la différentielle totale de  $H$  :

$$\begin{aligned} (viii. 120) \quad dH &= \sum_k (p_k d\dot{q}^k + \dot{q}^k dp_k) - dL \\ &= \sum_k (\dot{q}^k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Ainsi donc, ce sont les coordonnées  $q^k$ , les moments  $p_k$  et le temps  $t$ , qui apparaissent comme variables dans la fonction de Hamilton :

$$H(q^k, p_k, t).$$

<sup>(1)</sup> L. DE BROGLIE. *Introduction à la mécanique ondulatoire*. Hermann, Paris, 1930. — *La théorie de la quantification dans la nouvelle mécanique*. Hermann, Paris, 1932.

Les équations du mouvement s'exprimaient, au moyen de la fonction de Lagrange, sous la forme :

$$(VIII. 94 \text{ et } 95) \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \quad \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q^k}.$$

Considérons maintenant la différentielle totale  $dH$  de (VIII. 120), nous en tirons les valeurs des dérivées partielles de  $H$  :

$$(VIII. 121) \quad \dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \frac{\partial L}{\partial q^k} = - \frac{\partial H}{\partial q^k} = p_k.$$

Ces deux groupes d'équations sont exactement équivalents aux précédents (VIII. 94, 95), et constituent les équations du mouvement, exprimées au moyen de la fonction  $H$  de Hamilton.

Revenons à la fonction  $W$ , que nous avons définie en (VIII. 96) par l'intégrale  $\int L dt$ , prise d'un point initial  $Q_0$  à un point final que nous appellerons maintenant  $Q$  (sans indice), et pour un mouvement effectué en un temps  $t$ . Nous imposons la condition que l'intégration soit faite en suivant le mouvement du point représentatif, c'est-à-dire sur la trajectoire naturelle, et non plus sur une trajectoire variée arbitraire. Dans ces conditions, nous pourrions considérer  $W$  comme une fonction des coordonnées  $q^k$  du point final  $Q$ , et du temps  $t$ . Les coordonnées  $q_0^k$  du point initial  $Q_0$  forment un système de  $r$  paramètres. La formule (VIII. 102) nous montre de combien varie la fonction  $W$  lorsqu'on modifie les  $q^k$  et  $t$  de  $dq^k$  et  $dt$ .

$$(VIII. 122) \quad dW = -H dt + \sum_k p_k dq^k - \sum_k p_{0k} dq_0^k \quad \text{pour} \quad W(q_0^k, q^k, t).$$

Nous en tirons les valeurs des dérivées partielles :

$$(VIII. 123) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -H \quad \frac{\partial W}{\partial q^k} = p_k.$$

Arrêtons-nous un moment sur ces relations pour en approfondir le sens géométrique. Prenons la fonction  $W$  des  $q^k$  et  $t$ , et égalons-la à une constante, à zéro par exemple. Nous obtenons l'équation d'une surface mobile dans l'extension en configuration. Cette surface est concentrée au point initial  $Q_0$  pour  $t = 0$  puis s'en écarte peu à peu lorsque  $t$  croît, en prenant toute une série de formes fermées autour de  $Q_0$  et emboîtées les unes dans les autres (fig. VIII. 4). Cette surface mobile se déplace comme le ferait une *onde de choc* (onde sonore émise par une brusque explosion, par exemple) dont la source serait en  $Q_0$  pour  $t = 0$ . Cette onde se réduit à une surface en mouvement; elle n'a aucune périodicité, et ne possède ni fréquence ni longueur d'onde; c'est une propagation d'onde suivant une *optique géométrique* très particulière.

Si l'on a trouvé une de ces ondes  $W$ , on connaît du même coup toute une famille de trajectoires; en effet, les expressions (VIII. 122 et 123) nous four-

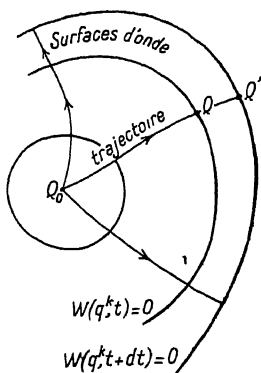


Fig. VIII. 4.

nissent aussitôt des renseignements très variés : tout d'abord, nous trouvons :

$$(VIII. 124) \quad \frac{\partial W}{\partial q_0^k} = -p_{0k} \quad r \text{ relations.}$$

Les dérivées partielles de  $W$  par rapport aux paramètres  $q_0^k$  doivent être constantes; elles définissent les valeurs initiales  $p_{0k}$  de la quantité de mouvement. Les  $p_{0k}$  sont des nombres donnés, les  $\frac{\partial W}{\partial q_0^k}$  sont des fonctions des coordonnées  $q^k$  et du temps  $t$ , tout comme la fonction  $W(q_0^k, q^k, t)$  elle-même. Nous avons donc là  $r$  relations qui nous définissent la trajectoire du point représentatif; en partant d'une fonction  $W$  donnée et en variant les valeurs des constantes  $p_{0k}$  on obtient tout un faisceau de trajectoires qui divergent du point source  $Q_0$ .

Lorsqu'on a ainsi fixé une trajectoire, que parcourt le point représentatif  $Q$ , en fonction du temps  $t$ , les équations (VIII. 123) donnent les valeurs des moments  $p_k$  en chaque point de la trajectoire. Ainsi donc la connaissance de la fonction  $W$  résout entièrement le problème mécanique.

La fonction  $W(q_0^k, q^k, t)$  que nous venons de considérer est une solution très particulière d'une équation aux dérivées partielles; retournons aux équations (VIII. 123); rappelons-nous que  $H$  est une fonction des  $q^k, p_k$  et  $t$ ; et que d'autre part les  $p_k$  s'expriment par les dérivées partielles de  $W$ ; nous aboutissons à ceci :

$$(VIII. 125) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -H(q^k, p_k, t) = -H(q^k, \frac{\partial W}{\partial q^k}, t).$$

C'est l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi, dont notre fonction  $W$  est une solution particulière. La solution générale dépendrait de  $r$  paramètres arbitraires  $\alpha^1 \dots \alpha^r$ , qui ne représenteraient pas les coordonnées  $q_0^k$  d'un point source  $Q_0$ , mais joueraient *formellement* un rôle analogue.

Soit en effet  $W(\alpha^k, q^k, t)$  une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (VIII. 125). Nous allons chercher comment cette fonction  $W$  permet de construire une solution du problème mécanique, caractérisé par les équations de Hamilton (VIII. 121). Nous commencerons par déterminer la trajectoire, en égalant à des constantes  $\beta_k$  les dérivées partielles de  $W$  par rapport aux  $\alpha^k$  :

$$(VIII. 126) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha^k} = \beta_k.$$

Une fois la trajectoire fixée, les moments  $p_k$  se détermineront au moyen des dérivées  $\frac{\partial W}{\partial q^k}$  suivant (VIII. 123).

Les conditions (VIII. 126) nous donnent un système de  $r$  équations, ayant même aspect formel que les conditions (VIII. 124). Dérivons par rapport au temps :

$$(VIII. 127) \quad \frac{d\beta_k}{dt} = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^k \partial t} + \sum_h \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^k \partial q^h} \dot{q}^h = 0;$$

il faut se rappeler, pour prendre cette dérivée, que  $W$  dépend des coordonnées  $q^k$  et du temps  $t$  explicitement.

D'autre part, partons de (VIII. 125) et prenons la dérivée en  $\alpha^k$  :

$$(VIII. 128) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \left[ H + \frac{\partial W}{\partial t} \right] = \sum_h \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial^2 W}{\partial q^h \partial \alpha^k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^k \partial t} = 0;$$

nous avons remplacé  $\frac{\partial p_h}{\partial \alpha^k}$  par sa valeur  $\frac{\partial^2 W}{\partial q^h \partial \alpha^k}$ , compte tenu des relations (VIII. 123). Comparons les conditions (VIII. 127 et 128) et nous voyons qu'elles sont identiques, pourvu que le mouvement du point satisfasse à la première des équations de Hamilton (VIII. 121) :

$$\frac{\partial H}{\partial p_h} = \dot{q}^h.$$

Nous avons donc retrouvé le premier jeu d'équations de Hamilton. Pour obtenir le second jeu, formons la dérivée  $\frac{dp_k}{dt}$  d'un des moments  $p_k$  :

$$(VIII. 129) \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial q^k} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial q^k \partial t} + \sum_h \frac{\partial^2 W}{\partial q^k \partial q^h} \dot{q}^h = \frac{\partial^2 W}{\partial q^k \partial t} + \sum_h \frac{\partial^2 W}{\partial q^k \partial q^h} \frac{\partial H}{\partial p_h}.$$

Comparons cette formule à celle que nous obtenons en dérivant (VIII. 125) par rapport à  $q^k$  :

$$(VIII. 130) \quad \frac{\partial}{\partial q^k} \left[ H + \frac{\partial W}{\partial t} \right] = \frac{\partial H}{\partial q^k} + \sum_h \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial^2 W}{\partial q^k \partial q^h} + \frac{\partial^2 W}{\partial q^k \partial t} = 0.$$

La juxtaposition de ces deux formules (VIII. 129 et 130) nous montre que l'on doit avoir :

$$\frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^k}$$

ce qui redonne le second jeu des équations de Hamilton (VIII. 121).

Ainsi donc, trouver une intégrale  $W$  de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi (VIII. 125), c'est résoudre le problème du mouvement. La solution particulière  $W(q_0^k, q^k, t)$  que nous avons prise initialement (VIII. 122) correspondait à une surface se propageant dans l'extension en configuration à partir d'une source  $Q_0$  (fig. VIII. 4). Une solution  $W(\alpha^k, q^k, t)$  dépendant

d'autres paramètres  $\alpha^k$  nous donne une surface se propageant à partir d'une certaine surface initiale, qui sert de départ en  $t = 0$  et ne se réduit pas à un point (fig. VIII. 5).

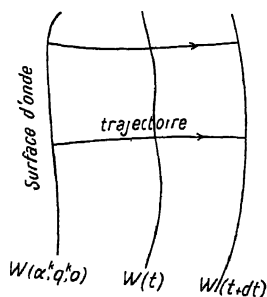


Fig. VIII. 5.

## XV. — Equations de Hamilton; systèmes conservatifs.

Tous ces résultats se précisent et prennent un sens géométrique très clair, lorsqu'on les applique à un système conservatif : liaisons indépendantes du temps et constance de l'énergie totale  $E$ .

Nous savons que, dans ce cas, la fonction de Hamilton  $H$  garde, au cours de l'évolution du système, une valeur constante égale à  $E$  (éq. VIII. 108).

Commençons par étudier la fonction d'action particulière  $W(q_0^k, q^k, t)$  comme au début du paragraphe précédent; cette fonction se scinde <sup>(1)</sup>, suivant le schéma (VIII. 113) :

$$(VIII. 113) \quad W(q_0^k, q^k, t) = \int_{q_0^k, 0}^{q^k, t} L dt = F(q_0^k, q^k) - Et$$

avec :

$$(VIII. 110) \quad F(q_0^k, q^k) = \int_{q_0^k}^{q^k} 2T dt = \int_{q_0^k}^{q^k} \sum_k p_k dq^k.$$

Voyons alors comment se fait le déplacement, au cours du temps, d'une surface mobile  $W = 0$ . Nous commencerons par tracer toute une famille de surfaces :

$$(VIII. 131) \quad F(q_0^k, q^k) = C;$$

ce sont des *surfaces fixes*, centrées sur la source  $Q_0$  et qui s'en écartent progressivement lorsque  $C$  augmente. Prenons maintenant la condition :

$$(VIII. 132) \quad W(q_0^k, q^k, t) = F - Et = 0,$$

nous voyons que la propagation de la surface  $W$  se fait de telle sorte qu'elle vienne se superposer à toutes les surfaces  $F$  successives de la figure (VIII. 6).

La décomposition que nous venons de trouver, sur cette solution particulière, se reproduit telle quelle pour la solution générale  $W(\alpha^k, q^k, t)$ . La fonction de Hamilton  $H$  restant constamment égale à  $E$ , on pourra toujours chercher une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (VIII. 125) en posant :

$$(VIII. 133) \quad \begin{aligned} W &= F - Et & p_k &= \frac{\partial W}{\partial q^k} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \\ H\left(q^k, \frac{\partial F}{\partial q^k}\right) &= E. \end{aligned}$$

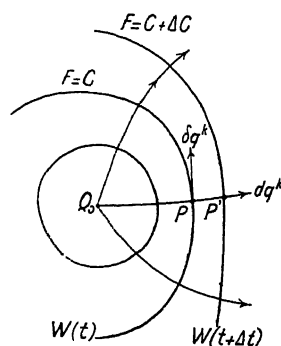


Fig. VIII. 6.

<sup>(1)</sup> On pourra se reporter aux traités suivants, en faisant attention aux correspondances de notations :

E. SCHRÖDINGER, *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*. Alcan, Paris, 1933, chap. II.

L. BRILLOUIN, *Atome de Bohr*, 2<sup>e</sup> éd. Presses Univ. Paris, 1931, chap. V.

APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. 2, chap. XXV.

	Schrödinger	Atome de Bohr	Appell	Ici
Notations . . {	$\bar{W}$ S	$\bar{S}$ s	$\bar{V}$ W	$\bar{W}$ F

On se méfiera qu'Appell, au lieu de l'énergie potentielle  $V$ , emploie la « fonction de forces »  $U = -V$  de signe opposé.

Nous avons renoncé ici aux lettres  $S, s$ , qui sont réservées aux éléments linéaires des espaces de Riemann. La constance de  $H$  se vérifie immédiatement sur les équations de Hamilton (VIII. 121), aussitôt que  $H$  ne dépend plus explicitement du temps :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left[ \frac{\partial H}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right] = \sum_k [-\dot{p}_k \dot{q}^k + \dot{p}_k \dot{q}^k] = 0.$$

La solution dépendra de  $r$  constantes arbitraires  $\alpha^1 \dots \alpha^r$ , au moyen desquelles l'énergie sera aussi exprimée ; on aura donc :

$$F(\alpha^k, q^k) \quad \text{et} \quad E(\alpha^k).$$

Dans certains cas, il peut être commode de choisir, pour une des constantes  $\alpha^1$ , la valeur même  $E$  de l'énergie, mais ce choix particulier n'est pas toujours à recommander. Les équations du mouvement (VIII. 126) prennent la forme :

$$(VIII. 134) \quad \beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial}{\partial \alpha^k} F(\alpha^k, q^k) - t \frac{\partial E}{\partial \alpha^k}$$

ce qui détermine à la fois la trajectoire et le mouvement du point représentatif, sur cette trajectoire, en fonction du temps  $t$ .

Examinons de plus près tous ces problèmes, dans notre *extension en configuration*, dont la métrique a été adaptée à la forme de l'énergie cinétique :

$$(VIII. 28) \quad ds^2 = 2T dt^2 = \sum_{i,k} M_{ik} dq^i dq^k.$$

Les  $M_{ik}$  de cette formule sont des fonctions des coordonnées  $q^k$  mais pas du temps ; nous leur faisons correspondre des  $M^{ik}$  contravariants, par les règles usuelles :

$$M^{ik} = \frac{(\text{mineur de } M_{ik})}{|M_{ik}|}.$$

La fonction de Lagrange  $L$  s'obtient directement :

$$(VIII. 135) \quad L(q^k, \dot{q}^k) = \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k - V(q^k).$$

Pour la fonction de Hamilton, il faut l'exprimer au moyen des  $q^k$  et des  $p_k$  ; rappelons que la métrique (VIII. 28) nous assure la relation simple :

$$(VIII. 30) \quad p_k = \dot{q}_k = \sum_i M_{ik} \dot{q}^i,$$

donc :

$$2T = \sum_{ik} M_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k = \sum_{ik} M^{ik} p_i p_k.$$

Voici donc la fonction de Hamilton :

$$H(q^k, p_k) = \frac{1}{2} \sum_{ik} M^{ik} p_i p_k + V(q^k)$$

et l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi :

$$(VIII. 136) \quad H\left(q^k, \frac{\partial F}{\partial q^k}\right) = \frac{1}{2} \sum_{ik} M^{ik} \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial q^k} + V(q^k) = E;$$

avec :

$$\dot{q}^k = p_k = \frac{\partial F}{\partial q^k}.$$

Nous avons là la forme explicite détaillée de ces diverses fonctions fondamentales de la Mécanique.

Les systèmes conservatifs nous ont donné la possibilité d'introduire, dans



notre extension en configuration, une métrique définie, qui va donner une précision, une netteté toute nouvelle dans la discussion géométrique des problèmes mécaniques.

Nous allons d'abord voir que *les surfaces F sont orthogonales aux trajectoires* du point représentatif; ensuite, nous vérifierons que les *surfaces mobiles W* correspondent aux *surfaces d'ondes* (de choc) que nous avons imaginées au paragraphe 13 et se propagent justement avec la vitesse  $u$  prévue en (VIII. 118). La méthode de Hamilton-Jacobi correspond donc exactement à l'application aux problèmes mécaniques des raisonnements de l'optique géométrique, sous la forme de Huygens.

Prenons d'abord la première proposition : les surfaces  $F$  sont orthogonales aux trajectoires. En un point  $P$  de l'extension en configuration, traçons un vecteur  $\delta q^k$  dirigé dans le plan tangent à la surface  $F$  qui passe en  $P$  (fig. VIII. 6). C'est admettre la condition :

$$(\text{VIII. 137}) \quad \sum_k \frac{\partial F}{\partial q^k} \delta q^k = 0,$$

qui signifie qu'en se déplaçant de  $\delta q^k$  à partir de  $P$ , on ne change pas la valeur de  $F$ , donc on reste sur la surface à  $F$  constant. A partir du même point  $P$  déplaçons-nous suivant la trajectoire qui passe par ce point. Le déplacement  $dq^k$  sera proportionnel à  $\dot{q}^k$  :

$$dq^k = \dot{q}^k dt,$$

ou, en prenant les composantes covariantes :

$$dq_k = \dot{q}_k dt.$$

Mais nous avons remarqué l'avantage de la métrique (VIII. 28) : c'était de nous donner l'identité entre la vitesse covariante  $\dot{q}_k$  et le moment  $p_k$  conjugué à la coordonnée  $q^k$  (éq. VIII. 30). Donc :

$$dq_k = p_k dt = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k} dt,$$

car nous savons que les composantes  $p_k$  du moment sont données par les dérivées partielles  $\frac{\partial W}{\partial \dot{q}^k}$ , qui se réduisent ici à  $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k}$  (VIII. 133 et 136).

La formule (VIII. 137) se transcrit alors ainsi :

$$(\text{VIII. 138}) \quad \sum_k \frac{\partial F}{\partial q^k} \delta q^k = \sum_k \dot{q}_k \delta q^k = 0 \quad \sum_k dq_k \delta q^k = 0.$$

Cela signifie que les deux vecteurs  $\delta q^k$  (situé dans le plan tangent à  $F$ ) et  $dq^k$  (suivant la trajectoire) sont orthogonaux; nous avons, en effet, toujours admis (chap. VI, § 5, éq. VI. 43) que deux vecteurs étaient orthogonaux lorsque leur produit scalaire était nul.

Passons maintenant au second point : quelle est la vitesse de propagation de la surface mobile  $W = 0$  lorsqu'elle passe en  $P$  ? Soit  $C$  la valeur de  $F$  au point  $P$  et  $C + \Delta C$  sa valeur en un point  $P'$  voisin, situé sur la trajectoire normale aux surfaces  $F$  (fig. VIII. 6).

Les composantes du segment  $PP'$  sont  $dq^k$  et la variation de  $F$  s'écrit :

$$(viii. 139) \quad \Delta C = \Delta F = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q^k} dq^k = \sum_k p_k dq^k = 2T dt.$$

Attention !  $dt$  représente ici le temps que met le *mobile* pour se déplacer de  $P$  en  $P'$  le long de sa trajectoire. La distance  $PP'$  est donnée par la définition (viii. 28) :

$$PP' = ds = \sqrt{2T} dt = \frac{\Delta F}{\sqrt{2T}}.$$

La *surface W mobile* se déplace suivant une loi toute différente, et n'accompagne pas le point mobile dans son mouvement. Elle prend un *temps*  $\Delta t$  pour se propager de  $P$  en  $P'$  ; nous tirons ce renseignement de (viii. 132 ou 133) car la relation :

$$W = F - Et = 0$$

nous fournit une surface :

$$\begin{aligned} \text{en } F = C & \quad \text{pour} & \quad t = \frac{C}{E} = \frac{F}{E} \\ \text{en } F = C + \Delta C & \quad \text{en} & \quad t + \Delta t = \frac{C + \Delta C}{E} = \frac{F + \Delta F}{E}. \end{aligned}$$

La durée de *propagation* de la surface est  $\Delta t$ , ce qui nous donne pour les *ondes une vitesse* :

$$(viii. 140) \quad u = \frac{ds}{\Delta t} = \frac{\Delta F}{\sqrt{2T}} \frac{E}{\Delta F} = \frac{E}{\sqrt{2T}} = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}}.$$

Nous retrouvons exactement la valeur (viii. 118) prévue au paragraphe 13 et qui permet d'identifier le principe de moindre action avec celui de Fermat pour les ondes.

## XVI. — Discussion et exemples.

La vitesse du point représentant le système, lorsqu'il passe en une position  $P$ , est :

$$(viii. 36) \quad v = \sqrt{2(E - V)}$$

celle de l'onde, lorsqu'elle se propage au même endroit, sera :

$$(viii. 140) \quad u = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}}.$$

Cette dernière formule, que nous venons d'obtenir, a l'air d'être plus précise que celle du paragraphe 13 (viii. 118). Si l'on y regarde de plus près, on s'aperçoit que l'énergie  $E$  de (viii. 140) n'est définie qu'à une constante additive près, pourvu que celle-ci se retrouve dans l'énergie potentielle ; prenons donc :

$$E' = E + K \qquad V' = V + K$$

nous trouvons même valeur de  $E - V$ ; la vitesse  $v$  du point représentatif n'est pas modifiée; celle  $u$  de l'onde se trouve multipliée par  $\frac{E'}{E}$ . En (VIII. 118) nous avons mis, au numérateur, une constante arbitraire au lieu de  $E$ ; cela revenait exactement au même.

Lorsqu'on s'est donné l'énergie totale  $E$ , le point représentatif peut se déplacer à l'intérieur des régions de l'extension en phase où  $V$  est inférieur à  $E$ . La région accessible est ainsi limitée par la surface :

$$(VIII. 141) \quad V(q^k) = E.$$

Si le point atteint cette surface, c'est avec une vitesse  $v$  nulle; la vitesse change de signe (double signe devant le radical) et le point rebrousse chemin pour redescendre dans la région où  $V$  est plus bas, inférieur à  $E$ . Au dehors de la surface limite (VIII. 141) on trouverait des vitesses  $v$  imaginaires.

L'onde, au contraire, prend sur la surface limite une vitesse  $u$  infinie; le changement de signe l'incurve vers la région de bas potentiel  $V$  par un effet de « mirage ». Sa vitesse  $u$  devient aussi imaginaire en dehors de la surface limite.

Un exemple simple illustrera ces résultats. Considérons un électron

(charge  $-e$ ) dans le champ d'un centre attractif positif ( $+Ze$ ). Ce sera le cas de l'atome d'hydrogène ( $Z=1$ ) ou du mouvement d'un électron autour d'un noyau  $Z$ . L'énergie potentielle de Coulomb est :

$$V = -\frac{Ze^2}{r}.$$

La trajectoire est une ellipse, dont le noyau  $+Ze$  forme un des foyers.

La surface-limite est une sphère de rayon  $R$  (fig. VIII. 7) :

$$-\frac{Ze^2}{R} = -E' = E$$

l'énergie totale est négative. La figure (VIII. 8) montre la variation

de l'énergie potentielle  $V$  en fonction de la distance  $r$  au centre attractif, jusqu'au point  $R$  où elle atteint la valeur limite  $E$ . Les deux courbes donnant les vitesses  $v$  et  $u$  ont des variations opposées. L'onde a une vitesse  $u$  nulle

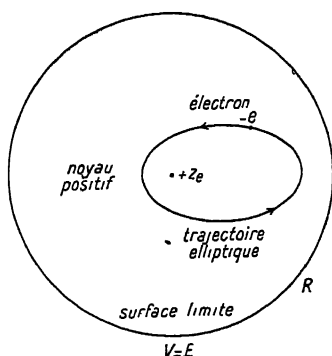


Fig. VIII. 7.

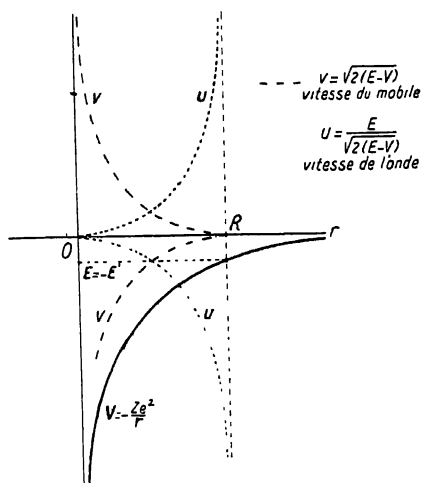


Fig. VIII. 8.

au centre, et infinie sur la sphère  $R$ , le mirage incurve donc l'onde de manière à la ramener autour du centre positif (fig. VIII. 9).

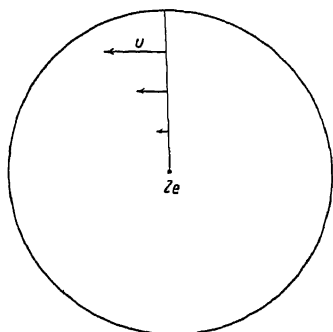


Fig. VIII. 9.

Si le point mobile possède, par rapport au centre, un moment de quantité de mouvement, sa trajectoire est une ellipse qui n'atteint pas la sphère limite; mais si le moment de quantité de mouvement est nul, l'ellipse s'aplatit suivant une droite passant par le centre; le mouvement se réduit à la forme rectiligne et le mobile peut atteindre la sphère limite.

Toute la mécanique quantifiée, dans sa forme ancienne (jusqu'en 1926) fournit une collection d'exemples d'application de ces méthodes générales, dont la discussion pratique a été poussée très loin à cette occasion <sup>(1)</sup>.

### XVII. — Quelques conséquences et extensions du principe de moindre action.

Les diverses formes de principes de moindre action ont été discutées aux paragraphes 11 et 12, en vue de leurs applications classiques. Nous allons maintenant revenir sur ces problèmes de variation en vue de préparer la démonstration d'un très curieux théorème de Boltzmann, théorème assez peu connu des mathématiciens, mais d'une grande importance pour la physique.

Revenons aux définitions du début (chap. VIII, § 2); nous considérons un système de  $N$  points matériels, définis par leurs  $3N$  coordonnées de position; entre ces points, nous supposons qu'il existait  $l$  liaisons holonomes, de sorte qu'il ne restait que :

(VIII. 5)

$$r = 3N - l$$

degrés de liberté indépendants; nous avons alors fait un changement de coordonnées, pour passer des  $x$  aux  $q$  en choisissant  $3N$  variables  $q^k$  de telle sorte que les  $r$  premières forment un jeu de variables indépendantes, tandis que les  $l$  dernières ( $q^{r+1}, q^{r+2}, \dots, q^{3N}$ ) restaient constamment nulles par suite des liaisons (VIII. 6). En conséquence nous avons, à partir de ce moment, ignoré l'existence de ces  $l$  coordonnées cachées, dont il n'a plus été question.

Ce que nous voulons faire maintenant, c'est étudier un système à liaisons holonomes indépendantes du temps, donc un système conservatif, où l'on peut définir une énergie totale qui reste constante au cours du temps, dans

<sup>(1)</sup> A. SOMMERFELD. *Atombau und Spektrallinien*, vol. 1, 5<sup>e</sup> éd. Vieweg, Braunschweig, 1931. — L. BRILLOUIN. *Atome de Bohr*. Presses Universitaires, Paris, 1931. — E. BLOCH. *L'ancienne et la nouvelle théorie des quanta*. Hermann, Paris, 1930. — M. BORN. *Vorlesungen über Atommechanik*. Springer, Berlin, 1925. — E. FERMI. *Introduzione alla Fisica atomica*. Zanichelli, Bologna. — M. BOLL et CH. SALOMON. *Introduction à la théorie des quanta*. Doin, Paris.

l'évolution naturelle du système. Mais nous allons discuter de plus près le rôle des liaisons, et, pour cela, nous ferons réapparaître les coordonnées cachées; nous avons aux paragraphes 11 et 12, comparé le mouvement naturel d'un système avec divers mouvements variés, qui devaient tous respecter les liaisons imposées. Il s'agit désormais de lever cette restriction et d'admettre des mouvements avec *variation des liaisons*.

Nous traitons les  $l$  coordonnées cachées  $q^{r+1} \dots q^{3N}$  d'une manière analogue aux autres; mais alors nous devons admettre l'existence d'un système de forces ayant pour résultat de maintenir nulles toutes ces coordonnées cachées, dans le mouvement naturel. Ces forces sont physiquement nécessaires pour assurer les liaisons.

Prenons un exemple simple. Deux points mobiles sont assujettis à rester à distance constante l'un de l'autre; le mathématicien affirme que ces deux masses sont reliées par une « tige inextensible et sans masse ». En fait la tige est légèrement extensible ou compressible, mais si l'on essaye de faire varier tant soit peu la distance des deux points, la tige réagit et exerce des forces considérables sur les points mobiles; ce sont ces forces (dues à l'élasticité de la tige) qui assurent la liaison; cette liaison est réalisée avec d'autant plus de précision que les forces élastiques de la tige seront plus grandes, par rapport à toutes les forces mises en jeu dans le système mécanique.

Pour ne pas compliquer inutilement l'écriture des formules, nous admettrons que les forces assurant les liaisons dépendent d'une énergie potentielle  $V^*$ ; une forme acceptable et simple d'énergie potentielle de ce genre serait :

$$(VIII. 142) \quad V^* = \sum_{k=r+1}^{k=3N} A_k (q^k)^2$$

avec des coefficients  $A_k$  positifs très grands; cette forme correspond à l'hypothèse de liaisons réalisées par des systèmes élastiques très rigides;  $q^k$  reste normalement nul; un petit écart  $q^k$  met en jeu une force  $-2A_k q^k$  extrêmement élevée, qui s'oppose à cette variation.

Les coordonnées  $q^{r+1} \dots q^{3N}$  qui correspondent aux liaisons vont donc rester pratiquement constantes (et nulles) dans le mouvement naturel du système; leurs vitesses  $\dot{q}^k$  seront donc nulles; les moments  $p_k$  correspondants, ne sont en revanche pas toujours nuls, car on a (VIII. 23) :

$$p_k = \sum_i M_{ki} \dot{q}^i$$

et les vitesses  $\dot{q}^i$  de toutes les coordonnées, visibles ou cachées apparaissent là en évidence.

Avec ces définitions, il est facile de transposer les résultats des paragraphes 11 et 12. La fonction de Lagrange complète sera :

$$(VIII. 143) \quad L^* = T - V - V^* = L - V^*$$

où  $L$  est la fonction de Lagrange usuelle (VIII. 93) ne portant que sur les coordonnées visibles  $q^1 \dots q^r$ . Dans l'énergie totale, nous aurons aussi un terme nouveau, provenant de la nouvelle énergie potentielle  $V^*$  des liaisons :

$$(VIII. 144) \quad E^* = E + V^*.$$

L'énergie cinétique  $T$  reste inchangée sur le mouvement naturel, car toutes

les vitesses  $\dot{q}^{r+1} \dots \dot{q}^{3N}$  relatives aux coordonnées cachées sont nulles pour cette trajectoire, mais il n'en est pas de même sur la trajectoire variée; nous écrirons alors :

$$\begin{aligned} 2T^* &= 2T + \sum_{k=r+1}^{k=3N} p_k \dot{q}^k \\ \text{(VIII. 145)} \quad F^* &= F + \sum_{k=r+1}^{k=3N} \int p_k \dot{q}^k dt = F + \sum_{k=r+1}^{k=3N} \int p_k dq^k. \end{aligned}$$

Avec ces extensions, la formule générale (VIII. 112) devient applicable à notre système; elle est valable entre les grandeurs marquées d'astérisques et s'écrit :

$$\text{(VIII. 146)} \quad \delta F^* = \int \delta E^* dt + \sum_{k=1}^{k=3N} p_{1k} \delta q_1^k - \sum_{k=1}^{k=3N} p_{0k} \delta q_0^k.$$

La formule (VIII. 112) ne contenait que les coordonnées visibles; les sommations en  $k$  se faisaient de 1 à  $r$ ; la nouvelle formule porte sur toutes les coordonnées, visibles et cachées (liaisons) et les sommations se font de 1 à  $3N$ .

Revenons aux grandeurs usuelles, sans astérisques, et nous obtenons :

$$\text{(VIII. 147)} \quad \delta F = \int (\delta E + \delta V^* - \delta \sum_{k=r+1}^{k=3N} p_k \dot{q}^k) dt + \sum_{k=1}^{k=r} p_{1k} \delta q_1^k - \sum_{k=1}^{k=r} p_{0k} \delta q_0^k.$$

En effet, si nous détaillons le calcul, nous trouvons :

$$\delta F^* = \delta F + \delta \sum_{k=r+1}^{k=3N} \int p_k dq^k = \delta F + \int \delta \sum_{k=r+1}^{k=3N} p_k dq^k + \left| \sum_{k=r+1}^{k=3N} p_k \delta q^k \right|_0;$$

en portant ces termes correctifs au second membre de (VIII. 146), et tenant compte de (VIII. 144), on voit disparaître les  $\Sigma p_{1k} \delta q_1^k - \Sigma p_{0k} \delta q_0^k$  pris sur les coordonnées cachées,  $k = r + 1$  à  $3N$ , et l'on obtient bien la formule (VIII. 147) <sup>(1)</sup>.

Dans cette formule (VIII. 147), ce sont les termes en  $\Sigma p_k \delta q^k$  qui nous gênent un peu; Boltzmann a étudié toute une série de problèmes où ces termes s'éliminent; je garderai l'exemple le plus important, que voici :

**HYPOTHÈSE 1.** — *Le mouvement varié conserve constantes, et très petites, les valeurs  $q^{r+1} \dots q^{3N}$  des coordonnées cachées*

C'est dire que nous comparons le mouvement naturel (où ces  $q^{r+1} \dots q^{3N}$  sont nuls) à un mouvement voisin caractérisé par des valeurs constantes de ces coordonnées de liaison. Les vitesses  $\dot{q}^k$  étaient nulles sur le mouvement naturel; elles le sont aussi sur le mouvement varié, et le terme :

$$\text{(VIII. 148)} \quad \delta \sum_{k=r+1}^{k=3N} p_k \dot{q}^k = 0,$$

disparaît dans la formule (VIII. 147).

<sup>(1)</sup> La même démonstration se trouve, sous une forme un peu différente, aux pages 9 à 11 de mon livre : *L'atome de Bohr*, 2<sup>e</sup> édition. Je signale que j'avais reproduit, à cet endroit, une erreur qui provient du texte de Boltzmann, et qui consiste à admettre la nullité des moments  $p_{r+1} \dots p_{3N}$  relatifs aux coordonnées cachées; ces moments étaient notés  $\pi_1 \dots \pi_j$  dans *L'atome de Bohr*; cette omission modifie la formule (VIII. 147), mais ne joue aucun rôle dans les exemples ultérieurs qui servent d'illustration à cette théorie générale.

**HYPOTHÈSE 2.** — *Le mouvement naturel et le mouvement varié sont périodiques.* Au bout d'une période  $\tau$  le mouvement naturel revient à sa position initiale ; le même fait se reproduit pour le mouvement varié, avec une période  $\tau + d\tau$ . Nous prendrons ces deux périodes  $\tau$  et  $\tau + d\tau$  comme durées d'intégration sur les deux trajectoires. La figure (VIII. 10) schématise ces conditions. Les deux trajectoires s'étant refermées, les points  $Q_0$  et  $Q_1$  de la figure (VIII. 2) viennent en coïncidence, ainsi que les points  $P_0P_1$  de la trajectoire variée ; les  $\delta q_0^k$  et  $\delta q_1^k$  sont égaux ainsi que les moments  $p_{0k}$  et  $p_{1k}$  :

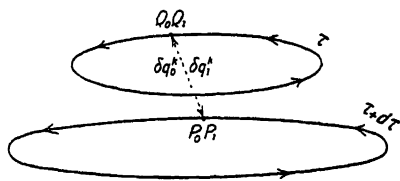


Fig. VIII. 10.

$$(VIII. 149) \quad p_{0k} = p_{1k} \quad \delta q_0^k = \delta q_1^k ;$$

les derniers termes de la formule (VIII. 147) sont donc compensés et il nous reste :

$$(VIII. 150) \quad \delta F = \int_0^\tau (\delta E + \delta V^*) dt$$

$$F = \sum_{k=1}^{k=r} \int_0^\tau p_k dq^k = 2 \int_0^\tau T dt \quad \text{intégrale portant sur les coordonnées } q^k \text{ visibles.}$$

$E$  énergie totale du système, liaisons non comptées ;

$V^*$  énergie potentielle du mécanisme assurant les liaisons.

### XVIII. — Une analogie thermodynamique ; distinction entre chaleur et travail mécanique.

La formule de Boltzmann, que nous venons d'obtenir, comporte une très importante application à la théorie mécanique de la thermodynamique. Le résultat que nous voulons établir avait été trouvé par Clausius et Szily sur un exemple particulier, vers 1871 et Boltzmann en donna plus tard la démonstration générale (1897). Il s'agit là de recherches qui sont antérieures à la théorie statistique de la thermodynamique, et la formule de Boltzmann avait été oubliée, à la suite du succès de la théorie cinétique du gaz et des méthodes statistiques. C'est Ehrenfest qui rappela l'attention sur ces résultats remarquables et en fit une application tout à fait intéressante aux problèmes de mécanique quantique.

Dans ce qui va suivre, il faudra que nous fassions une distinction entre « chaleur » et travail mécanique. Nous pouvons considérer la « chaleur » comme de l'énergie désordonnée qui ne peut être transformée en travail utilisable par aucun moyen à notre disposition. Un exemple classique va illustrer cette distinction :

Considérons un gaz contenu dans un cylindre fermé par un piston (fig. VIII. 11).

Nous nous représentons le gaz comme composé d'un grand nombre de molécules animées de mouvements rapides en tous sens.

Ces molécules s'entre-choquent, et frappent aussi les parois du cylindre et du piston. Nous n'allons pas suivre en détail les lois de ce mouvement, mais nous en noterons quelques propriétés importantes qui nous intéressent. De quelle façon pouvons-nous modifier l'état de ce gaz ?

Nous pouvons chauffer les parois du cylindre. Cela transmettra de l'énergie aux molécules au moment de leurs chocs contre les parois, et leur agitation augmentera progressivement à chaque choc.

Naturellement, seules, les forces mécaniques habituelles entrent en jeu ici, car chauffer les parois du cylindre signifie simplement leur donner une énergie supplémentaire de vibration, et quand les molécules du gaz frapperont ces parois à l'état de vibration, elles rebondiront, avec une énergie cinétique plus grande ; c'est ce qui constitue le mécanisme de l'échauffement d'un gaz.

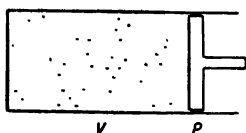


Fig. VIII. 11.

Mais bien qu'entièrement mécanique, ce processus implique néanmoins de très rapides oscillations ou vibrations, caractérisées par leur très haute fréquence. Les échanges d'énergie du type que nous venons de décrire sont connus classiquement sous le nom de « chaleur ».

Le *travail mécanique* accompli dans une transformation thermodynamique a un caractère complètement différent. Avant tout il implique seulement des forces continues, et souvent même des forces constantes, indépendantes du temps. Dans l'exemple précédent, nous considérons comme travail mécanique celui qui peut être obtenu par le déplacement lent du piston. Les molécules qui frappent le piston exercent une certaine « force moyenne » ; si le déplacement du piston a lieu avec une vitesse constante, cette force moyenne fournit une certaine quantité de travail mécanique. Le travail accompli aurait une valeur différente si le déplacement du piston était sujet à des variations rapides, ayant une fréquence de l'ordre de l'intervalle entre chocs des molécules ; on doit donc être sûr que la vitesse du piston est constante, et très petite.

Considérons un système mécanique composé d'un grand nombre d'atomes, le gaz dans le cylindre précédent, par exemple.

Soient  $x^1 \dots x^{3N}$  les coordonnées des  $N$  points matériels constituant le système ; nous aurons aussi  $l$  liaisons, et nous introduirons comme au paragraphe 2 de ce chapitre de nouvelles variables  $q^k$  ; les  $r$  premières sont des variables indépendantes, que l'évolution naturelle du système fait varier très rapidement ; nous les appellerons les *coordonnées microscopiques* ; et nous serons en général incapables de suivre, dans le détail, leur très complexe évolution.

En dehors de cela, il nous restera les  $q^{r+1} \dots q^{3N}$  dernières quantités que nous nommons tout à l'heure les variables cachées ; en vertu des liaisons, ces variables restent constantes, lorsqu'on ne perturbe pas le système. Nous pourrions observer les valeurs de ces constantes, qui représentent les *coordonnées macroscopiques* du système. Dans le cas du gaz, le volume  $v$  du cylindre est une coordonnée macroscopique (ou une liaison).



Supposons que la trajectoire AB représente un état physique donné d'un tel système (fig. VIII. 12). Une autre trajectoire CD représente un autre état physique, caractérisé par une pression, un volume et une température différents, soient  $q^*$  les valeurs des coordonnées sur la trajectoire AB;  $q^* + \delta q^*$  leurs valeurs sur CD.

Supposons que nous désirions faire sauter le système d'un point Q de AB à un point P de CD. Il faudra que nous ayons des forces spéciales capables d'agir sur toutes les molécules, et ces forces fourniront un travail.

*Le travail fourni par ces forces sera équivalent à de la chaleur fournie au système.*

Si, dans ce saut de Q à P, le volume du gaz est changé, il aura été fourni un travail extérieur, contre les forces qui assurent les liaisons :

(VIII. 151)

$$\delta \mathfrak{E} = \delta V^*.$$

La chaleur fournie au système augmentera, d'une part, l'énergie totale interne E et fournira, d'autre part, du travail externe  $\mathfrak{E}$ , on aura donc :

(VIII. 152)

$$\delta Q = \delta E + \delta \mathfrak{E}$$

et d'après (VIII. 151) :

(VIII. 153)

$$\delta Q = \delta E + \delta V^*.$$

↑

Chaleur fournie  
au système.

↑

Augmentation  
de l'énergie interne  
désordonnée.

↑

Travail ordonné  
fourni par le système  
contre le mécanisme  
des liaisons.

Nous voyons maintenant une analogie entre ce problème et le résultat (VIII. 150), car les seconds membres de ces deux équations contiennent la même fonction.

### XIX. — Une très lente transformation conduit à la formule de Boltzmann.

Un saut brusque de l'état physique AB à l'état physique CD n'est pas pratiquement réalisable. Ce que nous devons plutôt envisager, c'est une transformation progressive, durant un certain temps, et qui nous fasse passer sans a-coup d'un état à l'autre. Précisons alors les hypothèses.

- Nous considérons notre système physique avec certaines valeurs constantes des coordonnées macroscopiques (liaisons); son évolution est représentée par.

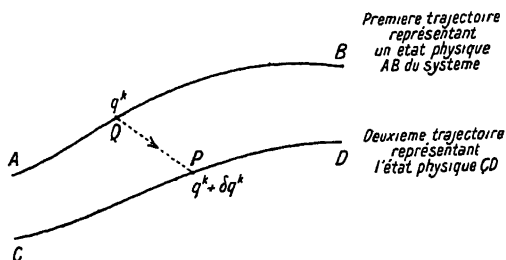


Fig. VIII. 12.

la trajectoire AB, qui correspond donc à l'état physique AB du système. Un autre état physique CD se caractérisera par d'autres valeurs constantes des

coordonnées macroscopiques et fournira la trajectoire CD.

Ces deux trajectoires correspondent à des valeurs constantes (différentes) des coordonnées  $q^{r+1} \dots q^{rN}$  dites coordonnées cachées (au sens mécanique) ou coordonnées macroscopiques au sens thermodynamique. L'hypothèse 1 du paragraphe 17 est

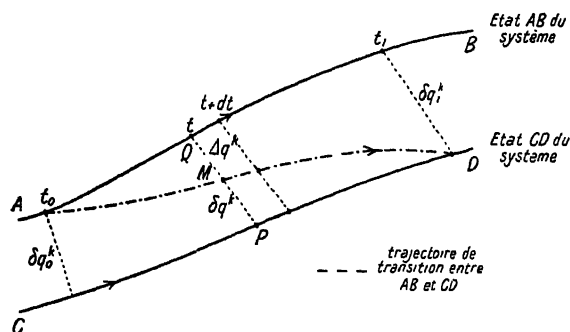


Fig. VIII. 13.

donc satisfaite, ce qui entraîne la condition (VIII. 148), lors de la comparaison de ces deux trajectoires.

Nous allons maintenant étudier un passage continu et progressif de la trajectoire AB à la trajectoire CD (fig. VIII. 13). Ce changement commencera au temps  $t_0$  et se terminera à l'instant  $t_1$ ; il est représenté par la trajectoire AMD. A l'instant  $t$ , l'écart entre l'état AB et l'état CD est représenté par le segment QP, dont les composantes sont  $\delta q^k$ . La transformation sera, à ce moment, effectuée déjà dans la proportion  $\frac{t-t_0}{t_1-t_0}$ , et représentée par le segment QM dont les composantes sont :

$$\Delta q^k = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} \delta q^k.$$

En un temps  $dt$ , la variation est :

$$(VIII. 154) \quad d(\Delta q^k) = \frac{dt}{t_1-t_0} \delta q^k.$$

La chaleur fournie au système, pendant  $dt$ , pour effectuer cette variation est :

$$(VIII. 155) \quad d(\delta Q) = \frac{dt}{t_1-t_0} \delta Q$$

et le travail accompli, pendant  $dt$ , par le système sera :

$$(VIII. 156) \quad d(\delta V^*) = \frac{dt}{t_1-t_0} \delta V^*.$$

Les définitions et conventions sont exactement celles du paragraphe précédent,  $\delta Q$  et  $\delta V^*$  étant les quantités définies pour un saut brusque et  $d(\delta Q)$ ,  $d(\delta V^*)$  les mêmes quantités, pour une transformation infinitésimale.

La chaleur totale fournie au système, pendant la durée  $t_1-t_0$  de la transformation AMD sera :

$$\begin{aligned}
 \text{(VIII. 157)} \quad \Delta Q &= \int_{t_0}^{t_1} d(\delta Q) = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta Q dt \\
 &= \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (\delta E + \delta V^*) dt,
 \end{aligned}$$

en appliquant (VIII. 153).

Or, nous avons déjà calculé cette intégrale en (VIII. 147). Nous avons donc, en tenant compte de (VIII. 148) :

$$\text{(VIII. 158)} \quad \Delta Q = \frac{1}{t_1 - t_0} \left[ \delta F - \sum_{k=1}^{k=r} \left| p_k dq^k \right|_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} \right]$$

ce qui est la forme générale de la formule de Boltzmann.

Cette formule est facilement applicable dans le cas où le mouvement est périodique, car alors le dernier terme disparaît (hypothèse 2 du § 17).

Dans un tel mouvement, nous avons la relation :

$$\text{(VIII. 159)} \quad F(\tau) = 2 \int_0^\tau T dt = 2\bar{T} \tau.$$

$\bar{T}$  étant l'énergie cinétique moyenne du système et  $\tau$  la période ; nous obtenons donc, pour un mouvement périodique :

$$\begin{aligned}
 \text{(VIII. 160)} \quad \Delta Q &= \frac{1}{\tau} \cdot 2\delta \int T dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \cdot 2\delta(\bar{T}\tau).
 \end{aligned}$$

## XX. — Transformation adiabatique; invariant adiabatique d'Ehrenfest.

Un exemple très simple d'application de la formule de Boltzmann est fourni par une transformation adiabatique, sans échange de chaleur. Reportons-nous à la discussion du paragraphe précédent; une telle transformation s'opérera sans intervention d'aucunes forces particulières agissant sur les molécules isolées; la transformation adiabatique consiste uniquement en une *modification très lente et progressive d'un paramètre de liaison*. Aucune modification brusque ou rapide ne sera admise; nous avons en effet insisté sur la différence entre les formules (VIII. 153 et 157) correspondant à ces deux cas. Dans ces conditions, la chaleur fournie  $\Delta Q$  est nulle, donc :

$$\text{(VIII. 161)} \quad \delta(\tau\bar{T}) = 0 \quad \tau\bar{T} = C^{te}.$$

Ehrenfest insista sur l'importance de ce résultat : si l'on effectue une transformation adiabatique, sur un système périodique de période  $\tau$ , l'expression  $\tau\bar{T}$  reste inchangée et constitue un *invariant adiabatique*.

Dans la transformation, la période  $\tau$  du système sera modifiée par le changement du paramètre de liaison; l'énergie cinétique moyenne  $\bar{T}$  des oscillations variera donc, et par suite l'énergie totale  $E$  du système oscillant. On aura, en conséquence, recueilli au cours de la transformation, un travail :

$$\text{(VIII. 162)} \quad \Delta \mathcal{E} = -\Delta E$$

sur ce paramètre de liaison. La formule de Boltzmann permet ainsi de calculer très rapidement les forces moyennes exercées, par un système oscillant, sur les liaisons qui lui sont imposées. Nous en donnerons tout de suite quelques exemples simples.

Considérons tout d'abord un système exécutant des *oscillations* harmoniques sinusoïdales (corde vibrante, pendule oscillant, etc.). Le paramètre variable pourra être la longueur de la corde vibrante, ou la longueur du pendule, et nous ferons varier lente-



Fig. VIII. 14. — Corde vibrante, de longueur variable par déplacement O suivant Ox.

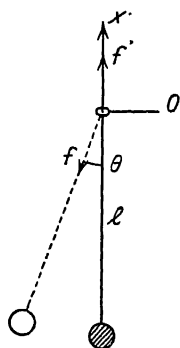


Fig. VIII. 15. — Pendule de longueur variable par déplacement vertical de l'anneau O.

ment cette longueur en déplaçant un anneau sur la corde, comme l'indiquent les figures VIII. 14 et VIII. 15.

Les oscillations sinusoïdales jouissent de la propriété simple que l'énergie cinétique moyenne  $\bar{T}$  est égale à l'énergie potentielle moyenne  $\bar{V}$  :

$$\bar{T} = \bar{V} = \frac{1}{2} E$$

de sorte que l'expression suivante est un invariant adiabatique :

$$(VIII. 163) \quad \tau E = C^{te}.$$

Pendant une transformation adiabatique nous aurons donc, en prenant la dérivée logarithmique :

$$\frac{1}{\tau E} d(\tau E) = \frac{d\tau}{\tau} + \frac{dE}{E} = 0$$

d'où le travail fourni par le système :

$$(VIII. 164) \quad d\mathcal{C} = -dE = E \frac{d\tau}{\tau}.$$

Ce travail résulte de l'existence d'une force moyenne  $F$  s'exerçant sur l'anneau O :

$$(VIII. 165) \quad \begin{aligned} d\mathcal{C} &= F dl \\ F &= \frac{E}{\tau} \frac{d\tau}{dl}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc très rapidement cette force moyenne; pour le cas du *pendule*, la relation entre  $\tau$  et  $l$  est bien connue :

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \frac{d\tau}{dl} = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}$$

et la force moyenne  $F$  sera donc :

$$(viii. 166) \quad F = \frac{E}{2l}.$$

On vérifie facilement ce résultat par un calcul direct, en remarquant que, pour un écart angulaire  $\theta$ , la corde du pendule est soumise à une tension  $f$  égale à  $mg \cos \theta$ ; les deux tensions  $f, f'$  agissant sur l'anneau  $O$  n'ont pas la même direction; ces deux forces donnent une résultante dont la composante verticale est  $mg \cos \theta (1 - \cos \theta)$ ; si l'on prend la valeur moyenne de cette force verticale, pour une oscillation du pendule, on retrouve l'expression (viii. 166) que nous a donné la méthode de Boltzmann-Ehrenfest.

Dans le cas de la corde vibrante, les choses se passent un peu différemment. La corde est soumise à une certaine tension  $f$ , ce qui fixe la vitesse de propagation  $W$  des ondes transversales le long de cette corde tendue. Les oscillations capables de prendre naissance, sur le segment de longueur  $l$  sont celles dont la demi-longueur d'onde est égale à  $\frac{1}{n} l$ ,  $n$  étant entier; on a donc les relations :

$$\lambda = W\tau \quad n \frac{\lambda}{2} = l$$

donc :

$$(viii. 167) \quad \tau = \frac{2l}{nW} \quad \frac{d\tau}{dl} = \frac{2}{nW}.$$

Portant ces valeurs dans la formule générale (viii. 165) on en tire la force moyenne  $F$  s'exerçant sur l'anneau :

$$(viii. 168) \quad F = \frac{E}{l}.$$

La force moyenne est ici égale à l'énergie de vibration par unité de longueur de la corde.

## XXI. — Pressions de radiation.

La formule de Boltzmann-Ehrenfest est extrêmement commode par sa grande généralité; elle va droit au but, et nous évite de recommencer sur chaque exemple un raisonnement particulier. On en trouvera diverses applications dans le livre *L'atome de Bohr*, 2<sup>e</sup> édition, déjà cité. Je voudrais indiquer encore ici un problème qui nous permettra d'évaluer la *pression de radiation* de la lumière. Considérons un cylindre, à parois réfléchissantes, fermé par un miroir  $M$  formant piston (fig. viii. 16). Un rayon tombe normalement sur le tiroir  $M$ , et se réfléchit sur lui, puis encore sur le fond du cylindre  $C$ ; il se forme entre le fond et le miroir  $M$  un système d'ondes station-

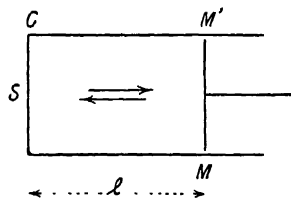


Fig. viii. 16.

naires, pour lequel la condition (VIII. 167) est encore vérifiée, de sorte que la force  $F$  sur le miroir est toujours donnée par (VIII. 168). Appelons  $S$  la surface du miroir, et  $p$  la force par unité de surface; nous dirons que la radiation exerce sur le piston  $M$  une *pression de radiation*  $p$  :

$$(VIII. 169) \quad p = \frac{F}{S} = \frac{E}{Sl} = \frac{E}{V} = \mathcal{E} \quad \mathcal{E} = \frac{E}{V}.$$

$\mathcal{E}$  est l'énergie par unité de volume ou *densité d'énergie*; la formule que nous venons de trouver n'est valable que pour l'*incidence normale*, et suppose en outre essentiellement que la vitesse de propagation  $W$  des ondes soit une constante, complètement indépendante du volume  $V$  du cylindre. Cette condition est nécessaire pour passer de (VIII. 167) à (168). Une telle hypothèse est parfaitement justifiée, si notre cylindre est *vide*, de telle sorte que  $W$  soit la vitesse constante de la lumière dans le vide. Si nous avons des ondes se propageant dans un milieu matériel, lui-même contenu dans le cylindre  $C$ , tout serait à réviser : en déplaçant le piston, nous changerions le volume  $V$  et par conséquent les propriétés du milieu matériel seraient modifiées, la vitesse  $W$  changeant progressivement. Nous allons voir ce qui se passe alors, toujours dans le cas particulier de l'incidence normale. Le résultat sera valable pour la lumière se propageant dans un *milieu matériel fluide*, ou aussi bien pour des ondes sonores dans un fluide.

Il faudra tenir compte de ce que la vitesse  $W$  (vitesse de phase) se modifie au cours de la dilatation; en différenciant la relation  $\frac{1}{2} n W \tau = l$ , nous écrivons donc :

$$\frac{dW}{W} + \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dl}{l}$$

d'où résulte, par (VIII. 165) :

$$(VIII. 170) \quad F = \frac{E}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{E}{l} \left( 1 - \frac{l}{W} \frac{dW}{dt} \right).$$

Le milieu *fluide* reste homogène isotrope au cours de la dilatation; si la vitesse  $W$  des ondes est modifiée, c'est parce que la densité  $\rho$  du liquide est changée; mais  $\rho l$  reste constant, puisque  $\rho l S$  est la masse totale de liquide; donc :

$$(VIII. 171) \quad \frac{dl}{l} = - \frac{d\rho}{\rho}$$

$$F = \frac{E}{l} \left( 1 + \frac{\rho}{W} \frac{dW}{d\rho} \right)$$

ce qui nous donne la pression de radiation pour l'incidence normale :

$$(VIII. 172) \quad p = \frac{F}{S} = \mathcal{E} \left( 1 + \frac{\rho}{W} \frac{dW}{d\rho} \right)$$

cette formule remplace l'expression (VIII. 169).

Il nous a fallu préciser que le milieu était *fluide*, de telle sorte qu'il reste constamment isotrope au cours de la dilatation. Pour un milieu solide, cette

condition ne serait pas réalisée : en déplaçant le piston suivant  $Ox$ , nous dilaterions le solide dans cette direction, sans modifier les dimensions transversales. Cette traction latérale détruirait l'isotropie du milieu. La formule (viii. 170) serait toujours valable, mais nous ne pourrions pas utiliser la relation (viii. 171), qui compare la dilatation unilatérale à une dilatation uniforme en tous sens, manifestée seulement par le changement de densité  $\rho$ .

Nous reviendrons plus en détail, au chapitre XI, sur ces problèmes et nous traiterons aussi les cas d'incidence oblique.

---

# LE PASSAGE A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

## 1. — L'introduction des quanta en physique.

Lorsque les physiciens voulurent appliquer les méthodes de la mécanique à des modèles d'atomes, ils commencèrent par garder intact tout le cadre classique, en lui superposant des conditions supplémentaires de « quanta ». On avait reconnu depuis 1900 (premier mémoire de Planck) la nécessité d'introduire en physique une constante fondamentale <sup>(1)</sup>, le quantum d'action :

$$(ix. 1) \quad h = 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ erg. sec.}$$

Cette grandeur est une « action », au sens que nous avons donné à ce mot en mécanique classique, c'est-à-dire qu'elle a les dimensions :

$$L^2MT^{-1}$$

et signifie, par exemple, une énergie ( $L^2MT^{-2}$ ) multipliée par un temps, ou une quantité de mouvement ( $LMT^{-1}$ ) multipliée par une longueur. L'action  $W$  (d'après Lagrange) ou  $F$  (d'après Maupertuis) est bien une grandeur de cette nature, d'après les définitions :

$$(ix. 2) \quad W = \int L dt \quad F = \int 2T dt = \int \sum_k p_k dq^k.$$

La première « mécanique quantifiée », bâtie sur ces hypothèses, faisait, parmi toutes les trajectoires de la mécanique classique, un choix particulier : certaines orbites, le long desquelles les intégrales  $F$  (prises en circuit fermé) étaient égales à des multiples entiers de la constante  $h$  de Planck, étaient supposées douées d'une stabilité particulière, et fournissaient des *niveaux d'énergie* caractéristiques du modèle atomique considéré. On avait donc à tenir compte des *premières conditions de Bohr* :

$$(ix. 3) \quad \oint \sum p dq = nh \quad \text{énergie } E(n_1, n_2 \dots).$$

<sup>(1)</sup> En dehors des ouvrages cités au paragraphe précédent, voir : G. BRUHAT. *Cours d'Optique*. Masson, Paris, 1931, p. 614. — *Cours d'Electricité*, 3<sup>e</sup> éd. Masson, Paris, 1934, p. 541, 558. — V. HENRI. *Matière et Energie*. Hermann. Paris, 1933.



Le signe  $\oint$  indique une intégrale prise sur un cycle fermé du mouvement ; ces conditions déterminaient les niveaux d'énergie  $E$ , comme des fonctions d'un ou plusieurs nombres quantiques  $n_1, n_2 \dots$  entiers.

Ensuite venait la *seconde condition de Bohr*, d'après laquelle l'atome, en passant d'une configuration stable ( $n'_1, n'_2 \dots$ ) à une autre ( $n_1, n_2 \dots$ ) émettait (ou absorbait) un rayonnement de fréquence  $\nu_r$  :

$$(ix. 4) \quad h\nu_r = E(n'_1, n'_2 \dots) - E(n_1, n_2 \dots).$$

Tous les faits d'expérience confirment l'exactitude rigoureuse de cette seconde règle ; le classement de tous les spectres connus se fait au moyen d'un certain nombre de niveaux d'énergie  $E$ , bien définis, et que l'on sait attribuer aux atomes, ou aux molécules, ou même à certains radicaux libres.

La première condition de Bohr, en revanche, s'est révélée insuffisante. Après quelques succès généraux, on dut se rendre compte que la mécanique classique, jointe aux conditions (ix. 3) ne donnait pas des renseignements rigoureux sur le nombre et la valeur des niveaux énergétiques des atomes ou des molécules.

La refonte des hypothèses a conduit les théoriciens à établir une nouvelle mécanique, dite mécanique quantique ou mécanique ondulatoire, et qui permet de rendre compte très exactement de tous les détails des spectres lumineux, en prédisant correctement les positions des niveaux d'énergie.

Les noms des initiateurs de cette nouvelle mécanique sont bien connus : L. de Broglie, Schrödinger pour la méthode ondulatoire, Born, Heisenberg, Dirac pour la théorie plus abstraite des matrices. Sans entrer ici dans le détail de ces conceptions nouvelles, nous indiquerons comment on peut passer de la mécanique classique à la mécanique ondulatoire, suivant la voie indiquée par L. de Broglie et Schrödinger.

## II. — *Energie, fréquence et masse.*

La règle essentielle qui ressort de toute la discussion des faits empiriques, c'est celle d'une relation étroite entre l'énergie et la fréquence  $\nu$  :

$$(ix. 5) \quad E = h\nu.$$

Une telle condition exige une définition du *zéro de l'échelle des énergies* ; mais il se trouve que les conceptions relativistes permettent d'apporter cette précision supplémentaire. La théorie de la relativité affirme, en effet, l'identité de l'énergie et de la masse  $m$  :

$$(ix. 6) \quad E = mc^2 \quad c, \text{ vitesse de la lumière.}$$

Les raisons théoriques apportées à l'appui de cette relation sont extrêmement solides, et les preuves expérimentales les plus variées en ont été données ; des mesures très précises de variation de masse avec la vitesse ont été faites sur les électrons, et apportent une confirmation excellente ; l'interprétation peut en être donnée en quelques mots : un électron au repos possède une

masse  $m_0$ , qui correspond à une énergie  $m_0 c^2$ ; cette énergie représente l'énergie de formation de l'électron, son « énergie interne », si l'on veut. Lorsqu'on met en mouvement cet électron, on lui communique une *énergie cinétique* supplémentaire; la masse  $m$  de l'électron en mouvement devra donc être supérieure à la masse  $m_0$  au repos; la différence  $(m - m_0)c^2$  représente l'énergie cinétique.

Dans le domaine des transformations radioactives, naturelles ou provoquées, les physiciens ont pu établir un certain nombre de bilans énergétiques; ces considérations sont toujours basées sur les relations (ix. 5 et 6) et en constituent de très précieuses vérifications.

Lorsqu'une certaine masse disparaît, c'est sous forme d'énergie rayonnée; cette radiation est émise avec la fréquence  $\nu$ .

La seconde règle de Bohr (ix. 4) du paragraphe précédent ne dit pas autre chose. Nous la transcrivons autrement; soit  $E'$  l'énergie de l'atome dans son état initial,  $E$  l'énergie de l'état final; nous supposons ces énergies mesurées à partir du zéro de l'échelle relativiste, c'est-à-dire en tenant compte de la valeur énergétique de toutes les masses; nous affirmerons que le *système atomique* possède, sous ses deux formes, des fréquences :

$$(ix. 7) \quad \text{état initial} \quad E' = h\nu' \quad E = h\nu \quad \text{état final}$$

Lorsque l'atome se modifie, il perd une énergie  $E' - E$ ; celle-ci est émise sous forme de radiation d'une certaine fréquence  $\nu_r$ ; cette fréquence du rayonnement émis est donnée par la règle de Bohr :

$$(ix. 8) \quad \text{radiation} \quad E' - E = h\nu_r \quad \nu_r = \nu' - \nu.$$

Ainsi donc, il ne faut pas confondre la formule (ix. 7) qui fixe les fréquences internes des atomes, avec la formule (ix. 8) de Bohr qui donne la fréquence de la radiation émise.

C'est à L. de Broglie que revient la découverte de la généralité de la relation (ix. 5), actuellement admise par tous les physiciens.

### III. — Attribution de la fréquence $\nu$ aux ondes de Hamilton; longueur d'onde et quantité de mouvement.

Nous admettons que l'énergie  $E$  d'un système atomique correspond à une fréquence  $\nu$ , mais à quel mécanisme vibratoire devons-nous attribuer cette périodicité? C'est ici que L. de Broglie apporte une affirmation extrêmement importante : ce sont les ondes de Hamilton qu'il considère désormais comme périodiques, en leur donnant la fréquence  $\nu$ , et par suite une longueur d'onde  $\lambda$  :

$$(ix. 9) \quad \lambda = \frac{u}{\nu}$$

$u$  étant la vitesse de propagation des ondes, d'après (viii. 140). Nous avons noté (chap. VIII, § 16) que la vitesse des ondes :

$$(ix. 10) \quad u = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}}$$

n'était définie qu'avec un certain facteur de proportionnalité arbitraire, dû à l'incertitude sur la valeur absolue de l'énergie, dans le cadre de la mécanique classique. Les définitions relativistes, rappelées au paragraphe précédent, comblent cette lacune, et permettent de parler avec certitude de la valeur absolue de l'énergie  $E$  du système considéré; la vitesse des ondes est ainsi complètement définie.

Cette introduction d'une fréquence, attribuée aux ondes de Hamilton, pourrait se faire sans modifier les formules de propagation établies au chapitre VIII, mais elle resterait alors extérieure, et comme superposée à la mécanique classique. Nous savons d'autre part, par les difficultés rencontrées dans l'application de cette mécanique aux systèmes atomiques, qu'il nous est impossible de garder telles quelles les règles classiques, et qu'une retouche est indispensable pour rétablir l'accord entre la théorie et les données empiriques.

Cette retouche, L. de Broglie a proposé de la faire suivant la même méthode qui avait, au siècle dernier, si brillamment réussi en optique. L'optique géométrique était une première approximation de l'optique physique, laquelle peut seule rendre compte des phénomènes d'interférences, diffusion et diffraction. Lorsqu'on étudie la propagation des ondes auprès d'obstacles de très petites dimensions, comparables à la longueur d'onde, la méthode géométrique cesse d'être valable. De même, en mécanique, nous avons trouvé que les méthodes classiques étaient équivalentes à une « optique géométrique », qui se passait, à dire vrai, dans l'extension en configuration au lieu de l'espace ordinaire. Nous allons donc tenter une modification analogue à celle de l'optique, et chercher à établir une *mécanique ondulatoire*.

Cette mécanique ondulatoire, nous le pressentons, se raccordera avec la méthode classique, géométrique, toutes les fois que la propagation des ondes sera peu troublée, de sorte que les ondes se meuvent sans grandes incurvations, et que les trajectoires des particules (courbes orthogonales aux ondes) aient de grands rayons de courbure. La méthode ondulatoire se raccordera alors sans peine à la mécanique géométrique, de même que l'optique ondulatoire redonne, en première approximation, les règles de l'optique géométrique.

Les innovations, analogues aux interférences ou à la diffraction, se rencontreront dans les exemples où nous obtiendrions des ondes fortement incurvées, et des trajectoires de petites dimensions, *comparables à la longueur d'onde*. Pour nous rendre compte des ordres de grandeur, évaluons cette longueur d'onde, d'après (ix. 5, 9 et 10) :

$$(ix. 11) \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = h \frac{u}{E} = \frac{h}{\sqrt{2(E-V)}} = \frac{h}{\sqrt{2T}}.$$

Prenons l'exemple d'un électron, se mouvant dans le champ d'un centre attractif, tel que le noyau d'un atome; nous avons à rappeler tout d'abord une convention essentielle à toutes nos formules. Nous supposons, au chapitre VIII, § 5, que la métrique de l'extension en configuration avait été choisie de telle sorte que l'on ait :

$$(ix. 12) \quad ds^2 = 2Tdt^2;$$

c'était supposer les unités telles que la masse de la particule mobile soit justement prise pour unité. Revenons aux conventions usuelles : une particule de

masse  $m$  se meut dans un espace euclidien  $x, y, z$ ; soit  $d\sigma$  une mesure de longueur dans cet espace; nous trouvons :

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ (ix. 13) \quad 2T &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = mv^2 \\ d\sigma^2 &= 2T dt^2 = m(dx^2 + dy^2 + dz^2) = md\sigma^2. \end{aligned}$$

Ainsi donc, si nous laissons en évidence la valeur  $m$  de la masse, les longueurs  $d\sigma$  mesurées suivant les conventions ordinaires sont  $\frac{1}{\sqrt{m}}$  fois celles que nous donne l'élément linéaire  $ds$  défini au chapitre VIII, § 5.

Il s'ensuit que les vitesses  $u$  des ondes (ou  $v$  du mobile) sont multipliées par  $m^{-\frac{1}{2}}$ , si nous rejetons la convention de masse 1. Les formules (ix. 6, 11) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} (ix. 14) \quad u' &= \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{E}{\sqrt{2mT}} & m \neq 1. \\ \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{h}{p} & p = mv \text{ quantité de mouvement.} \end{aligned}$$

La relation entre  $\lambda$  et  $p$  est tout à fait caractéristique des hypothèses de L. de Broglie. Elle s'est vérifiée avec une exactitude rigoureuse : des faisceaux d'électrons, bien homogènes, et possédant une quantité de mouvement  $p$  se diffractent ou se réfléchissent exactement comme des faisceaux lumineux de la longueur d'onde  $\lambda$  correspondante. On étudie, depuis quelques années, les structures des réseaux cristallins soit au moyen des rayons X, soit avec des faisceaux d'électrons. Les phénomènes de diffraction ou de réflexion sélective obéissent, dans les deux cas, aux mêmes règles générales.

Revenons aux modèles d'atomes, et comparons les ordres de grandeur. Les dimensions des atomes sont de l'ordre de l'Angström, soit  $10^{-8}$  cm.; la masse d'un électron est  $9 \cdot 10^{-28}$  gr., et sa charge vaut  $4,774 \cdot 10^{-10}$  unités électrostatiques C. G. S. ou  $1,592 \cdot 10^{-19}$  coulombs. Si l'on accélère un électron par une différence de potentiel de 1 volt  $\left(\frac{1}{300} \text{ U.E.S. C.G.S.}\right)$  on lui communique une énergie :

$$eV = 4,774 \frac{1}{300} 10^{-10} = 1,592 10^{-12} \text{ ergs}$$

ce qui correspond à une vitesse  $v$  :

$$\frac{1}{2} mv^2 = eV \quad v = 5,94 10^7 \text{ cm. : sec.}$$

et une quantité de mouvement :

$$mv = 5,35 10^{-20}.$$

Nous aboutissons donc, pour des électrons accélérés sous un volt, à évaluer la longueur d'onde à :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,55 10^{-27}}{5,35 10^{-20}} = 1,22 10^{-7} \text{ cm.}$$

Ce n'est pas au hasard que nous avons choisi une différence de 1 volt : les potentiels d'ionisation des atomes se comptent en v depuis une fraction de volt jusqu'à quelques dizaines de volts, pour sations correspondant à l'arrachement d'un électron extérieur de (électron de valence ou électron optique). Si l'on enlève l'électron à un che interne, comme cela se passe pour une excitation par les rayons  $\gamma$ , potentiels d'ionisation se montent à des milliers de volts. Les trajectoires des électrons, dans l'atome, correspondent donc à des niveaux d'énergie qui, comptés en « électron-volt » (produit  $e.V$ ) vont de  $-1$  à  $-100$  volts, par exemple, pour les électrons extérieurs ; ces énergies totales sont négatives, puisqu'il faut fournir de l'énergie pour extraire l'électron. Les énergies cinétiques des électrons internes sont du même ordre de grandeur, mais positives, comme de juste. L'atome est un système de charges électriques agissant les unes sur les autres suivant les lois de Coulomb et, pour un tel édifice, la mécanique classique indique des relations simples entre les moyennes des énergies cinétique ou potentielle et l'énergie totale :

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V} = -E.$$

Nous voyons donc que les trajectoires des électrons, dans les atomes, ont des dimensions du même ordre de grandeur que les longueurs d'ondes  $\lambda$  attribuées aux électrons ; pour les électrons extérieurs, les trajectoires et les longueurs d'onde sont de l'ordre de l'Angström ( $10^{-8}$  cm.) ; et dans l'intérieur de l'atome, les trajectoires et les longueurs d'onde seront toutes deux réduites par un facteur plus ou moins grand, suivant les atomes.

Ainsi, le domaine atomique sera celui où la mécanique ondulatoire se différenciera nettement de la mécanique classique, par suite du rôle prépondérant des effets d'interférences et de diffraction.

#### IV. — *Optique physique et optique géométrique ; principe de Fermat.*

Avant d'aborder le problème de la mécanique ondulatoire, nous rappellerons sur des exemples simples la manière dont se fait le passage de l'optique ondulatoire à l'optique géométrique. Etudions la propagation des ondes, dans un milieu isotrope hétérogène. Nous nous donnerons, en chaque point du milieu, la valeur  $u$  de la vitesse de propagation ;  $u$  sera une fonction de la position, mais ne dépendra pas de la direction de propagation des ondes (condition d'isotropie). Prenons alors des coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  et nous aurons une équation :

$$(ix. 15) \quad \Delta \Psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

pour déterminer la fonction d'onde  $\Psi(x, y, z, t)$  qui représente le phénomène à étudier ; s'il s'agit d'ondes acoustiques ou de vibrations,  $\Psi$  sera par exemple le déplacement des points matériels à partir de leurs positions de repos. Pour la lumière,  $\Psi$  représentera le champ électrique ; en général,  $\Psi$  est la grandeur physique qui se propage par ondes.

Nous pourrions chercher une solution de fréquence  $\nu$  donnée; nous choisirions alors pour  $\Psi$  une fonction du type :

$$(ix. 16) \quad \Psi(x, y, z, t) = \Psi_1(x, y, z) e^{2\pi i \nu t}$$

et l'équation d'onde prendra la forme :

$$(ix. 17) \quad \Delta \Psi_1 + K^2 \Psi_1 = 0$$

avec :

$$K^2 = \frac{4\pi^2 \nu^2}{u^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

La propagation d'une onde monochromatique dépend donc d'une fonction  $K^2$  des coordonnées  $x, y, z$ . Le problème que nous venons de poser correspond au cas d'un milieu *sans dispersion* : la vitesse de propagation  $u$  garde la même valeur pour toutes les fréquences  $\nu$ . On a souvent lieu d'envisager des problèmes plus complexes, où l'on ne pourrait pas écrire une équation aussi simple que (ix. 15), mais on saurait pourtant, pour chaque fréquence  $\nu$ , former une équation du type (ix. 17), où  $K$  et  $u$  seraient des fonctions plus ou moins compliquées de la fréquence; ces problèmes conduiraient à définir une vitesse  $u$  dépendant de  $\nu$ , ou encore un *indice*  $\frac{1}{u}$  fonction de la fréquence  $\nu$ ; on dit alors qu'il y a de la *dispersion*.

Dans l'équation (ix. 17) nous voyons apparaître une longueur fondamentale, la longueur d'onde  $\lambda$ . Dans un milieu homogène, la vitesse  $u$  et la longueur d'onde  $\lambda$  sont constantes, nous pourrions par un simple changement des unités de longueur ramener l'équation à une forme canonique : en prenant  $\lambda$  comme unité, tous les problèmes se réduisent à une même forme. On verra donc, dans les solutions relatives au milieu homogène, figurer toujours les rapports  $\frac{x}{\lambda} \frac{y}{\lambda} \frac{z}{\lambda}$ , c'est-à-dire des longueurs mesurées en unités  $\lambda$  : citons des exemples simples <sup>(1)</sup> :

Onde plane, dirigée dans le sens défini par les 3 cosinus directeurs  $\alpha\beta\gamma$  :

$$(ix. 18) \quad \Psi = A e^{-2\pi i \left( \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda} - \nu t \right)} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Onde sphérique, centrée sur l'origine :

$$(ix. 19) \quad \Psi = \frac{A}{r} e^{-2\pi i \left( \frac{r}{\lambda} - \nu t \right)}.$$

Dans toutes ces formules (ix. 16) ou (ix. 18, 19) l'emploi des exponentielles imaginaires simplifie bien des calculs; il suffit de se rappeler qu'on doit, une fois les calculs terminés, prendre *seulement la partie réelle* du résultat; le signe de l'exposant ne joue donc aucun rôle essentiel; le seul point délicat est de ne pas faire d'erreur s'il se présente un produit de deux grandeurs; le plus sûr est alors de revenir aux quantités réelles, ce qui est, en général,

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, G. BRUHAT. *Cours de Mécanique physique*. Masson, Paris, 1934, p. 524 et p. 541. — Pour tout le raisonnement développé dans ce chapitre, on reliera : L. DE BROGLIE. *Introduction à la Mécanique ondulatoire*, Hermann, Paris, 1930.

équivalent au remplacement d'une des deux grandeurs par son imaginaire conjuguée, du fait que les exposants sont les mêmes.

Retournons à notre équation (ix. 17) en milieu hétérogène ; nous pouvons chercher une solution dont la structure ressemble à (ix. 18 ou 19) en séparant l'amplitude  $A$  et la phase  $\varphi$  de l'onde ; nous poserons :

$$(ix. 20) \quad \Psi(xyzt) = A(xyz)e^{-2\pi i \varphi(xyzt)} = A(xyz)e^{2\pi i(\nu t - \varphi_1(xyz))},$$

c'est-à-dire :

$$\Psi_1 = Ae^{-2\pi i \varphi_1} = A \cos 2\pi \varphi_1 - iA \sin 2\pi \varphi_1.$$

Nous supposons, dans cette décomposition, que  $A$  et  $\varphi_1$  sont des quantités réelles, de sorte que les formules (ix. 20) nous permettent de séparer nettement le réel de l'imaginaire. Portons l'expression de  $\Psi$  dans la formule (ix. 17) des ondes et nous trouvons :

$$(ix. 21) \quad \Delta A + A \left[ K^2 - 4\pi^2 \sum_{xyz} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 \right] + 2\pi i \left[ A \Delta \varphi_1 + 2 \sum_{xyz} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right] = 0.$$

Nous retrouverons les conditions de l'optique géométrique, si nous pouvons admettre que  $A$  et  $K^2$  sont *lentement variables* ; il est facile de préciser le sens de ce mot,  $A$  et  $K^2$  devront ne varier que très peu sur une distance  $\lambda$ , car la longueur d'onde est, en fait, l'étalon local de longueur ; supposons donc les conditions suivantes remplies :

$$(ix. 22) \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial r} \ll \frac{1}{\lambda} \quad \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \ll \frac{1}{\lambda^2} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} \ll 1 \quad \lambda \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \ll 1.$$

Nous admettons donc un milieu à propriétés optiques lentement variables et une *onde presque plane* ; au voisinage d'un foyer (éq. ix. 19) ou de focales, l'amplitude  $A$  de l'onde varie très rapidement, et nos inégalités ne sont pas remplies.

Dans l'équation (ix. 21), négligeons toutes les dérivées de  $A$ , il nous reste, en divisant par  $4\pi^2 A$  :

$$(ix. 23) \quad \frac{1}{\lambda^2} - \sum_{xyz} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{i}{2\pi} \Delta \varphi_1 = 0.$$

La solution est une onde presque plane, de sorte que, au voisinage du point  $x_0 y_0 z_0$  étudié, on puisse poser :

$$(ix. 24) \quad \varphi_1 = \frac{\alpha(r - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0)}{\lambda}$$

et retrouver ainsi une onde de la forme (ix. 18) ; une telle solution compense les deux premiers termes de (ix. 23) ; quant au troisième en  $i\Delta\varphi_1$ , on voit, en prenant  $\varphi_1$  dans (ix. 24), qu'il est négligeable si  $\lambda$  est lentement variable (ix. 22).

Pour former la solution  $\Psi_1$  de l'équation des ondes, nous sommes conduits à construire tout d'abord les surfaces  $\varphi_1$  qui correspondent à une valeur déterminée de la phase, et sont déterminées par l'équation :

$$(ix. 25) \quad \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{\lambda^2} = 0,$$

où  $\lambda(x, y, z)$  est une fonction des coordonnées ; auprès d'un point  $x_0, y_0, z_0$  donné, la surface  $\varphi_1$  pourra, si sa courbure n'est pas trop grande ( $\Delta\varphi_1$  très petit, dans nos hypothèses) être confondue avec son plan tangent, ce qui nous donne la forme (ix. 24). Le rayon lumineux est alors dirigé suivant  $\alpha, \beta, \gamma$ , c'est-à-dire normal à la surface d'onde :

$$(ix. 26) \quad \varphi_1 = C.$$

Ces constructions sont celles de l'optique géométrique ; cette dernière est caractérisée par le type d'équation (ix. 25), qui contient seulement les premières dérivées, tandis que l'optique ondulatoire repose sur (ix. 15 ou 17) où figure le laplacien  $\Delta$ , c'est-à-dire les dérivées secondes.

Nous trouvons, en optique géométrique, une suite de surfaces fixes (ix. 26) qui représentent les positions successives d'une surface d'onde mobile :

$$(ix. 27) \quad \varphi(xyzt) = \varphi_1(xyz) - vt = 0$$

c'est l'onde de phase, et la vitesse  $u$  que nous avons introduite est la *vitesse de phase*.

La différence de propriétés des deux équations (ix. 17) ondulatoire et (ix. 25) géométrique ressort nettement du raisonnement suivant, qui nous fournira le *principe de Fermat*. La longueur d'onde  $\lambda$ , fonction de  $x, y, z$ , est, à chaque endroit, nous l'avons déjà dit, l'étalon naturel de longueur. Essayons donc de réduire les équations à une forme canonique par l'emploi de nouvelles variables  $\xi, \eta, \zeta$  :

$$(ix. 28) \quad d\xi = \frac{dx}{\lambda}, \quad d\eta = \frac{dy}{\lambda}, \quad d\zeta = \frac{dz}{\lambda}.$$

L'équation d'optique géométrique se réduit automatiquement :

$$(ix. 29) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}\right)^2 - 1 = 0.$$

Avec les coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  nous retrouvons la même équation que dans un milieu homogène ; le rayon lumineux, dans un milieu homogène, se propage en ligne droite ; ici, nous pourrions affirmer que le rayon est une géodésique de l'espace  $\xi, \eta, \zeta$  lequel pourra d'ailleurs avoir une certaine courbure, car son élément linéaire s'écrit :

$$(ix. 30) \quad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{1}{\lambda^2} ds^2 = \frac{\lambda^2}{u^2} ds^2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

La géodésique en  $\xi\eta\zeta$  satisfait au principe de minimum de la longueur  $\sigma$  (plus exactement, la longueur est stationnaire) :

$$(ix. 31) \quad \sigma = \int d\sigma = \int \frac{ds}{u} = \text{stationnaire}.$$

Cette condition nous fournit le principe de Fermat (Cf. chap. VIII, § 13) d'après lequel le rayon géométrique correspond au minimum du temps de parcours, c'est-à-dire de  $\int \frac{ds}{u}$ , puisque  $u$  est la vitesse des ondes.

La transformation (ix. 28) permet donc de ramener l'équation géométrique



à une forme canonique, qui efface complètement le rôle de la structure non homogène du milieu optique. Sur l'équation ondulatoire (ix. 17) cette transformation ne donne rien d'intéressant :

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \sum_{\xi\tau\zeta} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial\xi} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right) = \sum_{\xi\tau\zeta} \left[ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} \right]$$

d'où l'équation :

$$(ix. 32) \quad \sum_{\xi\tau\zeta} \left[ -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial\lambda}{\partial\xi} \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right] + \Delta\Psi + 4\pi^2\Psi = 0.$$

Le groupe des termes en  $\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}$  empêche toute réduction à une forme unique. Si les variations d'indice optique (c'est-à-dire de la vitesse de phase  $u$  et, par suite, de  $\lambda$ ) se produisent dans des domaines de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, la propagation est perturbée ; c'est la base de la théorie des milieux troubles, et de la diffusion de la lumière bleue par le ciel (Tyndall, Rayleigh). Le principe de Fermat ne s'applique plus dans ces conditions ; l'approximation de l'optique géométrique cesse d'être valable.

### V. — Formation d'une équation ondulatoire pour la mécanique.

La mécanique classique est, nous l'avons vu au chapitre précédent, équivalente à une sorte d'optique géométrique dans l'extension en configuration. La résolution du problème mécanique se ramène, par la méthode de Hamilton, à l'étude d'une équation aux dérivées partielles du même type que (ix. 25) ; nous avons écrit cette équation en (viii. 136), pour un problème conservatif très général :

$$(ix. 33) \quad \frac{1}{2} \sum_{ik} M^{ik} \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial q^k} + V - E = 0$$

ou encore :

$$(ix. 34) \quad \sum_{ik} M^{ik} \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial q^k} - \frac{E^2}{u^2} = 0 \quad u^2 = \frac{E^2}{2(E - V)}$$

en introduisant la vitesse  $u$  des ondes, d'après (viii. 140) ; ces équations supposent la métrique choisie suivant la convention (ix. 12).

Les solutions de cette équation réduite de Hamilton-Jacobi fournissent un jeu de surfaces fixes  $F$ , tracées dans l'extension en configuration à  $r$  dimensions ; l'équation complète de Hamilton-Jacobi nous donne une surface mobile :

$$(ix. 35) \quad W = F - Et = 0$$

comme nous l'avons vu au chapitre VIII, § 15 (éq. viii. 132). Introduisons ici la relation de de Broglie, et remplaçons  $E$  par  $h\nu$  :

$$(ix. 36) \quad \frac{W}{h} = \frac{F}{h} - \nu t = 0.$$

La comparaison de (ix. 36) avec les ondes (ix. 27) de l'optique nous conduit aux identifications suivantes :

$$W = h\varphi \qquad F = h\varphi_1$$

de sorte que les ondes  $\Psi$  de la mécanique seraient du type suivant d'après (ix. 20) :

$$(ix. 37) \qquad \Psi = Ae^{-\frac{2\pi i}{h} W} = Ae^{\frac{2\pi i}{h} (Et - F)}$$

Mais, du même coup, nous renonçons à croire que l'équation de Hamilton-Jacobi (ix. 33) soit rigoureuse; nous lui attribuons seulement une valeur de première approximation, analogue à l'optique géométrique, tandis que l'équation fondamentale en  $\Psi$  serait une équation du second ordre, analogue à celle (ix. 15) de l'optique ondulatoire.

Pour trouver cette équation, nous suivrons la voie inverse de celle du paragraphe précédent. Commençons par un exemple simple, où l'extension en configuration se réduit à 3 dimensions : une particule de masse  $m$  se meut dans un champ d'énergie potentielle  $V$ ; les coefficients  $M_{ik}$  sont :

$$M_{ik} = m\delta_{ik} = \begin{cases} m & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Les  $M^{ik}$  sont les mineurs (divisés par  $\Delta$ ) du déterminant  $\Delta$  des  $M_{ik}$ ; il suffit d'écrire ce déterminant pour voir leurs valeurs :

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3 \qquad M^{ik} = \frac{1}{m} \delta_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{m} & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

L'équation de Hamilton-Jacobi (ix. 33) se réduit à :

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] + V - E = 0$$

ou :

$$(ix. 38) \qquad \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 - \frac{E^2}{u'^2} = 0 \qquad u'^2 = \frac{E^2}{2m(E - V)}.$$

Nous laissons en évidence la masse  $m$ , c'est dire que nous n'adaptions pas la métrique à l'énergie cinétique; nous voyons donc apparaître la vitesse  $u'$  comme en (ix. 14); d'après nos remarques précédentes (ix. 36 à 37), nous devons comparer  $F$  à  $h\varphi_1$ ;  $E$  est égal à  $h\nu$  d'après L. de Broglie; la quantité  $\frac{1}{\lambda^2}$  de l'équation (ix. 25) devient donc ici :

$$(ix. 39) \qquad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\nu^2}{u'^2} = \frac{2m(E - V)}{h^2} = \frac{2mT}{h^2} = \frac{p^2}{h^2}.$$

Nous retombons sur la relation entre la longueur d'onde et la quantité de mouvement, annoncée en (ix. 14).

Ces identifications une fois faites, nous remonterons aisément à l'équation ondulatoire fondamentale, qui serait (ix. 17) :

$$(ix. 40) \quad \Delta\Psi_1 + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Psi_1 = \Delta\Psi_1 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V)\Psi_1 = 0.$$

C'est l'équation de Schrödinger.

Les raisonnements de L. de Broglie sont tout à fait analogues, mais basés sur la mécanique relativiste. Nous n'avons pas exposé, dans ce volume, cette extension de la mécanique, de sorte que nous sommes obligés de nous borner à la mécanique usuelle, valable tant que les vitesses des mobiles sont très petites devant la vitesse de la lumière. Dans ces conditions, ce sont les formules de Schrödinger que nous obtenons en mécanique ondulatoire.

Dans le problème précédent, il est facile de donner la règle de transcription, qui permet de former l'équation de Schrödinger. On commence par écrire la fonction de Hamilton :

$$(ix. 41) \quad H(q^k, p_k) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V = E$$

à partir de (ix. 41), on formerait l'équation de Hamilton-Jacobi en remplaçant la quantité de mouvement  $p_x$  par  $\frac{\partial S}{\partial x}$ . Pour obtenir l'équation d'onde, on remplace  $p_x$  par l'opérateur différentiel :

$$(ix. 42) \quad p_x = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$$

et on applique l'opération  $(H - E)$  à une fonction  $\Psi$ . Voici le détail de ce calcul symbolique :

$$(ix. 43) \quad (H - E)\Psi = \left[ -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V - E \right] \Psi = 0.$$

Le procédé de transcription (ix. 42) nous ramène bien à l'équation d'onde (ix. 40).

## VI. — Méthode générale de formation de l'équation d'onde en mécanique de Schrödinger.

Les règles que nous venons de trouver se généralisent sans grande difficulté pour un problème mécanique général, tel que ceux étudiés au chapitre VIII ; nous supposons un système conservatif, à liaisons holonomes indépendantes du temps. Quelques remarques préliminaires s'imposent.

Tout d'abord, nous resterons dans le cadre de la mécanique classique ; c'est nous restreindre au cas de particules animées de faibles vitesses, mais cette limitation nous permet de traiter des problèmes comportant un nombre quelconque de particules mobiles, tandis que la mécanique relativiste ne sait raisonner que sur une particule isolée.

D'autre part, nous devons faire attention que la méthode formelle (ix. 42), qui consiste à remplacer la quantité de mouvement  $p_k$  par l'opérateur  $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q^k}$

n'est pas générale. Elle s'applique correctement dans un espace euclidien, mais non plus dans un espace courbe. Même pour une particule unique, il suffit de passer des coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  à des coordonnées curvilignes pour que ce procédé de transcription ne soit plus valable. Nous verrons d'ailleurs qu'il convient de remplacer la dérivée ordinaire par une dérivée covariante pour remettre les choses en ordre.

Dans l'extension en configuration, notre métrique basée sur les coefficients  $M_{ik}$  de l'énergie cinétique définit un espace de Riemann, pour lequel nous savons écrire l'opérateur laplacien, d'après nos études du chapitre VII (§§ 2 et 7); nous prendrons, bien entendu, le laplacien ramené à la forme scalaire (VII. 10 et VII. 53) :

$$(ix. 44) \quad \Delta \Psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} \right) = \sum_{ik} g^{ik} \frac{D^2 \Psi}{Dx^i Dx^k}$$

où les symboles  $D$  désignent les dérivées covariantes, et nous partons de l'équation d'onde suivante :

$$(ix. 45) \quad \Delta \Psi_1 + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) \Psi_1 = 0.$$

Grâce aux dérivées covariantes, nous pourrions appliquer ici la même méthode de formation qu'au paragraphe précédent; les  $g_{ik}$  ou  $g^{ik}$  sont maintenant les coefficients d'inertie  $M_{ik}$  ou  $M^{ik}$  de l'énergie cinétique; le hamiltonien  $H$  s'écrit :

$$(ix. 46) \quad H(q^k, p_k) = \frac{1}{2} \sum_{ik} M^{ik} p_i p_k + V(q^k);$$

nous remplaçons les moments  $p_k$  par les opérateurs :

$$(ix. 47) \quad p_k = \frac{h}{2\pi i} \frac{D}{Dq^k} \quad p_i p_k = -\frac{h^2}{4\pi^2} \frac{D^2}{Dq^i Dq^k}.$$

Le hamiltonien devient un opérateur, que nous appliquons à la fonction d'onde  $\Psi_1$  et l'équation :

$$(ix. 48) \quad (H - E) \Psi_1 = 0$$

est identique à (ix. 45), puisque l'opérateur  $H$  redonne le laplacien  $\Delta$  de (ix. 44).

Nous avons donc trouvé la généralisation formelle de la méthode du paragraphe précédent. Voyons maintenant comment cette équation d'onde (ix. 45) redonne, à l'approximation de l'optique géométrique, l'équation de Hamilton-Jacobi (ix. 33).

Posons :

$$(ix. 37) \quad \Psi = A e^{\frac{2\pi i}{h} (Et - F)} = \Psi_1 e^{\frac{2\pi i}{h} Et} \quad \Psi_1 = A e^{-\frac{2\pi i}{h} F};$$

conformément à notre prévision (ix. 37) et amorçons le calcul du laplacien :

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial q^k} = \left[ -A \frac{2\pi i}{h} \frac{\partial F}{\partial q^k} + \frac{\partial A}{\partial q^k} \right] e^{-\frac{2\pi i}{h} F}$$

puis :

$$(ix. 48) \quad \frac{\partial}{\partial q'} \left[ \sqrt{M} \cdot M'^k \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^k} \right] = \frac{\partial}{\partial q'} (\sqrt{M} \cdot M'^k) \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^k} + \sqrt{M} \cdot M'^k \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial q' \partial q^k}.$$

Nous ne développerons pas le détail des calculs, mais nous introduirons tout de suite les approximations nécessaires pour retrouver la mécanique géométrique :

I. Amplitude A très lentement variable, de sorte que nous puissions négliger les termes en  $\frac{\partial A}{\partial q'}$  et  $\frac{\partial^2 A}{\partial q' \partial q^k}$  et ne garder que ceux en A.

II. Courbure faible de la surface d'onde de sorte que  $\frac{\partial^2 F}{\partial q' \partial q^k}$  soit négligeable, devant les dérivées premières  $\frac{\partial F}{\partial q^k}$ .

III. Espace à propriétés métriques lentement variables, ce qui nous permet de négliger  $\frac{\partial}{\partial q'} (\sqrt{M} \cdot M'^k)$ , les termes en  $\sqrt{M} \cdot M'^k$  étant prédominants.

Bien entendu, le terme « lentement variable » signifie que la propriété étudiée varie très peu sur une distance d'une longueur d'onde  $\lambda$ .

L'hypothèse III supprime le premier terme de (ix. 49) ; développons alors la dérivée seconde de  $\Psi_1$ , en négligeant les dérivées de l'amplitude A (hypothèse I) :

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial q' \partial q^k} \approx \left[ -A \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{\partial F}{\partial q'} \frac{\partial F}{\partial q^k} - A \frac{2\pi i}{h} \frac{\partial^2 F}{\partial q' \partial q^k} \right] e^{-\frac{2\pi i}{h} F}$$

L'hypothèse II supprime le dernier terme, et nous obtenons :

$$(ix. 50) \quad \Delta \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q'} \left[ \sqrt{M} \cdot M'^k \frac{\partial \Psi_1}{\partial q^k} \right] \approx -\frac{4\pi^2}{h^2} \Psi_1 \sum_{ik} M'^k \frac{\partial F}{\partial q'} \frac{\partial F}{\partial q^k}$$

ce qui ramène l'équation ondulatoire (ix. 45) à la forme géométrique (ix. 33). Si nous comparons cette discussion à celle du paragraphe 4, nous voyons un très complet parallélisme. Parmi les hypothèses I, II, III nécessaires, l'hypothèse I avait déjà été soulignée en (ix. 22). L'hypothèse II découle de l'hypothèse III, si on lui adjoint la condition que la vitesse de propagation  $u$  (donc la longueur d'onde  $\lambda$ ) soit lentement variable. Nous pourrions donc remplacer l'hypothèse II par la suivante : l'énergie potentielle V devrait être lentement variable ; ceci joint à l'hypothèse III assure la marche du calcul.

## VII. — Les règles de commutation.

Les moments  $p_k$  doivent donc être, d'une manière générale, remplacés par des opérateurs « dérivées covariantes ». Tant que l'opérateur  $p_k$  est appliqué à un scalaire, la dérivée covariante est identique à la dérivée ordinaire, ainsi :

$$p_k \Psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial q^k}$$

mais la différence apparaît lorsque l'opération  $p_k$  est appliquée à une gran-

deur vectorielle ou tensorielle; ainsi  $(p_k \Psi)$  est un vecteur covariant et si nous formons  $p_l(p_k \Psi)$  nous devons prendre garde aux termes correctifs :

$$(ix. 51) \quad p_l(p_k \Psi) = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{D}{Dq^l} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial q^k} \right) = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^l \partial q^k} - \sum_h \Gamma_{lk}^h \frac{\partial \Psi}{\partial q^h} \right] = p_k(p_l \Psi).$$

Ce sont des doubles opérateurs de ce genre qui constituent l'énergie cinétique (ix. 46), de sorte que les dérivées covariantes sont indispensables pour former le hamiltonien  $H$ .

La formule (ix. 51) nous prouve que l'on peut toujours échanger deux opérations  $p_l$  et  $p_k$  consécutives; les opérateurs  $p_k$  commutent entre eux. Il n'en est plus de même si nous introduisons d'autres opérations; appelons  $q^k$  l'opération qui consiste à multiplier une certaine fonction par la coordonnée  $q^k$ ; nous avons :

$$(ix. 52) \quad q^l q^k \Psi = q^k q^l \Psi.$$

Les opérateurs  $q^k$  commutent entre eux, mais ils ne peuvent commuter avec les  $p$ ; ceci est facile à voir : l'opération  $p_l q^k$  consiste à multiplier par  $q^k$  puis dériver par rapport à  $q^l$ ; supposons d'abord  $q^l$  différent de  $q^k$  et essayons de former l'opération :

$$(ix. 53) \quad p_l q^k \Psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{D}{Dq^l} [q^k \Psi].$$

Nous sommes tout de suite arrêtés, parce que  $q^k$  n'est pas en général un vecteur, de sorte que nous ne savons pas former sa dérivée covariante. Nous ne pouvons poursuivre le calcul que pour un espace euclidien, avec axes rectilignes; les dérivées sont alors du type usuel :

$$p_l q^k \Psi = \frac{\hbar}{2\pi i} q^k \frac{\partial \Psi}{\partial q^l} = q^k p_l \Psi.$$

Si les indices  $l$  et  $k$  sont identiques, les choses se passent autrement :

$$(ix. 54) \quad p_k q^k \Psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q^k} [q^k \Psi] = \frac{\hbar}{2\pi i} \Psi + \frac{\hbar}{2\pi i} q^k \frac{\partial \Psi}{\partial q^k} = \left( \frac{\hbar}{2\pi i} + q^k p_k \right) \Psi.$$

Les opérations  $p_k q^k$  et  $q^k p_k$  donnent donc des résultats différents. Considérons les opérations  $q^k$  et  $p_l$ , sans préciser sur quelle fonction  $\Psi$  elles sont appliquées et nous résumerons les formules (ix. 51 à 54) sous la forme suivante valable seulement en espace euclidien avec axes rectilignes :

$$(ix. 55) \quad \begin{aligned} q^l q^k - q^k q^l &= 0 & p_l p_k - p_k p_l &= 0 \\ p_l q^k - q^k p_l &= \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_l^k = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k \\ \frac{\hbar}{2\pi i} & \text{si } l = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Ces formules de commutation entre les opérateurs  $q$  et  $p$  sont souvent prises comme point de départ de la mécanique quantique. Si l'on se place, comme nous l'avons fait, au point de vue ondulatoire, elles sont la conséquence de la définition (ix. 47) de l'opérateur  $p$  et ne sont pas utilisables en coordonnées curvilignes.

VIII. — *Propagation d'un groupe d'ondes ;  
vitesse de phase et vitesse de groupe.*

Un milieu homogène *sans dispersion* est caractérisé par une équation de propagation du type (ix. 15) avec une vitesse  $u$ , la même pour toutes les fréquences ; si le milieu est homogène,  $u$  est constant, le même en tous points, et dans un milieu hétérogène la vitesse  $u$  dépend des coordonnées. Nous voulons étudier maintenant un *milieu dispersif*, pour lequel on ne saura pas former une équation unique du type (ix. 15), mais on aura des équations (ix. 17) :

$$(ix. 17) \quad \Delta \Psi_1 + K^2 \Psi_1 = 0; \quad K^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 \nu^2}{u^2}$$

où  $K^2$  est une fonction de la fréquence  $\nu$  (dispersion) et éventuellement des coordonnées (hétérogénéité).

Dans un tel milieu, un signal de forme arbitraire se déforme en se propageant, au contraire de ce qui se produit dans un milieu non dispersif. S'il n'y a pas de dispersion, et si le milieu est homogène, on peut former des ondes, de structure arbitraire, se propageant sans modification :

$$\Psi = F \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{u} \right) \quad \text{onde plane, cosinus directeurs } \alpha\beta\gamma$$

$$\Psi = \frac{1}{r} F \left( t - \frac{r}{u} \right) \quad \text{onde sphérique}$$

avec une fonction  $F$  arbitraire. De telles solutions ne sont plus valables pour un milieu dispersif. Il faut alors étudier la manière dont se propage un signal, et pour cela le décomposer en ondes sinusoïdales, tenir compte de la propagation de chacune d'elles, et recomposer ensuite ces ondes (qui ne constituent qu'un artifice de calcul) pour obtenir la forme du signal après un certain temps de propagation.

Prenons d'abord un exemple simple, celui d'un signal qui se compose de deux ondes sinusoïdales planes, ayant des fréquences peu différentes et se propageant suivant l'axe des  $x$  :

$$(ix. 36) \quad \begin{aligned} \Psi_1 &= A \cos 2\pi[\nu_1 t - a_1 x] & a_1 &= \frac{1}{\lambda_1} \\ \Psi_2 &= A \cos 2\pi[\nu_2 t - a_2 x] & a_2 &= \frac{1}{\lambda_2} \\ \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2. \end{aligned}$$

Nous avons pris la même amplitude  $A$  pour les deux ondes, ce qui va, par superposition, nous donner une onde  $\Psi$  présentant des *battements*, avec une amplitude totale qui variera de 0 à  $2A$  suivant les phases réciproques des deux composantes  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ .

Nous poserons :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu + \varepsilon & a_1 &= a + \alpha \\ \nu_2 &= \nu - \varepsilon & a_2 &= a - \alpha \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$(ix. 37) \quad \Psi = 2A \cos 2\pi[\varepsilon t - \alpha x] \cos 2\pi[\nu t - ax],$$

car la somme de deux cosinus est égale à deux fois le produit du cosinus de la demi-somme par le cosinus de la demi-différence des angles. Nous pouvons décrire notre fonction  $\Psi$  comme une onde plane, ayant une fréquence moyenne  $\nu$  et une longueur d'onde  $\lambda$  :

$$(ix. 58) \quad a = \frac{r}{\lambda}$$

mais avec une amplitude variable  $A'(t, x)$  :

$$(ix. 59) \quad \Psi = A' \cos 2\pi(\nu t - \alpha x), \quad A' = 2A \cos 2\pi(\varepsilon t - \alpha x).$$

Il s'agit, en somme, de ce qu'on appelle en radiotélégraphie une *onde modulée* ;  $\nu$  est la fréquence de l'onde porteuse et  $\varepsilon$  celle de la modulation. La modulation  $\varepsilon$  se propage avec une vitesse  $U$  donnée par :

$$(ix. 60) \quad U = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{d\varepsilon}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

car l'amplitude  $A'$  comporte un facteur de phase  $\varepsilon t - \alpha x$  que nous pouvons écrire  $\varepsilon\left(t - \frac{x}{U}\right)$ , en mettant en évidence une certaine vitesse  $U$  définie ci-dessus ; la seconde expression s'obtient en supposant  $\varepsilon$  et  $\alpha$  très petits :

$$\varepsilon = \nu_1 - \nu = d\nu \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha = d\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Les battements, ou la modulation se propagent donc avec la vitesse  $U$  que l'on appelle la *vitesse de groupe*. Cette vitesse n'est égale à la *vitesse de phase*  $u$  que si le milieu n'a pas de dispersion ; en général les deux vitesses  $u$  et  $U$  sont différentes :

$$(ix. 61) \quad \frac{1}{U} = \frac{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\nu} = \frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} = \frac{1}{u} - \frac{\nu}{u^2} \frac{du}{d\nu}.$$

La figure (ix. 1) explique ces résultats ; on y voit représentée une onde modulée, avec sa période porteuse  $\frac{1}{\nu}$  et sa période de modulation  $\frac{1}{\varepsilon}$  ; les

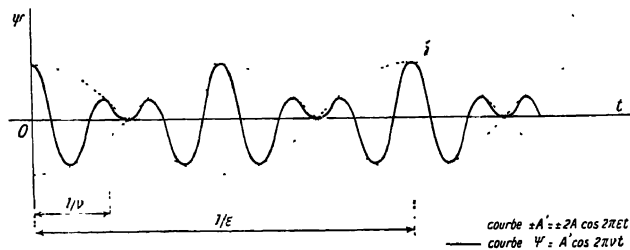


Fig. ix. 1.

oscillations rapides (période  $\frac{1}{\nu}$ ) se propagent avec la vitesse de phase  $u$  ; les lentes modulations (période  $\frac{1}{\varepsilon}$ ) glissent sur tout le système des ondes avec une vitesse différente, la vitesse de groupe  $U$ .



Ces phénomènes sont très visibles pour les rides à la surface de l'eau <sup>(1)</sup> ; on trouve dans ce cas une vitesse de phase  $u$  qui dépend considérablement de la longueur d'onde ; appelons  $\rho$  la densité,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $A$  la constante de la tension superficielle ; en eau profonde, la formule s'écrit :

$$(ix. 62) \quad u^2 = g \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{A}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda}$$

la vitesse de phase passe par un minimum pour une certaine longueur d'onde  $\lambda_0$  :

$$\lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{A}{\rho g}} = 1,74 \text{ cm.} \quad \text{cas de l'eau.}$$

Pour les grandes longueurs d'onde (ondes de gravité), la vitesse de phase  $u$

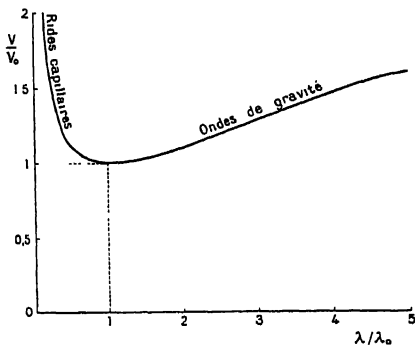


Fig ix. 2.

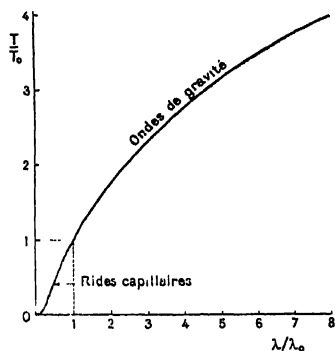


Fig. ix. 3.

est proportionnelle à  $\sqrt{\lambda}$  ; pour les courtes longueurs d'onde (rides capillaires) la vitesse de phase varie comme  $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ . Nous allons voir comment la *vitesse de groupe* s'observe dans les deux cas ; la formule (ix. 60) peut se transcrire autrement :

$$(ix. 63) \quad v = \frac{u}{\lambda} \quad U = \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = u + \frac{1}{\lambda} \frac{du}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}.$$

Voici les résultats, dans les deux cas limites précédents :

$$(ix. 64) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ondes de gravité} & u = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \lambda^{\frac{1}{2}} \quad U = \frac{1}{2} u \\ \text{rides capillaires} & u = \sqrt{\frac{2\pi A}{\rho}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \quad U = \frac{3}{2} u \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup> G. BRUHAT. *Cours de mécanique physique*. Masson, Paris, 1934, p. 566. On y retrouvera sous une forme un peu différente, la discussion de la propagation des battements et la vitesse de groupe.

Dans le premier cas, les ondes se propagent deux fois plus vite que les groupes (ou battements); on verra donc les ondes se former à l'arrière du groupe, traverser le groupe en prenant une grande amplitude en son milieu, et mourir à l'avant du groupe. C'est ce qu'on observe très exactement sur la houle en haute mer, ou pour les ondes dans un canal profond.

Les rides capillaires fournissent l'exemple inverse : les battements se propagent plus vite que les rides; on verra les rides se former à l'avant du groupe d'ondes, puis être dépassées par celui-ci et venir mourir à l'arrière.

Lorsqu'on jette une pierre dans l'eau pour *faire des ronds*, on peut observer le premier phénomène si la pierre est grosse; avec une petite pierre, on forme des ondes de quelques centimètres de longueur d'onde, peu différentes de celles qui donnent le minimum de la vitesse de phase, ce qui correspond à une vitesse de groupe  $U$  presque égale à la vitesse de phase  $u$ .

### IX. — Groupes d'ondes dans l'espace.

Nous avons étudié, au paragraphe précédent, la propagation d'un groupe d'ondes, dans une direction bien définie; les deux ondes composantes avaient exactement même direction de propagation. Lorsque nous étudions des ondes dans l'espace, les choses sont un peu plus compliquées; nous pouvons avoir deux ondes composantes ayant des fréquences un peu différentes, et aussi des directions distinctes; nous allons reprendre cet exemple de plus près. Considérons deux composantes  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  :

$$\begin{aligned} \text{(ix. 65)} \quad \Psi_1 &= A \cos 2\pi(\nu_1 t - a_1 x - b_1 y - c_1 z) \\ \Psi_2 &= A \cos 2\pi(\nu_2 t - a_2 x - b_2 y - c_2 z). \end{aligned}$$

Nous supposons connue la vitesse de propagation de la phase  $u$ , comme fonction de la fréquence  $\nu$ . La première onde a une longueur d'onde  $\lambda_1$  :

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$

sa fréquence  $\nu_1$  est donnée par :

$$\text{(ix. 66)} \quad \frac{\nu_1}{u(\nu_1)} = \frac{1}{\lambda_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$

et l'on obtient une formule analogue pour la seconde onde  $\Psi_2$ . Posons maintenant, comme en (ix. 57) :

$$\begin{aligned} \text{(ix. 67)} \quad \nu_1 &= \nu + \varepsilon & a_1 &= a + \alpha & b_1 &= b + \beta & c_1 &= c + \gamma \\ \nu_2 &= \nu - \varepsilon & a_2 &= a - \alpha & b_2 &= b - \beta & c_2 &= c - \gamma. \end{aligned}$$

Nous obtenons l'onde résultante  $\Psi$  sous la forme suivante, analogue à (ix. 57 ou 59) :

$$\begin{aligned} \text{(ix. 68)} \quad \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos 2\pi(\varepsilon t - \alpha x - \beta y - \gamma z) \cos 2\pi(\nu t - ax - by - cz) \\ &= A' \cos 2\pi(\nu t - ax - by - cz) \end{aligned}$$

avec une amplitude variable :

$$A' = 2A \cos 2\pi(\varepsilon t - \alpha x - \beta y - \gamma z).$$

Par suite des relations (ix. 66), les quantités  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  ne sont pas indépendantes ; nous supposons deux ondes très peu différentes, de sorte que ces quatre quantités soient extrêmement petites, et puissent être traitées comme des différentielles. L'onde modulée  $\Psi$  présente une longueur d'onde  $\lambda$  :

$$\frac{1}{\lambda} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Nous posons :

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

La variation  $\varepsilon = d\nu$  de la fréquence est alors donnée par la condition :

$$(ix. 69) \quad d\left(\frac{\nu}{u}\right) = \frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} \cdot \varepsilon = d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\alpha})}{|\vec{a}| |\vec{\alpha}|}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{\alpha}) = a\alpha + b\beta + c\gamma \quad |a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Nous avons trois nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  qui constituent les trois composantes du vecteur  $\vec{a}$ , et de même pour  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . La formule (ix. 69) fait apparaître la vitesse de groupe  $U$  de (ix. 61) et s'écrit :

$$(ix. 70) \quad \frac{\varepsilon}{U} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\alpha})}{|\vec{a}| |\vec{\alpha}|}$$

voilà donc l'expression de l'intervalle  $\varepsilon$  de fréquence en fonction des  $\alpha\beta\gamma$  supposés tous infiniment petits. L'amplitude variable  $A'$  de l'onde modulée (ix. 68) se propage, et c'est là le point essentiel à étudier. Nous pouvons définir une longueur d'onde  $\Lambda$  et une vitesse apparente  $U'$  de ces battements de la manière suivante :

$$(ix. 71) \quad \frac{1}{\Lambda} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

$$U' = A\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{\varepsilon}{|\vec{\alpha}|} = U \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\alpha})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\alpha}|} = U \cos \theta.$$

L'aspect du phénomène est représenté sur la figure (ix. 4), pour des ondes se propageant sur une surface plane (ondes sur l'eau). Les ondes composantes  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  se propagent (à très peu près) dans la direction du vecteur  $\vec{a}$  ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) ; les battements semblent se propager dans une direction  $\vec{\alpha}$  ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) qui peut être très différente de  $\vec{a}$  ; l'angle entre ces deux directions est  $\theta$ , dont la définition classique se retrouve bien :

$$(\vec{a} \cdot \vec{\alpha}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{\alpha}| \cdot \cos \theta.$$

Les battements semblent donc glisser obliquement avec la vitesse  $U'$  égale à  $U \cos \theta$  ; mais on peut aussi bien se représenter les choses autrement et dire qu'on obtient un système de battements *orientés obliquement*, mais qui *glissent avec la vitesse de groupe*  $U$  dans la direction  $\vec{a}$  suivant laquelle se propagent les ondes composantes  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ .

Parmi ces systèmes de battements, nous en aurons donc qui présenteront des vitesses apparentes  $U'$  comprises entre 0 et  $U$ ; les battements immobiles ( $U' = 0$ ) s'obtiennent lorsque le vecteur  $\vec{a}$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{a}_1$ , ce qui donne  $d\nu = \varepsilon = 0$ ; il s'agit alors de deux ondes composantes  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  ayant même fréquence  $\nu$  et des directions de propagation un peu différentes; elles nous fournissent un système d'ondes stationnaires; les plans  $A' = 0$  d'amplitude nulle sont parallèles au vecteur  $\vec{a}$  qui définit la direction moyenne de propagation des deux composantes  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ .

Ce qu'il faut retenir de cette discussion, c'est que le système des battements ou groupes d'ondes glisse, le long du rayon moyen, avec la vitesse de groupe  $U$ , et ceci quelle que soit l'orientation, dans l'espace, du système de battements.

Précisons encore ce point, vu sa grande importance; supposons que le rayon

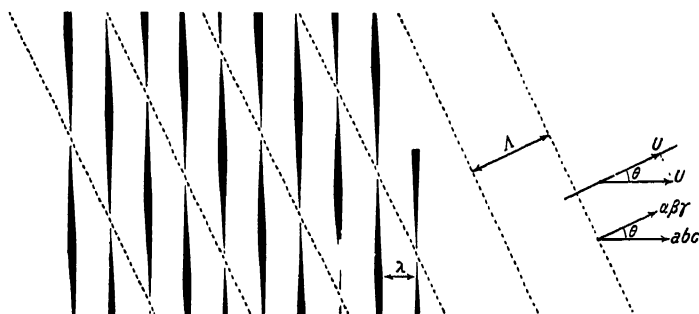


Fig 1x. 4.

moyen soit dirigé suivant  $Ox$ , comme sur la figure (1x. 4). C'est dire que  $b$  et  $c$  sont nuls, de sorte que la formule (1x. 70) se réduit à :

$$\frac{\varepsilon}{U} = \alpha$$

et l'onde  $\Psi$  résultante prend la forme :

$$(1x. 72) \quad \Psi = 2A \cos 2\pi[\alpha(Ut - x) - \beta y - \gamma z] \cos 2\pi(\nu t - \alpha x).$$

On voit nettement, sur cette expression, que le système de battements glisse le long du rayon ( $Ox$ ) avec la vitesse de groupe  $U$ .

La figure 1x. 5 illustre un exemple un peu plus complexe, où l'on aurait superposé deux ondes modulées  $\Psi$  et  $\Psi'$  du type (1x. 72), c'est-à-dire 4 ondes sinusoïdales ayant même fréquence moyenne  $\nu$  et même rayon moyen  $a$  dirigé suivant  $Ox$  :

$$(1x. 73) \quad \begin{aligned} \Psi + \Psi' &= 2A \cos 2\pi[\alpha(Ut - x) - \beta y - \gamma z] \cos 2\pi(\nu t - \alpha x) \\ &\quad + 2A \cos 2\pi[\alpha'(Ut - x) - \beta' y - \gamma' z] \cos 2\pi(\nu t - \alpha x) \\ \Psi + \Psi' &= 4A \cos 2\pi[\alpha_1(Ut - x) - \beta_1 y - \gamma_1 z] \\ &\quad \cos 2\pi[\alpha_2(Ut - x) - \beta_2 y - \gamma_2 z] \cos 2\pi(\nu t - \alpha x) \end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{array}{lll} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 & \beta = \beta_1 + \beta_2 & \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \\ \alpha' = \alpha_1 - \alpha_2 & \beta' = \beta_1 - \beta_2 & \gamma' = \gamma_1 - \gamma_2. \end{array}$$

Cela nous donne une onde moyenne de fréquence  $\nu$ , longueur d'onde  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$  se propageant suivant O.x, et modulée de telle sorte que son amplitude s'annule suivant deux systèmes de plans parallèles, dont l'un est caractérisé par  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$  et l'autre par  $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ . Tout le réseau des groupes d'ondes glisse suivant le rayon O.x avec la vitesse de groupe U ; chacun des « groupes d'ondes » ou « paquet d'ondes » décrit un rayon, et le suit avec la vitesse U, tandis que les ondulations élémentaires de fréquence  $\nu$  se propagent avec leur vitesse de phase  $u$ .

On peut aller plus loin, et construire un système d'ondes qui donne une amplitude notable seulement dans une région limitée de l'espace, tandis qu'en dehors de cette région les diverses ondes composantes se compensent et s'annulent réciproquement. On constate alors qu'au cours de son évolution, ce système se déforme progressivement tout en se propageant, mais la région d'amplitude notable reste, pendant un certain temps au moins, assez nettement délimitée ; elle se déplace suivant un rayon avec la vitesse de groupe. Il se produit pourtant des anomalies assez sérieuses lorsque la fréquence de ce groupe d'ondes est voisine d'une fréquence propre d'absorption du milieu, auquel cas la déformation du groupe est très rapide et la vitesse de son transport devient très difficile à préciser <sup>(1)</sup>.

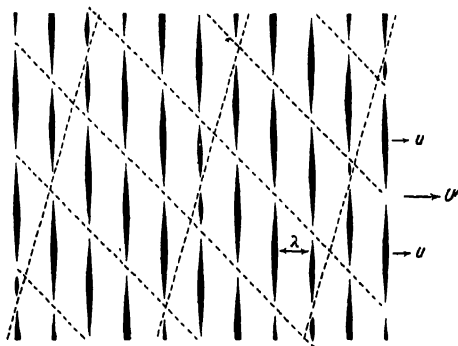


Fig. ix. 5.

### X. — Groupes d'ondes en mécanique ondulatoire.

Toutes ces considérations sont d'un intérêt primordial pour la mécanique ondulatoire. Nous avons obtenu, dans cette théorie, des ondes  $\Psi$  qui se propagent avec la vitesse de phase  $u$  de la formule (ix. 10) :

$$(ix. 10) \quad u = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}} = \frac{h\nu}{\sqrt{2(h\nu - V)}}.$$

<sup>(1)</sup> Voir à ce sujet : L. BRILLOUIN. Propagation des ondes électro-magnétiques. *Congrès International d'Electricité*. Gauthier-Villars, Paris, 1930, vol. 2, p. 739.

Nous pouvons donc évaluer la vitesse de groupe  $U$ , de manière à nous rendre compte de la loi suivant laquelle un paquet d'onde se déplacera le long d'un rayon géométrique :

$$(ix. 74) \quad \frac{1}{U} = \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv} = \frac{1}{h} \frac{d}{dv} \sqrt{2(hv - V)} = \frac{1}{\sqrt{2hv - V}}$$

donc, d'après (viii. 36) :

$$(ix. 75) \quad \text{Vitesse de groupe} = U = \sqrt{2(hv - V)} = v = \text{vitesse du mobile.}$$

Ce résultat est d'une grande importance, et c'est à juste titre que L. de Broglie et Schrödinger insistent sur sa signification profonde.

Nous avons, jusqu'à présent, construit les ondes de Hamilton comme un réseau de surfaces fictives, dont les rayons orthogonaux dessinaient les trajectoires décrites par le mobile ; mais il n'y avait aucune connexion étroite entre la progression de ces surfaces d'onde et le mouvement du mobile ; leurs vitesses étaient  $u$  et  $v$ , différentes l'une de l'autre. En mécanique ondulatoire, nous avons doté les ondes d'une périodicité (fréquence  $\nu$ ), sans changer leur vitesse de propagation  $u$  ; lorsque les mouvements n'offraient pas d'anomalies trop grandes, nous retrouvions comme première approximation les ondes de Hamilton et les règles de la « mécanique géométrique ». Dans ces mêmes conditions, nous voyons que nous pouvons maintenant établir une liaison plus étroite entre ces ondes et les corpuscules ; la vitesse de phase  $u$  des ondes n'a aucun rapport avec la vitesse du corpuscule, mais la vitesse de groupe  $U$  est identique à la vitesse  $v$  du mobile.

Un paquet d'ondes glisse le long de la trajectoire même du mobile, et avec une vitesse identique. Nous sommes ainsi conduits à nous représenter le mobile et le paquet d'ondes comme deux notions équivalentes. C'est ce que Schrödinger précise en disant que l'intensité de l'onde  $\Psi$  représente la probabilité pour que le mobile se trouve en une certaine région de l'extension en configuration. L'intensité d'une onde, c'est le carré de son amplitude ; si nous prenons les ondes  $\Psi$  sous forme imaginaire, comme aux paragraphes 4 et suivants, nous aurons :

$$(ix. 76) \quad I = A^2 = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$$

en désignant par l'astérisque une imaginaire conjuguée.

Nous dirons donc que la probabilité  $dW$  de trouver le mobile dans un petit volume  $d\tau$  de l'extension en configuration sera donnée par :

$$(ix. 77) \quad dW = I d\tau = \Psi\Psi^* d\tau.$$

Cette définition est justifiée par le fait que l'intensité de l'onde  $\Psi$ , dans un paquet d'onde, progresse au travers de l'extension en phase en glissant le long des trajectoires décrites par le mobile, et avec la même vitesse que celui-ci. Si donc j'ai un certain paquet d'ondes, capable de contenir un point mobile à un certain instant, d'après la loi de probabilité (ix. 77), je retrouverai plus tard ce même paquet d'ondes, déformé et transporté dans une autre

région de l'extension en configuration ; il contiendra toujours le même point mobile, puisque leurs mouvements sont identiques. Nous ne voulons pas insister ici davantage sur ces problèmes, dont nous aurons à reprendre plus tard l'étude détaillée à propos de la mécanique ondulatoire ; nous renverrons le lecteur aux deux exposés très clairs de Schrödinger et L. de Broglie <sup>(1)</sup>.

(1) L. DE BROGLIE. *Introduction à la mécanique ondulatoire*. Hermann, Paris, 1930. — E. SCHRÖDINGER. *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*. Alcan, Paris, 1933.

---

## ÉLASTICITÉ

## I. — Les tenseurs en élasticité.

Nous avons rappelé, au chapitre premier, §§ 4 et 5, les formules élémentaires qui permettent de définir le tenseur des efforts, dans un solide élastique continu soumis à une déformation. C'est là le premier exemple de tenseur qui ait été reconnu en physique, et le terme même de « tenseur » rappelle cette origine, puisqu'il s'agissait du système des *tensions* ou efforts dans l'élasticité. Peu à peu, toute une série de grandeurs de même nature ont été découvertes. Lorsqu'il s'agissait de tenseurs symétriques, à deux indices, les physiciens les étudiaient en construisant une forme quadratique homogène, et recherchant ensuite la nature de la surface du second degré ainsi définie. Partant du tenseur symétrique :

$$t_{ik} = t_{ki}$$

on formait la surface :

$$(x. 1) \quad \sum_{ik} t_{ik} x^i x^k = C$$

et l'on raisonnait sur cette surface, généralement une ellipsoïde. On cherchait les directions principales, les axes de l'ellipsoïde, etc., ce qui revenait à découvrir les axes et les valeurs propres du tenseur. Dans toute la physique cristalline ancienne, il n'était question que d'ellipsoïdes de divers types, qui masquaient les tenseurs symétriques correspondants. Le premier théoricien qui découvrit les tenseurs, les identifia et leur donna ce nom, fut W. Voigt, le célèbre cristallographe de Göttingen, dans son traité remarquable : *Lehrbuch der Kristallphysik* <sup>(1)</sup>. Depuis lors, la notion de tenseur est devenue classique ; elle a pris, en physique comme en mathématique, une importance considérable.

Nous exposerons, dans ce chapitre, quelques points fondamentaux de la théorie de l'élasticité, en mettant en relief le rôle des tenseurs, et la nature exacte des grandeurs qu'il s'agit de représenter. Nous nous limiterons au problème classique, où l'on traite le corps élastique comme continu et homogène, et nous remettrons à plus tard la question de la structure intime des

(1) Teubner, Berlin, 1910.



solides, lorsqu'on tient compte de leur constitution discontinue, comme assemblage d'atomes ou de molécules <sup>(1)</sup>.

Le problème de l'élasticité est un des premiers que l'on rencontre, dans l'histoire des théories physiques, et nombreux sont les savants qui, depuis plus d'un siècle, se sont attachés à cette étude. Les théories modernes ont apporté une lumière nouvelle, et permettent de résoudre un certain nombre de graves difficultés ou de paradoxes anciens. Malgré tous ces travaux, il reste encore d'assez sérieuses incertitudes sur la nature exacte des lois d'interaction entre les particules (atomes, molécules ou ions) dont l'assemblage constitue un corps solide; les raisonnements basés sur la fiction d'un solide continu et homogène gardent donc une valeur réelle; nous savons qu'ils ne peuvent s'appliquer correctement que si les déformations du solide sont très lentement variables d'un point à un autre; mais avec cette approximation, ces méthodes rendent encore des services. Précisons les ordres de grandeur: l'étude des cristaux aux rayons X a montré que ceux-ci sont des assemblages réguliers d'atomes, et que les distances entre ces atomes sont de l'ordre de 1 Angström, soit  $10^{-8}$  cm. La théorie des solides continus sera correcte, aussi longtemps que les déformations pourront être considérées comme uniformes dans des domaines de quelques dizaines d'Angströms; dans ces conditions, les propriétés du solide ne différeront que fort peu de celles que l'on observe à grande échelle (échelle macroscopique) et nous pourrons faire abstraction des détails de structure interne.

## II. — Rappel de quelques définitions.

Les définitions tensorielles précises, que nous avons présentées aux précédents chapitres, vont nous permettre de reprendre sous une forme générale l'étude des tensions dans un solide déformé. Nous avons (chap. I<sup>er</sup>, §§ 4, 5) défini le système des tensions par rapport à des axes rectilignes orthogonaux; c'est ainsi que l'on procède dans tous les exposés élémentaires; mais un grand nombre de problèmes pratiques nécessitent l'emploi de coordonnées curvilignes: l'étude des déformations et vibrations d'une plaque circulaire, ou d'un solide sphérique ne peuvent se faire qu'en coordonnées circulaires ou sphériques; nous allons donc reprendre la question, sans rien préciser sur le choix particulier des surfaces coordonnées  $x^k$  de manière à obtenir les formules sous leur aspect général.

Rappelons quelques données essentielles. Nous avons défini (chap. III, § 7) un *élément de surface*  $dS$  comme un tenseur contravariant, à deux indices, antisymétrique; nous prenons deux vecteurs infinitésimaux  $\vec{du}$  (paramètres directeurs  $\alpha'_i$ ) et  $\vec{dv}$  (paramètres directeurs  $\alpha''_j$ ), dont les composantes étaient, par rapport aux axes curvilignes  $x^1, x^2, x^3$ :

$$\begin{array}{ll} \delta x^i = \alpha'_i du & \text{pour le premier} \\ \delta x^j = \alpha''_j dv & \text{pour le second.} \end{array}$$

<sup>(1)</sup> On pourra lire à ce sujet l'exposé suivant: L. BRILLOUIN, *La structure des corps solides dans la physique moderne*; Actualités scientifiques Hermann, Paris, 1937.

L'élément de surface  $dS$  construit sur ces deux vecteurs avait pour composantes :

$$dS^{ij} = (\alpha_u^i \alpha_v^j - \alpha_v^i \alpha_u^j) du dv$$

et apparaissait ainsi comme un tenseur antisymétrique ; mais nous pouvions immédiatement réduire le nombre des indices, en introduisant la *capacité tensorielle*  $d\sigma_k$  :

$$(x. 2) \quad d\sigma_k = dS^{ij} = (\alpha_u^i \alpha_v^j - \alpha_v^i \alpha_u^j) du dv \quad i, j, k = \text{perm. circulaire de } 1, 2, 3.$$

Cette définition nécessitait le choix, fait une fois pour toutes, d'un certain sens de rotation des axes, le sens correspondant au numérotage 1, 2, 3. Nous avons ainsi représenté l'élément de surface  $d\sigma$  au moyen de *trois* composantes seulement, ce qui correspond bien à l'usage courant en géométrie élémentaire.

Toujours dans un espace à trois dimensions, un élément de volume  $dV$  est défini par trois vecteurs  $\vec{du}$ ,  $\vec{dv}$ ,  $\vec{dw}$  dont les composantes sont :

$$\delta x^i = \alpha_u^i du \quad \delta x^i = \alpha_v^i dv \quad \delta x^i = \alpha_w^i dw$$

non situés dans un même plan (chap. III, §§ 2 et 5) ; c'est en principe un tenseur à trois indices complètement antisymétrique :

$$(x. 3) \quad dV^{ijk} = \begin{vmatrix} \alpha_u^i & \alpha_v^j & \alpha_w^k \\ \alpha_u^j & \alpha_v^i & \alpha_w^k \\ \alpha_u^k & \alpha_v^j & \alpha_w^i \end{vmatrix} dudvdw.$$

L'antisymétrie annule tous les termes où deux des indices  $i, j$  ou  $k$  sont égaux ; il ne reste en fait qu'une seule composante. Choisissons l'ordre des axes 1, 2, 3, et nous définirons l'élément de volume comme *capacité scalaire*  $d\tau$  :

$$(x. 4) \quad d\tau = dV^{123} = \begin{vmatrix} \alpha_u^1 & \alpha_v^2 & \alpha_w^3 \\ \alpha_u^2 & \alpha_v^1 & \alpha_w^3 \\ \alpha_u^3 & \alpha_v^2 & \alpha_w^1 \end{vmatrix} dudvdw.$$

Appelons  $dS_{(uv)}^i$  ou  $d\sigma_{(uv)k}$  l'élément de surface (x. 2) construit sur les vecteurs  $du$  et  $dv$  ; nous aurons les relations suivantes, où figure une sommation sur les trois permutations circulaires de  $u, v, w$  :

$$(x. 5) \quad \sum_{uvw} \alpha_w^h dw d\sigma_{(uv)k} = \delta_k^h d\tau = \begin{cases} d\tau & \text{si } h \neq k \\ 0 & \text{si } h = k \end{cases}$$

en effet, pour  $h = k$  on retrouve l'expression (x. 4) et pour  $h \neq k$  la somme  $\Sigma$  représente le développement d'un déterminant ayant deux colonnes identiques.

Une *force* est un vecteur qu'on peut définir en écrivant l'expression du travail fourni, pour un déplacement arbitraire  $\delta x^k$  :

$$(x. 6) \quad d\mathfrak{E} = \sum_k f_k \delta x^k.$$

Le *travail*  $d\mathfrak{E}$  est un invariant, un scalaire dont la valeur doit être indépendante du choix particulier des axes ; nous avons donc, dans cette formule,

défini la force par ses composantes covariantes  $f_k$ . Dans d'autres problèmes, il faudra faire figurer les composantes contravariantes  $f^k$ ; nous savons d'ailleurs, dès que nous possédons une métrique, passer des composantes  $f_k$  aux  $f^k$  ou inversement. Écrivons par exemple le *moment* d'une force par rapport à un point P, situé à une distance  $\delta x'$  du point d'application de la force; ce moment est défini par le produit vectoriel :

$$(x. 7) \quad dM^v = |f' \delta x'| = f'^v \delta x' - f'^v \delta x',$$

c'est un tenseur antisymétrique à deux indices, réductible à une capacité vectorielle [tout comme l'élément de surface  $ds'$  de x. 2 se ramène à  $d\sigma_k$ ]; en géométrie usuelle on caractérise ce moment comme un vecteur polaire, ce qui correspond bien au même fait fondamental. Dans la formule (x. 7) la force figure par ses composantes contravariantes.

### III. — Les tensions élastiques.

Le système des efforts ou tensions dans un solide déformé ne constitue pas, en réalité, un tenseur, sous la forme où on le définit d'ordinaire; nous serons conduit à y voir un *pseudo-tenseur du type densité*. Traçons, au travers du solide, un petit élément de surface  $dS$ ; la force exercée, au travers de cette surface, par les différentes parties du solide les unes sur les autres, sera proportionnelle à cet élément de surface; nous sommes donc conduits à poser une relation :

$$dF = T dS;$$

tenons compte des propriétés tensorielles; nous devons attribuer à T un système de trois indices et préciser la formule :

$$(x. 8) \quad dF_i = \sum_{ij} T_{i,j} dS^j.$$

Les coefficients  $T_{i,j}$  ainsi introduits forment un tenseur trois fois covariant. Mais  $dy^j$  étant symétrique gauche, nous ne diminuons en rien la généralité <sup>(1)</sup> si nous supposons que  $T_{i,j}$  est symétrique gauche par rapport aux deux indices  $i$  et  $j$ . Les mots symétrique gauche ou antisymétrique sont synonymes.

Nous avons vu, au paragraphe 2 (éq. x. 2) que nous pouvions représenter l'élément de surface  $dS^v$  au moyen de trois composantes  $d\sigma_k$  formant une *capacité tensorielle*. Ceci nous oblige à choisir un sens de rotation favorisé  $i, j, k$  sur les axes de coordonnées; il revient au même de dire que, les vecteurs  $dy$  et  $dz$  étant donnés, nous pouvons définir un sens positif sur la normale à l'élément de surface  $[dy \cdot dz]$ .

<sup>(1)</sup> Supposons que nous ayons pris un tenseur  $t_{i,j}$  quelconque; la somme (x. 8) porte sur les indices  $i$  et  $j$ ; groupons les termes  $ij$  et  $ji$ ; nous pouvons écrire :

$$dF_i = \sum_{ij} \frac{1}{2} (t_{i,j} - t_{j,i}) dS_j$$

ce qui nous donne le tenseur symétrique gauche  $T_{i,j} = \frac{1}{2} (t_{i,j} - t_{j,i})$  la partie symétrique de ce tenseur ne joue donc aucun rôle et peut être supprimée.

Le tenseur  $T_{i,j}$  se représente alors par une densité tensorielle :

$$\Theta_i^k = 2T_{i,j} = -2T_{j,i},$$

le facteur 2 est nécessaire si nous voulons garder pour les efforts  $dF_i$  l'expression simple :

$$(x. 9) \quad dF_i = \sum_k \Theta_i^k d\sigma_k$$

où figurent moitié moins de termes que dans la formule (x. 8) (3 termes au lieu de 6). Cette force, avec les définitions usuelles, représente l'effort exercé, sur la partie solide située du côté de la normale négative, par la portion du solide située vers la normale positive. La somme (x. 9), représente le produit contracté d'une capacité tensorielle  $d\sigma_k$  par une densité tensorielle  $\Theta_i^k$ , ce qui donne bien un vrai tenseur covariant  $dF_i$ .

Ces formules nous donnent les forces exercées à travers un élément de surface quelconque; c'est le résultat que l'on obtient ordinairement au moyen d'un raisonnement basé sur l'équilibre d'un tétraèdre, que nous avons rappelé au chapitre premier, § 5. Nous avons, par ce procédé, trouvé la formule (i. 16) qui n'est autre chose que notre formule actuelle (x. 9). Il y a toutefois un progrès important; nous avons, à titre provisoire, classé le système des tensions  $t$  comme un tenseur; nos définitions plus précises nous permettent maintenant d'affirmer que les *tensions constituent une densité tensorielle*.

Nous avons aussi rappelé (chap. I<sup>er</sup>, § 4) le raisonnement classique qui conduit à admettre la symétrie du système des tensions; ce même calcul nous donne ici la symétrie des densités  $\Theta^{ik}$ , où l'on doit prendre les composantes deux fois contravariantes. Cela se voit immédiatement car le raisonnement du chapitre premier, § 4 est basé sur un calcul de *moments* des forces, or nous avons vu (équ. x. 7) que les moments font intervenir les composantes contravariantes de la force; celles-ci s'expriment au moyen des  $\Theta^{ik}$  contravariants :

$$(x. 10) \quad dF^i = \sum_k \Theta^{ik} d\sigma_k.$$

Le raisonnement du chapitre premier, § 4 est fait en coordonnées cartésiennes, et donne la symétrie :

$$(x. 11) \quad \Theta^{ik} = \Theta^{ki}.$$

Inutile de reprendre ce calcul dans d'autres axes : nous savons que la symétrie est une propriété invariante, qui se conserve dans tous les systèmes de référence. La relation (x. 11) est donc générale.

Rappelons toutefois que tout le raisonnement est basé sur l'hypothèse que le milieu n'est soumis à aucun système de couples proportionnels à l'élément de volume (pas de densités de moments de rotation imposés).

Une telle hypothèse est parfaitement raisonnable en élasticité, mais ne peut plus s'appliquer dans d'autres chapitres de la physique. En électricité, par exemple, on peut avoir un milieu diélectrique polarisé, sur lequel un champ électrique extérieur exercerait un couple proportionnel au volume; en magnétisme, un barreau aimanté placé dans un champ est soumis à un couple proportionnel au volume. Ainsi la condition de symétrie, indispensable pour le système des tensions élastiques, n'est plus valable en électro-magnétisme, pour

les tensions de Maxwell. C'est un point important, sur lequel E. Henriot <sup>(1)</sup> a récemment ramené l'attention des théoriciens.

Nous avons donc, en élasticité, la symétrie (x. 11) du pseudo-tenseur  $\Theta^{ik}$ , lorsqu'on prend ses composantes deux fois contravariantes. Nous pouvons chercher quelle est la condition correspondante pour le tenseur  $T$  à 3 indices, dont nous prendrons les composantes mixtes  $T^i_j$ ; nous savons que ce tenseur étant symétrique gauche, les composantes, pour lesquelles les deux indices  $i$  et  $j$  sont égaux, sont nulles. Prenons, par exemple, le cas  $\Theta^{12} = \Theta^{21}$ ; cette condition se transcrit ainsi :

$$T^1_{31} = T^2_{23} \text{ ou } T^1_{31} + T^2_{32} = 0,$$

ou encore, puisque  $T^3_{33}$  est nul :

$$T^1_{31} + T^2_{32} + T^3_{33} = 0,$$

ce qui s'écrit :

$$(x. 12) \quad \sum_i T^i_{3i} = 0.$$

L'indice inférieur 3 peut être remplacé par 1 en 2 ; cela nous fait donc 3 relations entre les composantes du tenseur mixte :

$$T^i_{ij}$$

qui reste, en outre, toujours antisymétrique en  $ij$ .

On voit toute la simplification qu'apporte l'usage du pseudo-tenseur  $\Theta^{ik}$  ; avec sa condition de symétrie, il laisse bien en évidence les 6 composantes indépendantes, celles mêmes que nous appelions  $N_1 N_2 N_3 T_1 T_2 T_3$  au chapitre premier, § 4. Au contraire, le tenseur à 3 indices  $T$  nous encombrerait de composantes superflues. Voyons, comme exemple, à quoi se réduit la densité tensorielle  $\Theta$  dans un fluide parfait ; on sait que les efforts internes sont alors caractérisés par une *pression*  $p$  ; l'effort exercé au travers d'un élément de surface est toujours normal à la surface :

$$(x. 13) \quad dF_k = -p d\sigma_k.$$

Le signe — provient des définitions usuelles : on compte les tensions positivement lorsqu'elles correspondent à une traction exercée sur le solide (Cf. nos conventions au début de ce paragraphe, et chapitre premier, § 4) ; les pressions sont ordinairement définies avec le signe opposé.

La densité tensorielle  $\Theta^{ik}$  se réduit alors à sa diagonale :

$$(x. 14) \quad \Theta = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

comme on le voit en comparant (x. 9 et 13).

<sup>(1)</sup> E. HENRIOT. *Volume jubilaire M. Brillouin*. Gauthier-Villars, 1935, p. 87 — *Mémoires des sciences physiques*, vol. XXX. Gauthier-Villars, 1936.

## IV. — Force résultante sur un élément de volume.

Considérons un parallélépipède construit sur trois vecteurs rectilignes infinitésimaux (fig. x. 1).  $\vec{du}$ ,  $\vec{dv}$  et  $\vec{dw}$ . Ce volume  $d\tau$  est défini par la formule (x. 4). Nous supposons que l'ordre  $u, v, w$  des trois vecteurs corresponde à l'ordre 1, 2, 3, c'est-à-dire au sens de rotation des axes  $x^1$ ,  $x^2$  et  $x^3$ . Le vecteur  $\vec{dw}$ , par exemple, se trouve par rapport à l'élément de surface  $(du, dv)$  du côté de la normale positive.

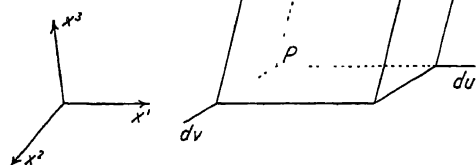


Fig. x. 1

Nous voulons calculer les forces exercées par tout le reste du solide sur la portion solide

contenue dans le parallélépipède. Considérons d'abord les deux surfaces  $u, v$  dont l'une sert de base au volume et passe par le point P, tandis que l'autre, située au-dessus, passe par le point P' :

$$PP' = \vec{dw}.$$

Pour la surface de base, le solide extérieur est situé du côté de la normale négative ; la force exercée sur le solide intérieur, au travers de la base, est donc :

$$(x. 15) \quad dF_{(uv)}^r = - \sum_k \Theta_{(P)}^{rk} d\sigma_{(uv)k}$$

l'indice  $r$  supérieur indique la composante de la force ; les indices  $(uv)$  rappellent de quelle face il s'agit ; l'indice  $k$  correspond aux diverses projections de cette face  $(uv)$  sur les surfaces coordonnées.

Pour la face supérieure, nous avons les mêmes composantes  $d\sigma_{(uv)k}$  puisque ces deux faces se déduisent l'une de l'autre par un transport parallèle ; mais le tenseur  $\Theta^{rk}$  pris en P' n'a plus les mêmes valeurs qu'au point P ; la variation vraie, absolue, de  $\Theta$  va être donnée par les dérivées covariantes, multipliées chacune par les composantes du vecteur  $\vec{dw}$ , qui sont :

$$\alpha_u^1 dw \quad \alpha_u^2 dw \quad \alpha_u^3 dw$$

comme au paragraphe 2 :

$$(x. 16) \quad \Theta^{rk}(P') = \Theta^{rk}(P) + \sum_k \frac{D\Theta^{rk}}{Dx^h} \alpha_u^h dw.$$

La force résultante, due à la somme des forces au travers des deux faces opposées, est :

$$(x. 17) \quad \delta F_{(uv)}^r = \sum_k [\Theta^{rk}(P') - \Theta^{rk}(P)] d\sigma_{(uv)k} = \sum_{h,k} \frac{D\Theta^{rk}}{Dx^h} \alpha_u^h dw d\sigma_{(uv)k}.$$

Recommençons le même calcul pour les deux autres paires de faces opposées et effectuons le total ; nous aurons la force résultante sur l'élément de volume :

$$\delta F^r = \delta F^r_{(uv)} + \delta F^r_{(vu)} + \delta F^r_{(ru)}.$$

En faisant cette sommation, nous retrouvons les expressions (x. 5), qui sont nulles, lorsque  $h$  diffère de  $k$ , et égales à  $d\tau$  pour  $h = k$  ; d'où le résultat :

$$(x. 18) \quad \delta F^r = \sum_k \frac{D\Theta^{rk}}{Dx^k} \cdot d\tau.$$

Le résultat est simple : dans le solide déformé, nous trouvons une *densité de forces*, dont les composantes contravariantes sont données par :

$$(x. 18 \text{ bis}) \quad \Phi^r = \sum_k \frac{D\Theta^{rk}}{Dx^k} \quad \delta F^r = \Phi^r \cdot d\tau.$$

Les forces  $\delta F^r$  sur un élément de volume  $d\tau$  forment bien un vecteur, puisqu'elles sont données par le produit d'une densité  $\Phi^r$  par une capacité  $d\tau$ . La formule (x. 18) exprime  $\Phi^r$  comme la divergence d'une densité tensorielle  $\Theta^{rk}$  ; mais cette divergence ne peut être, en général, écrite sans les dérivées covariantes. Nous avons étudié au chapitre IV, § 9 et au chapitre V, § 6 les cas de réduction des opérateurs divergence. C'est seulement pour une densité tensorielle antisymétrique, que la divergence peut être transcrite avec les dérivées ordinaires ; son expression détaillée est en effet (équ. v. 35) :

$$(x. 19) \quad \Phi^r = \sum_k \frac{D\Theta^{rk}}{Dx^k} = \sum_k \frac{\partial \Theta^{rk}}{\partial x^k} + \sum_{kh} \Theta^{kh} \Gamma^r_{kh}.$$

Le terme correctif en  $\Gamma^r_{kh}$  ne disparaît qu'en axes rectilignes, mais il faut en tenir compte si l'on utilise des coordonnées curvilignes.

## V. — Étude des déformations, en axes cartésiens.

Nous commencerons par rechercher, en axes cartésiens, la définition rigoureuse d'une déformation ; puis nous montrerons comment les résultats se généralisent en coordonnées curvilignes.

Prenons donc des axes rectilignes orthogonaux  $x^1 x^2 x^3$ , et considérons, dans le solide non déformé, deux points voisins P et P', dont les coordonnées sont  $x^i$  et  $x^i + dx^i$  ; le carré de leur distance est représenté par :

$$(x. 20) \quad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Les  $g_{ik}$  sont réduits au tableau :

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et nous pourrions, dans ces conditions, cesser de distinguer les composantes covariantes ou contravariantes d'un tenseur.

Supposons maintenant que chacun des points du solide soit soumis à un déplacement  $u$ , variable d'un point à un autre ; le point P (fig. x. 2) vient en Q :

$$(x. 21) \quad X' = x' + u'.$$

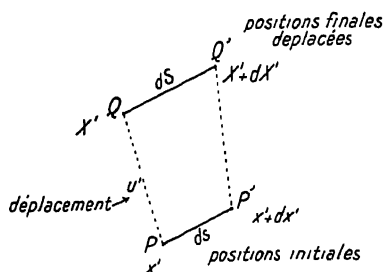


Fig. x. 2.

Le déplacement  $u'$  ne sera pas supposé infiniment petit ; il pourra avoir une grandeur tout à fait quelconque. Ces déplacements ont pour résultat un certain mouvement d'ensemble du corps solide, et une déformation de celui-ci ; ce sont ces termes de déformation que nous voulons isoler. *Le solide est déformé si la distance des deux points*

*voisins est modifiée* ; le carré de la distance  $PP'$  était  $ds^2$  (éq. x. 20) avant déformation ; le carré  $dS^2$  de la distance  $QQ'$  des deux points déplacés est :

$$(x. 22) \quad dS^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 = \sum_i (dX^i)^2.$$

Nous supposons que les déplacements  $u'$  soient des fonctions continues dérivables des coordonnées initiales  $x'$  ; nous pourrions donc poser :

$$(x. 23) \quad dX^i = dx^i + du^i = dx^i + \sum_k \frac{\partial u^i}{\partial x'^k} dx'^k$$

donc :

$$(x. 24) \quad dS^2 = ds^2 + \sum_{lk} \frac{\partial u^l}{\partial x'^k} dx^l dx^k + \sum_{lk} \frac{\partial u^l}{\partial x'^i} \frac{\partial u^i}{\partial x'^k} dx^l dx^k.$$

Dans cette formule, conformément à nos habitudes, nous supposons les sommations faites *indépendamment* sur tous les indices  $l, k$  et  $i$  ; un terme  $dx^l dx^k$  apparaît ainsi deux fois, pour  $l = 1, k = 2$  et  $k = 1, l = 2$  ; ce résultat se transcrit ainsi :

$$(x. 25) \quad \delta(ds^2) = dS^2 - ds^2 = \sum_{ik} e_{ik} dx^i dx^k$$

$$e_{ik} = \frac{\partial u^i}{\partial x'^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x'^i} + \sum_l \frac{\partial u^l}{\partial x'^i} \frac{\partial u^l}{\partial x'^k}$$

la substitution des  $e_{ik}$  dans la formule (x. 25) redonne bien (x. 24), sauf pour un changement de notation, l'indice muet  $i$  se remplaçant par  $l$ , dans le premier groupe de termes.

Lorsque les déplacements  $u$  sont donnés, l'ensemble des grandeurs  $e_{ik}$  forme un tenseur à deux indices, attaché au point Q du solide déformé, et rapporté aux coordonnées cartésiennes  $X'$  de ce point. Ce tenseur  $e_{ik}$  définit *la déformation* ; on y distingue :

$$(x. 26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{les dilatations} \quad e_{11} = 2 \frac{\partial u^1}{\partial x'^1} + \left( \frac{\partial u^1}{\partial x'^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^2}{\partial x'^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^3}{\partial x'^1} \right)^2 \\ \text{les glissements} \quad e_{12} = \frac{\partial u^1}{\partial x'^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x'^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x'^1} \frac{\partial u^1}{\partial x'^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x'^1} \frac{\partial u^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x'^1} \frac{\partial u^3}{\partial x'^2} \end{array} \right.$$

Ce tenseur est évidemment *symétrique*, de sorte qu'il comporte en réalité 6 composantes indépendantes.



Il est indispensable, si l'on veut obtenir un résultat général, de garder ces expressions au complet, avec les termes du second degré. Les formules sont ainsi rigoureuses ; si l'on n'étudie que de petites déformations, les dérivées partielles  $\frac{\partial u^i}{\partial x^j k}$  pourront être supposées infiniment petites du premier ordre, et l'on retrouvera les formules élémentaires :

$$(x. 27) \quad e_{11} = 2 \frac{\partial u^1}{\partial x^1} (= 2e_1) \quad e_{12} = \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1} (= e_6).$$

On emploie souvent, pour les 6 composantes de la déformation, les notations de Voigt ; elles ont l'inconvénient de présenter un facteur 2 qui les différencie des composantes du tenseur :

$$(x. 28) \quad \begin{cases} \text{tenseur de la déformation} & e_{11} & e_{22} & e_{33} & e_{23} & e_{31} & e_{12} \\ \text{notation W. Voigt} & 2e_1 & 2e_2 & 2e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{cases}$$

Nous avons, jusqu'ici, envisagé les coordonnées  $X^i$  d'un point du corps déformé, rapporté aux axes orthogonaux invariables. Nous pouvons essayer de procéder autrement et de repérer un point du corps déformé au moyen des coordonnées  $x^i$  qui définissaient la position initiale du point, avant la déformation. Cela revient à choisir, dans le corps déformé, de nouvelles surfaces coordonnées  $X^i$  qui seront *curvilignes* ; ces surfaces se déduiraient des plans rectangulaires initiaux, en les supposant entraînés par le solide dans son mouvement et déformés avec lui ; dans ces axes curvilignes déformés les coordonnées d'un point garderaient numériquement les mêmes valeurs :

$$(x. 29) \quad X^i = x^i.$$

Le changement de coordonnées, pour le corps déformé, se ferait donc suivant les formules suivantes, qui permettent de passer des axes rigides  $X^i$  aux axes déformés  $\bar{X}^i$  :

$$(x. 30) \quad dX^r = \sum_i a_i^r dx^i = \sum_i a_i^r d\bar{X}^i$$

avec les coefficients :

$$a_i^r = \delta_i^r + \frac{\partial u^r}{\partial x^i} = \begin{cases} 1 + \frac{\partial u^r}{\partial x^i} & \text{si } r = i \\ \frac{\partial u^r}{\partial x^i} & \text{si } r \neq i \end{cases}$$

Dans ces axes curvilignes, entraînés par le solide au cours de sa déformation, le carré de la distance de deux points voisins est :

$$(x. 31) \quad d\bar{S}^2 = \sum_{ik} h_{ik} dx^i dx^k = \sum_{ik} h_{ik} d\bar{X}^i d\bar{X}^k$$

avec :

$$h_{ik} = \delta_{ik} + e_{ik}$$

ce résultat s'obtient directement par application de la formule (x. 25).

Nous allons, sur cette expression, retrouver la signification géométrique des composantes de la déformation ; nous avons en effet précisé au chapi-

tre VI, § 4, le sens des coefficients  $g_{ik}$  du tenseur métrique; en un point de l'espace, nous avons des unités de longueurs  $l_i$  suivant les différents axes et des angles  $\theta_{ik}$  entre ces axes, qui ne sont pas en général orthogonaux; nous trouvons (p. 101) :

$$(x. 32) \quad g_{ii} = l_i^2 \quad g_{ik} = l_i l_k \cos \theta_{ik}.$$

Appliquons ces résultats aux coordonnées curvilignes  $\bar{X}'$ , dont le tenseur métrique est  $h_{ik}$  :

$$(x. 33) \quad h_{ii} = l_i^2 = 1 + e_{ii} \quad h_{ik} = l_i l_k \cos \theta_{ik} = e_{ik}.$$

Avant la déformation, nous étions en axes cartésiens, orthogonaux, avec une unité de longueur commune aux trois axes :

$$l_1 = l_2 = l_3 = 1.$$

Après déformation, nous avons donc des variations de longueur des segments qui primitivement étaient égaux à 1 et dirigés suivant les axes :

$$(x. 34) \quad \Delta l_1 = \sqrt{1 + e_{11}} - 1$$

et les angles  $\theta_{ik}$  ne sont plus droits. Limitons-nous maintenant au cas d'une très petite déformation; les formules réduites (x. 27) seront suffisantes et nous aurons :

$$(x. 35) \quad \Delta l_1 \approx \frac{1}{2} e_{11} = e_1 = \frac{\partial u^1}{\partial x^1};$$

la *dilatation* suivant l'axe numéro 1 se trouvera donc donnée par  $e_1$  et c'est bien ainsi qu'on définit ordinairement cette grandeur pour les très petites déformations.

Pour les cosinus des angles, nous trouverons :

$$(x. 36) \quad l_1 l_2 \cos \theta_{12} \approx \cos \theta_{12} = e_{12} = \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1}$$

ce qui correspond bien à la définition élémentaire <sup>(1)</sup> des glissements :

$$\theta_{12} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{12} \quad \alpha_{12} \approx e_{12}.$$

Nous aurons intérêt, suivant les cas, à supposer le corps déformé rapporté tantôt aux axes orthogonaux rigides ( $X^*$ ) et tantôt aux axes entraînés curvilignes ( $\bar{X}'$ ); les formules de transformation (x. 30) nous permettent d'écrire immédiatement le passage du premier au second système de composantes,

<sup>(1)</sup> G. BRUHAT. *Cours de mécanique physique*. Masson et Co, Paris, 1934, p. 675. — Les notations se correspondent ainsi :

Bruhat :	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$ ;	$g_1$	$g_2$	$g_3$ ;	$\frac{\pi}{2} - \alpha_{21}$ .
Brillouin :	$\frac{1}{2} e_{11}$	$\frac{1}{2} e_{22}$	$\frac{1}{2} e_{33}$ ;	$\frac{1}{2} e_{21}$	$\frac{1}{2} e_{31}$	$\frac{1}{2} e_{12}$ ;	$\theta_{21}$ .

pour un tenseur quelconque ; par exemple, suivant qu'il s'agira de tenseurs contravariants ou covariants :

$$(x. 37) \quad \begin{aligned} T^{rs} &= \sum_{ij} a_i^r a_j^s \bar{T}^{ij} \\ \bar{T}_{ij} &= \sum_{rs} a_i^r a_j^s T_{rs}. \end{aligned}$$

Nous retrouverons plus loin diverses formules de ce type.

Signalons un fait important : on ne peut pas avoir, dans un solide, une répartition complètement arbitraire des déformations. Prenons le cas des petites déformations (x. 27), nous trouvons les relations :

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

et les deux autres de même type ; ces formules sont utiles à se rappeler car elles établissent une liaison entre les répartitions possibles des déformations, et par suite des tensions <sup>(1)</sup>.

## VI. — Les déformations, définition générale.

Les raisonnements que nous venons de faire, en axes cartésiens, se transcrivent sans trop de difficultés pour des coordonnées quelconques. Prenons un solide au repos, rapporté à des axes  $k(x^1, x^2, x^3)$ , considérons deux points voisins  $P(x^1, x^2, x^3)$  et  $P'(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ . Le carré de leur distance est donné par la forme quadratique :

$$(x. 38) \quad ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j.$$

Supposons maintenant le corps soumis à une déformation ; les points  $P$  et  $P'$  du solide viennent occuper des positions différentes,  $Q$  et  $Q'$  ; prenons les coordonnées  $X$  du point  $Q$  et  $X' + dX'$  de  $Q'$ , par rapport au système d'axes  $k$ , dont je suppose essentiellement qu'il est resté invariable pendant la déformation. Le carré de la distance  $QQ'$  est maintenant :

$$(x. 39) \quad dS^2 = \sum g_{RS} dX^R dX^S.$$

la notation  $g_{RS}$  indiquant qu'il s'agit des valeurs des  $g$  prises au point  $Q(X')$  et non pas en  $P(x')$ .

Pour définir la déformation en tout point, nous devons nous donner  $X^1, X^2, X^3$  comme fonctions des  $x^1, x^2, x^3$  ; nous pouvons alors développer la formule (x. 39) et écrire :

$$(x. 40) \quad dS^2 = \sum g_{RS} a_i^R a_j^S dx^i dx^j = \sum h_{ij} dx^i dx^j.$$

en posant :

$$a_i^R = \frac{\partial X^R}{\partial x^i} \quad dX^R = \sum a_i^R dx^i.$$

<sup>(1)</sup> Voir par exemple M. v. LAUE, *Sitz. ber. der Preuss. Akad.*, t. 21, 1931, p. 377.

Pour éviter toute confusion, il faut se rappeler que ces formules ne représentent pas un changement de coordonnées, mais un déplacement du corps solide par rapport à un système de coordonnées rigides.

Par la manière même dont nous les avons formés, nous voyons que les coefficients  $h_{ij}$  forment un tenseur deux fois covariant lorsque la loi de déformation a été donnée; nous obtenons le tenseur de la déformation en prenant la différence :

$$(x. 41) \quad e_{ij} = h_{ij} - g_{ij}.$$

La méthode suivie est semblable à celle employée pour le cas des coordonnées rectilignes rectangulaires, la correspondance des notations est complète.

Nous devons maintenant chercher à expliciter les expressions générales (x. 41) qui définissent la déformation; pour cela introduisons le déplacement  $u^i$  d'un point du corps solide, en posant :

$$(x. 42) \quad X^i = x^i + u^i.$$

Notons aussitôt que  $u^i$  n'est un tenseur covariant que si la déformation est infiniment petite; les  $a_i^n$  ne forment pas un tenseur. Nous obtenons pour ces derniers coefficients, les valeurs suivantes :

$$a_i^n = \begin{cases} 1 + \frac{\partial u^r}{\partial x^i} & (r = i), \\ \frac{\partial u^r}{\partial x^i} & (r \neq i). \end{cases}$$

Dans l'expression des  $e_{ij}$ , il faut donc distinguer les termes particuliers pour lesquels les deux indices d'un coefficient  $a$  deviennent égaux; ceci permet d'écrire :

$$(x. 43) \quad e_{ij} = \Sigma a_i^n a_j^s g_{rs} - g_{ij} = g_{ij} - g_{ij} + \Sigma \frac{\partial u^s}{\partial x^j} g_{is} + \Sigma \frac{\partial u^r}{\partial x^i} g_{jr} + \Sigma \frac{\partial u^r}{\partial x^i} \frac{\partial u^s}{\partial x^j} g_{rs};$$

les termes exceptionnels écrits en premier lieu proviennent des cas  $r = i$  et  $s = j$ . Nous allons développer cette expression, en gardant les termes du premier et du second ordre; nous aurons, par un développement en série de Taylor :

$$g_{rs} = g_{rs} + \Sigma \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^p} u^p + \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x^p \partial x^q} u^p u^q \dots$$

d'où nous tirons :

$$\begin{aligned} e_{ij} = & \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} u^p + \frac{\partial u^s}{\partial x^j} g_{is} + \frac{\partial u^r}{\partial x^i} g_{jr} \\ & + \frac{\partial u^r}{\partial x^i} \frac{\partial u^s}{\partial x^j} g_{rs} + \frac{\partial u^r}{\partial x^i} u^p \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^p} + \frac{\partial u^s}{\partial x^j} u^p \frac{\partial g_{si}}{\partial x^p} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^p \partial x^q} u^p u^q + \dots \end{aligned}$$

Dans cette formule, comme dans la suivante, on n'a pas écrit les signes  $\Sigma$ ; il faut sommer par rapport à tous les indices répétés haut et bas.

Les termes du premier degré, groupés sur la première ligne, se transcrivent sans peine sous la forme :

$$(x. 44) \quad e_{ij} = \frac{Du_i}{Dx^j} + \frac{Du_j}{Dx^i} \quad (\text{très petite déformation}).$$

Nous pouvons ainsi, après quelques calculs simples, arriver à la forme suivante :

$$(x. 45) \quad e_{ij} = \frac{Du_i}{Dx^j} + \frac{Du^j}{Dx^i} + g_{rs} \frac{Du^r}{Dx^i} \frac{Du^s}{Dx^j} + \\ u^p \Gamma_{ip}^r \left[ g_{ir} \frac{\partial u^s}{\partial x^j} + g_{jr} \frac{\partial u^s}{\partial x^i} \right] + u^p u^q \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^p \partial x^q} - g_{rs} \Gamma_{ip}^r \Gamma_{jq}^s \right] + \dots$$

La seconde ligne, et tous les termes d'ordre supérieur (que nous n'avons pas écrits) disparaissent si l'espace est euclidien et si l'on prend des axes rectilignes, car toutes les dérivées des  $g$  et les  $\Gamma$  sont alors nuls; on retrouve alors les formules du paragraphe précédent.

La valeur globale de la déformation  $e_{ij}$ , donnée par la formule (x. 45), est assez difficile à discuter, mais on peut s'arranger pour tout ramener à la formule plus simple (x. 44) des petites déformations; le point que nous voulons démontrer est le suivant <sup>(1)</sup>: si l'on prend un corps déjà déformé, et qu'on fasse une nouvelle déformation supplémentaire, infiniment petite; si l'on mesure les nouveaux déplacements  $\delta u$  dans le système des axes  $\bar{K}$  entraînés et déformés par toute la déformation précédente, alors les variations du tenseur de la déformation sont données par une formule simple, du type (x. 44) :

$$(x. 46) \quad \delta e_{ij} = \frac{D\delta u_i}{D\bar{X}^j} + \frac{D\delta u_j}{D\bar{X}^i}.$$

Nous démontrerons cette formule, très importante pour la suite :

Considérons un corps qui a subi une première déformation; deux points, voisins, de coordonnées initiales  $x^i$  et  $x^i + dx^i$  sont venus occuper de nouvelles positions  $X^i$  et  $X^i + dX^i$ . Le carré de leur distance a pour valeur, après cette déformation :

$$dS^2 = \Sigma g_{RK} dx^R dx^K,$$

suivant notre formule (x. 39); supposons que nous effectuions une très petite variation de la déformation: les coordonnées  $X^i$  sont augmentées de  $\delta X^i = \delta u^i$ ; celles du point  $X^i + dX^i$  deviennent  $X^i + dX^i + d\delta u^i$ ; le  $dS^2$  subit alors une variation :

$$\delta dS^2 = \Sigma (g_{RK} dX^R d\delta u^K + g_{RK} dX^K d\delta u^R + \delta g_{RK} dX^R dX^K)$$

ou, en changeant la dénomination des indices muets des deux derniers termes ( $R \rightarrow l$ ,  $K \rightarrow s$  au 2<sup>e</sup> terme;  $K \rightarrow s$  au 3<sup>e</sup> terme) :

$$\delta dS^2 = \Sigma \left\{ g_{RK} \frac{\partial \delta u^K}{\partial X^s} + g_{sL} \frac{\partial \delta u^l}{\partial X^r} + \frac{\partial g_{RS}}{\partial X^p} \delta u^p \right\} dX^r dX^s;$$

ceci s'écrit encore, moyennant quelques transformations simples :

$$(x. 47) \quad \delta dS^2 = \Sigma \left\{ \frac{D\delta u_i}{DX^s} + \frac{D\delta u_s}{DX^r} \right\} dX^r dX^s.$$

Mais nous pouvons aussi exprimer le  $dS^2$  au moyen des  $dx$  en utilisant la

<sup>(1)</sup> L. BRILLOUIN, *Proc. International Math. Congress*, Toronto, 1924, vol. 2, p. 73. — Y. DUPONT, *Acad. roy. Belgique*, t. 17, 1931, p. 441; *C. R.*, 1931, p. 873.

formule (x. 40) ; lors d'une variation de la déformation, les  $dx'$  restent inchangés, et nous obtenons :

$$(x. 48) \quad \delta dS^2 = \Sigma \delta h_{ij} dx' dx^j = \Sigma \delta e_{ij} dx' dx^j.$$

Comparons les expressions (x. 48) et (x. 47), et nous en tirons aussitôt :

$$(x. 49) \quad \delta e_{ij} = \Sigma \left\{ \frac{D \delta u_r}{D X^r} + \frac{D \delta u_s}{D X^r} \right\} a_i^r a_j^s,$$

les coefficients  $a_i^r$  sont, comme précédemment, les dérivées  $\frac{\partial X^r}{\partial x^i}$ . Cette formule sera très utile par la suite ; nous allons voir comment elle peut s'interpréter.

Nous avons, jusqu'à présent, toujours envisagé les coordonnées  $X'$  d'un point du corps déformé, rapportées aux axes  $k$  invariables. Nous pouvons procéder autrement et définir un point du corps déformé par les trois nombres  $x^1, x^2, x^3$ , qui donnaient sa position à l'état initial ; nous choisissons ainsi dans le corps déformé, de nouvelles surfaces coordonnées, formant un système d'axes  $\bar{K}$ , et par rapport auxquelles les coordonnées d'un point sont numériquement égales à  $x^1, x^2, x^3$  ; ce système d'axes  $\bar{K}$  est celui qui se déduit des axes initiaux  $k$  en les supposant entraînés par le corps et déformés avec lui. Pour ces axes  $\bar{K}$ , nous aurons donc :

$$(x. 50) \quad \bar{X}^i = x^i, \quad d\bar{S}^2 = \Sigma h_{ij} dx' dx^j = \Sigma h_{ij} d\bar{X}^i d\bar{X}^j.$$

Le changement de coordonnées se fait alors suivant les formules :

$$(x. 51) \quad dX^r = \Sigma a_i^r dx^i = \Sigma a_i^r d\bar{X}^i,$$

et un tenseur  $t_{ij}$ , se transforme ainsi :

$$(x. 52) \quad \bar{t}_{ij} = \Sigma a_i^r a_j^s t^{rs}.$$

Comparons les formules (x. 49) et (x. 52) et nous arrivons à la relation (x. 46) que nous avons annoncée.

Ces formules représentent la généralisation, pour axes curvilignes, des expressions données au paragraphe 5 en axes cartésiens.

## VII. — Corps isotrope. Invariants de la déformation.

Lorsqu'on considère un corps initialement homogène et isotrope, il est intéressant de chercher quelles sont les combinaisons invariantes (par rapport à des changements d'axes) que l'on peut former avec les composantes du tenseur de déformation ; ces invariants devront seuls figurer dans l'expression de l'énergie potentielle, par exemple. Les notations tensorielles nous montrent immédiatement que les combinaisons suivantes sont invariantes ; elles s'écrivent au moyen des composantes mixtes :

$$e_i^k = \Sigma e_{ij} g^{kj}.$$

Nous aurons :

$$(x. 53) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Invariant du 1<sup>er</sup> degré} & I_1 = \sum_i e_i' = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \\ \text{Invariant du 2<sup>e</sup> degré} & I_2 = \sum_{ik} e_i^k e_k' \\ \text{Invariant du 3<sup>e</sup> degré} & I_3 = \sum_{ikl} e_i^k e_k^l e_l' \\ \text{etc...} \end{array} \right.$$

Comme autre invariant du 2<sup>e</sup> degré, nous aurons aussi  $I_1^2$ ; et au 3<sup>e</sup> degré nous trouverons  $I_1^3$  et  $I_1 I_2$ , etc...

Ecrivons complètement les expressions de  $I_2$  et  $I_3$ , qui nous seront de grande utilité :

$$(x. 54) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_2 = \sum_{ik} e_i^k e_k' = e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{12}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{31}^2 \\ I_3 = \sum_{ikl} e_i^k e_k^l e_l' = e_{11}^3 + e_{22}^3 + e_{33}^3 + 3e_{11}(e_{12}^2 + e_{13}^2) + 3e_{22}(e_{21}^2 + e_{23}^2) \\ \quad + 3e_{33}(e_{31}^2 + e_{32}^2) + 6e_{12}e_{23}e_{31}. \end{array} \right.$$

Nous avons supposé, dans ces développements, des axes cartésiens orthogonaux, de façon que les composantes co, contravariantes, ou mixtes soient toutes égales entre elles; les développements sont obtenus en tenant compte de ce qu'un coefficient  $e_{12}$ , par exemple, intervient plusieurs fois dans les sommes (x. 53), puisque  $e_{12}$  et  $e_{21}$  sont égaux.

Aucun de ces invariants ne donne la variation de volume. Celle-ci s'obtient le plus aisément au moyen du déterminant fonctionnel :

$$(x. 55) \quad \Delta = \frac{D(X_1 X_2 X_3)}{D(x^1, x^2, x^3)} = |a_i^r| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^1} & \frac{\partial u^3}{\partial x^2} & 1 + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

en première approximation, ce déterminant est égal à :

$$1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \approx 1 + \frac{1}{2} I_1$$

mais nous ne devons pas nous contenter de ce résultat, puisque nous cherchons à établir partout des formules rigoureuses. Le volume initial était :

$$dv = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3;$$

le volume final s'écrit, dans les axes entraînés et déformés  $X' = x'$  :

$$dv' = \sqrt{h} d\bar{X}^1 d\bar{X}^2 d\bar{X}^3 = \sqrt{h} dx^1 dx^2 dx^3$$

et nous avons la formule :

$$(x. 56) \quad \Delta = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}}$$

qui représente un cas particulier du résultat général (vi. 60). Nous avons d'autre part, d'après (x. 41) :

$$h_{ij} = g_{ij} + e_{ij}$$

ce qui permet de former l'expression du déterminant  $h$  ; nous ne ferons le calcul que pour des axes cartésiens orthogonaux ; où les formules se simplifient ainsi :

$$(x. 57) \quad |g| = 1$$

$$\Delta^2 = |h_{ij}| = |\delta_{ij} + e_{ij}| = \begin{vmatrix} 1+e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 1+e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 1+e_{33} \end{vmatrix} = 1 + I_1 + \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2) - \frac{I_1 I_2}{2} + \frac{I_1^3}{6} + \frac{I_3}{3}$$

Nous obtenons donc  $\Delta^2$  en fonction des invariants  $I$  de la déformation, et nous en tirons, en prenant la racine carrée, un développement approché :

$$(x. 58) \quad \Delta = 1 + \frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{4} + \frac{I_1^2}{8} + \dots$$

L'expression (x. 57) est rigoureuse et (x. 58) ne représente qu'une première approximation. On voit qu'il ne faut pas confondre l'invariant  $I_1$  avec le double de la dilatation cubique ( $\Delta - 1$ ) ; la variation relative de volume est :

$$(x. 59) \quad \frac{\delta v}{v} = \Delta - 1 = \frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{4} + \frac{I_1^2}{8} \dots$$

### VIII. — Définition d'une densité d'énergie potentielle pour un solide déformé.

Les principes de la thermodynamique permettent de définir l'énergie d'un corps donné, comme fonction des variables mécaniques (déformations) et de la température ; appelons, en effet,  $d\mathfrak{A}_e$  le travail des forces extérieures,  $dQ$  la chaleur fournie,  $dE_{cin}$  la variation de l'énergie cinétique totale du corps lors d'une transformation infiniment petite.

Nous avons :

$$dQ + d\mathfrak{A}_e = dE_{cin} + dU,$$

$U$  étant l'énergie interne du solide considéré.

L'énergie  $E_{cin}$  est celle qui correspond au mouvement d'ensemble du corps solide ; l'énergie d'agitation thermique est comptée dans  $U$ .

D'autre part, le second principe nous donne, pour une transformation réversible :

$$dQ - TdS = 0,$$

$S$  étant l'entropie du corps étudié ; nous en déduisons les relations suivantes :

$$(x. 60) \quad dU - TdS = d\mathfrak{A}_e - dE_{cin},$$

$$(x. 61) \quad d(U - TS) + SdT = d\mathfrak{A}_e - dE_{cin}.$$



Nous voyons que nous pouvons éliminer la variable température dans les deux cas suivants :

**1° Transformations adiabatiques.** — Le corps est supposé isolé thermiquement, de telle sorte qu'il ne puisse échanger d'énergie avec l'extérieur. Ce cas se réalise pratiquement si l'on étudie des mouvements vibratoires rapides, tels que les échanges de chaleur n'aient pas le temps de produire et d'égaliser les températures. On emploiera la relation (x. 60), avec  $dS = 0$  ; on voit alors que la fonction  $U$  joue le rôle d'une énergie potentielle pour le corps solide ; en décomposant le corps en petits éléments de volume, on pourra définir la *densité d'énergie*  $\mathcal{E}$  qui satisfera à la condition :

$$(x \ 62) \quad U = \int_v \mathcal{E} d\tau,$$

les coordonnées utilisées ici sont naturellement les *coordonnées entraînées* par le corps solide dans ses mouvements de telle sorte que les limites d'intégration, dans la formule (x. 62) soient fixes et ne dépendent pas des déformations. L'expression  $\mathcal{E}$  représente l'énergie du système déformé, *rapportée à un volume initial  $v_0$  unité*.

**2° Transformations isothermes.** — Le corps est supposé plongé dans une enceinte à température constante ; les mouvements doivent être assez lents pour que les échanges de chaleur entre le corps et le thermostat aient toujours le temps d'intervenir pour uniformiser la température. On utilise alors la relation (x. 61) avec  $dT = 0$ , et l'on voit que la fonction  $U - TS$  (potentiel thermodynamique) joue le rôle d'énergie potentielle ; on définira une *densité d'énergie*  $\eta$  par la condition :

$$(x \ 63) \quad U - TS = \int_v \eta d\tau,$$

en coordonnées entraînées.

On voit que, dans l'un et l'autre de ces deux cas, il est possible de définir une densité  $\mathcal{E}$  ou  $\eta$  ; ces deux grandeurs jouant, pour la suite des calculs, exactement de même rôle, nous ne les distinguerons pas plus loin, et nous parlerons d'une *densité d'énergie*  $\mathcal{E}$ .

Pour obtenir les lois de l'élasticité, il nous reste une dernière étape à franchir, en indiquant la manière dont la densité d'énergie s'exprime en fonction des déformations. Nous ne pourrions, sur ce point, que procéder par approximations, et former un développement en série, valable pour de petites déformations à partir d'un état initial donné.

Le choix de cet état initial est souvent trop complètement précisé : on fait l'hypothèse que l'état initial est l'état naturel du corps solide, lorsqu'il n'est soumis à aucun effort extérieur.

Cette restriction n'est pas heureuse, car elle limite beaucoup les applications des formules que l'on établit ainsi. Nous préférons supposer, comme l'a fait H. Poincaré <sup>(1)</sup>, que l'état initial est un état quelconque, naturel ou déformé.

<sup>(1)</sup> H. POINCARÉ. *Leçons sur la théorie de l'Elasticité*, Carré, Paris, 1892. — E. et F. COSSERAT. Sur la théorie de l'Elasticité. *Annales Fac. Sc. Toulouse*, t. 10 (1896), p. 11. — L. BRILLOUIN. Congrès, Toronto, 1924, *loc. cit.*

Nous aurons alors à distinguer deux catégories de forces extérieures :

I. Les *forces extérieures continues*, qui donnent la déformation initiale du corps solide, et qui sont supposées agir de manière permanente sur le solide.

II. Les *forces extérieures accidentelles*, qui peuvent venir provoquer des surcroîts de déformation à partir de l'état initial du solide (déformé par les forces continues du premier groupe).

Nous établirons, pour la *densité d'énergie interne* élastique du solide, comptée à partir de l'état initial que nous venons de définir, un développement par rapport aux déformations ; ce développement comprendra des termes  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots$ , homogènes et de degrés 0, 1, 2, 3... par rapport aux déformations ; limitons-nous, pour le moment, aux termes du second degré :

$$(x. 64) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \dots = \mathcal{E}_0 + \sum_{ij} \Omega^{ij} e_{ij} + \sum_{ij, hk} \Lambda^{ij, hk} e_{ij} e_{hk} + \dots$$

Les *termes linéaires*  $\mathcal{E}_1$  groupés sous la somme  $\sum_{ij} \Omega^{ij} e_{ij}$  n'existent que si, dans l'état initial, le corps est déjà soumis à des efforts extérieurs, c'est-à-dire si le groupe I de forces extérieures continues n'est pas nul. En effet, lorsque ces forces extérieures I sont nulles, la densité d'énergie  $\mathcal{E}$  doit débiter par des termes du second degré ; tout écart, positif ou négatif ( $e_{ij} > 0$  ou  $< 0$ ) à partir de l'état d'équilibre initial doit s'accompagner d'une augmentation de l'énergie potentielle interne, pour que l'état initial soit stable.

Les coefficients  $\Omega^{ij}$  forment, par leur définition même, une *densité tensorielle*, car multipliés par les éléments  $e_{ij}$  (tenseur) ils doivent donner une densité scalaire  $\mathcal{E}$  ; puisque les  $e_{ij}$  sont symétriques en  $ij$ , nous prendrons aussi les  $\Omega^{ij}$  symétriques ; cela ne diminue en rien la généralité, car la partie antisymétrique ne jouerait aucun rôle.

De même, les coefficients  $\Lambda^{ij, hk}$  forment une densité tensorielle, symétrique en  $ij$ , en  $hk$  et pour l'échange des deux groupes d'indices :

$$(x. 65) \quad \Lambda^{ij, hk} = \Lambda^{hk, ij}.$$

Les *forces extérieures continues* du *groupe I* pourront être supposées dériver d'une énergie potentielle particulière, l'énergie du système mécanique provoquant la déformation permanente. Nous rapporterons cette énergie à l'unité de volume initial du solide et nous obtiendrons une densité d'énergie  $H$  qui se développera comme la précédente par rapport aux déformations du solide :

$$(x. 66) \quad H = H_0 + H_1 + H_2 \dots = H_0 + \sum_{ij} \Omega_1^{ij} e_{ij} + \sum_{ij, hk} \Lambda_1^{ij, hk} e_{ij} e_{hk} \dots$$

Prenons un exemple ; supposons le solide plongé dans un liquide qui exerce sur lui une pression hydrostatique uniforme  $p$  ; admettons que cette pression reste constante, quelle que soit la déformation supplémentaire infligée au solide, par des forces accidentelles du groupe II. Ce cas sera réalisé (fig. x. 3) si le solide est plongé dans un grand volume de liquide, à la pression  $p$  ; l'énergie totale due à cette pression sera  $pV$ , en appelant  $V$  le volume total du solide. Nous pourrions alors écrire une *densité d'énergie*  $H$  de la forme :

$$(x. 67) \quad H = pv = p[1 + \delta v] \quad v = 1 + \delta v$$

$v$ , volume qu'occupe, après une déformation supplémentaire, une portion

solide dont le volume initial est 1 (sous l'influence de la pression  $p$ , seule représentante des forces du type I).

En utilisant le développement (x. 59), nous exprimerons  $\delta v$  en fonction des invariants de la déformation (supplémentaire) :

$$(x. 68) \quad H = p \left[ 1 + \frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{4} + \frac{I_1^2}{8} \dots \right].$$

Il nous faut exprimer maintenant la *stabilité de l'état initial* ; si nous provoquons une petite déformation supplémentaire  $e_{ij}$ , de signe quelconque, l'ensemble  $\mathcal{E} + H$  des énergies du solide et des forces extérieures continues du groupe I doit augmenter ; cet ensemble ne doit donc contenir que des termes du 2<sup>e</sup> degré ; les termes du premier degré de  $\mathcal{E}$  et  $H$  doivent se compenser exactement :

$$(x. 69) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} + H &= \mathcal{E}_0 + H_0 + \mathcal{E}_2 + H_2 + \dots \\ \mathcal{E}_1 + H_1 &= 0 \\ \Omega^i_j &= -\Omega^j_i. \end{aligned}$$

Reprenons l'exemple du solide soumis à une pression hydrostatique constante  $p$  ; la condition ci-dessus nous donne, en axes cartésiens rectangulaires :

$$(x. 70) \quad \Omega^i_j = -\Omega^j_i = \begin{vmatrix} -\frac{p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{2} \end{vmatrix}$$

puisque les termes du premier degré  $H_1$  des forces extérieures sont (x. 68) :

$$H_1 = \frac{p}{2} I_1 = \frac{p}{2} (e_{11} + e_{22} + e_{33}).$$

La pression  $p$  est équilibrée, pour ce qui concerne les termes du premier degré, par la réaction du solide ; mais elle joue encore un rôle dans les termes du second degré, car l'ensemble de ces termes est :

$$(x. 71) \quad \mathcal{E}_2 + H_2 = \sum_{i,j,h,k} \Lambda^{ij,hk} e_{ij} e_{hk} + p \left[ -\frac{I_2}{4} + \frac{I_1^2}{8} \right].$$

Lorsqu'on mesurera les forces nécessaires pour provoquer des déformations ultérieures du solide, ce ne sont pas les coefficients  $\Lambda$  du solide seul que l'on obtiendra, mais les  $\Lambda$  augmentés ou diminués de  $kp$  ( $k$  coefficient numérique), bref l'ensemble  $\mathcal{E}_2 + H_2$  et non pas  $\mathcal{E}_2$  seul.

Si le solide est soumis à une pression qui dépende de son volume (s'il est par exemple enfermé dans un récipient à peine plus grand que lui, sur la figure x. 3), les termes du second degré  $H_2$  n'auront plus la forme simple (x. 71) et les mesures seront très difficiles à interpréter.

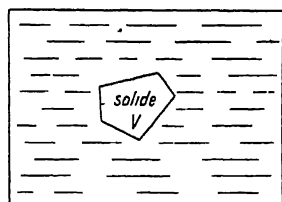


Fig. x. 3. — Récipient contenant un liquide à la pression  $p$ .

Dans le cas le plus général, nous aurons 6 coefficients  $\Omega^{\nu}$  distincts pour définir les efforts initiaux; leur nombre est celui des composantes d'un tenseur double symétrique, ce qui nous donne 6 composantes distinctes. Nous devons faire ici une remarque importante, qui justifie le mode de définition que nous avons choisi (§§ 5, 6) pour les déformations; nous insistons sur la nécessité de garder dans le développement du tenseur de déformation [formules (x. 26 et 45)] tous les termes nécessaires, d'ordre supérieur au premier; il est facile de voir que, si nous développons la densité d'énergie jusqu'aux termes d'ordre  $n$  par rapport aux déformations [ $n = 2$  dans la formule (x. 69)] il faudra, dans les termes linéaires, par rapport aux déformations, écrire les déformations en les développant jusqu'aux termes d'ordre  $n$  par rapport aux déplacements  $u$  ou à leurs dérivées. En particulier, si nous ne voulons pas négliger des termes du même ordre que ceux gardés autre part, il est indispensable, dans la formule (x. 69), de prendre les expressions des déformations jusqu'aux termes du 2<sup>e</sup> degré en  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

### IX. — Les coefficients d'élasticité; coefficients de Voigt; notations de Lamé; relations de Cauchy.

Les termes du second degré, par rapport aux déformations, groupés sous la forme  $\Lambda^{ij,hk} e_{ij} e_{hk}$  correspondent à des efforts proportionnels aux déformations, ces dernières étant comptées à partir de l'état initial; c'est le cas des petites déformations et de la loi de Hooke. Pour des corps cristallisés, ou pour des corps soumis initialement à des efforts quelconques, il y aura un nombre élevé de coefficients distincts; la densité tensorielle  $\Lambda^{ij,hk}$  ne se trouve alors soumise qu'aux conditions de symétrie pour les deux groupes d'indices,  $ij$  d'une part et  $hk$  de l'autre, puis à une symétrie supplémentaire du groupe  $ij$  vis-à-vis du groupe  $hk$ .

Voici ces conditions :

$$(x. 68) \quad \begin{aligned} \Lambda^{ij,hk} &= \Lambda^{ji,hk} = \Lambda^{ij,kh} = \Lambda^{ji,kh} \\ &= \Lambda^{hk,ij} = \Lambda^{kh,ji} = \Lambda^{hk,jl} = \Lambda^{kh,jl}. \end{aligned}$$

Suivant que certains indices  $i, j, h, k$  seront égaux ou différents, le nombre des coefficients égaux pourra être 1, 2, 4 ou 8 au complet.

Exemple :

	$ij, hk = 11, 11$	pas de réduction.	
(x. 72)	$ij, hk = 11, 22$	2 coefficients égaux	$11, 22$ et $22, 11$ .
	$ij, hk = 11, 23$	4 coefficients égaux	$11, 23$ ; $11, 32$ ; $23, 11$ ; $32, 11$ .
	$ij, hk = 12, 13$	8 coefficients égaux	$12, 13$ ; $21, 13$ , etc.

Il n'est pas très commode, dans ces conditions, de compter le nombre exact de coefficients  $\Lambda$  indépendants; nous y arriverons plus directement en remarquant qu'il y a 6 composantes indépendantes  $e_{ij}$  de la déformation; l'ensem-

ble des termes que nous étudions forme un polynôme homogène du 2 par rapport à ces 6 grandeurs et comporte donc :

$$\frac{6(6+1)}{2} = 21$$

coefficients indépendants. Pour ceux-ci, l'usage est établi d'utiliser une notation avec un nombre réduit d'indices ; la plus répandue est celle de Voigt <sup>(1)</sup>, que nous avons rappelée en (x. 28) ; on suppose en outre, lorsqu'on donne les valeurs de ces coefficients, des axes cartésiens orthogonaux.

Au lieu des composantes  $e_{ij}$  de la déformation, nous écrirons des  $e$  à un seul indice :

(x. 28)	$e_{11}$	$e_{22}$	$e_{33}$	$e_{23}$	$e_{31}$	$e_{12}$	tensoriel
sont notés :	$2e_1$	$2e_2$	$2e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	Voigt

de sorte que le tenseur de la déformation a l'aspect suivant :

$$\begin{array}{ccc} 2e_1 & e_6 & e_5 \\ e_6 & 2e_2 & e_4 \\ e_5 & e_4 & 2e_3 \end{array}$$

Notre ensemble de termes du 2<sup>e</sup> degré par rapport aux déformations pourra s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \text{(x. 73)} \quad \mathcal{E}_2 &= \sum_{ijhk}^3 \Lambda^{ij,hk} e_{ij} e_{hk} = \frac{1}{2} \sum_{r,s}^6 c_{rs} e_r e_s \\ &= \frac{1}{2} (c_{11} e_1^2 + c_{22} e_2^2 + c_{33} e_3^2 \dots + c_{66} e_6^2) \\ &\quad + c_{12} e_1 e_2 + c_{13} e_1 e_3 \dots + c_{56} e_5 e_6. \end{aligned}$$

Les indices  $i, j, h, k$  ne variaient que de 1 à 3 ; dans notre nouvelle sommation nous avons des indices  $r, s$  qui peuvent aller de 1 à 6. Les coefficients  $c_{rs}$  sont symétriques :

$$c_{rs} = c_{sr} \quad \text{comme} \quad \Lambda^{ij,hk} = \Lambda^{hk,ij}.$$

En outre, il se produit des compensations entre les divers facteurs 2 ou  $\frac{1}{2}$  (x. 28) et les nombres de coefficients indépendants  $\Lambda$  (x. 72), de telle sorte que l'on a, dans tous les cas :

$$\text{(x. 74)} \quad \Lambda^{ij,hk} = \frac{1}{8} c_{rs}$$

pour toutes les combinaisons d'indices différents ; voici quelques exemples :

	$\Lambda^{11,11} e_{11}^2 = 4 \Lambda^{11,11} e_1^2 = \frac{1}{2} c_{11} e_1^2$	$\Lambda^{11,11} = \frac{1}{8} c_{11}$
(x. 75)	$\Lambda^{11,22} e_{11} e_{22} + \Lambda^{22,11} e_{22} e_{11} = 2 \Lambda^{11,22} (2e_1)(2e_2) = c_{12} e_1 e_2$	$\Lambda^{11,22} = \Lambda^{22,11} = \frac{1}{8} c_{12}$
	$\Lambda^{11,23} e_{11} e_{23}$ (répété 4 fois) $= 4 \Lambda^{11,23} (2e_1) e_4 = c_{14} e_1 e_4$	$\Lambda^{11,23} = \Lambda^{11,32} \dots = \frac{1}{8} c_{14}$
	$\Lambda^{12,13} e_{12} e_{13}$ (répété 8 fois) $= 8 \Lambda^{12,13} e_6 e_5 = c_{56} e_6 e_5$	$\Lambda^{12,13} = \dots = \frac{1}{8} c_{56}$

(<sup>1</sup>) *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, 1910, chap. VII, p. 560.

Pour un cristal oblique nous aurons donc 21 coefficients indépendants  $c_{rs}$  pour représenter toutes les propriétés élastiques du cristal. Si le cristal présente quelques symétries, le nombre des coefficients  $c_{rs}$  diminue; certains sont nuls; d'autres égaux entre eux. Pour un *cristal cubique* rapporté à ses axes orthogonaux cartésiens il ne reste que 3 coefficients indépendants :

$$\begin{aligned} (x. 76) \quad & c_{11} = c_{22} = c_{33} \\ & c_{12} = c_{23} = c_{31} \\ & c_{44} = c_{55} = c_{66}. \end{aligned}$$

Tous les autres coefficients sont nuls.

Nous examinerons plus tard le problème d'un réseau cristallin composé d'atomes régulièrement distribués dans l'espace. Si l'on suppose qu'entre ces particules constituantes ne s'exercent que des *forces centrales*; si, en outre, le réseau présente certaines caractéristiques de structure ou symétrie, on trouve que les coefficients  $\Lambda$  satisfont à plusieurs *relations supplémentaires* indiquées par *Cauchy*; les  $\Lambda^{ij,hk}$  sont alors symétriques par rapport à toutes les permutations des 4 indices; aux conditions (x. 65) viennent s'ajouter les suivantes :

$$(x. 77) \quad \Lambda^{ij,hk} = \Lambda^{ih,jk} = \Lambda^{kj,hi} = \dots$$

Si nous transcrivons ces conditions pour les coefficients  $c_{rs}$  de Voigt, nous trouvons 6 *relations de Cauchy* :

$$(x. 78) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Lambda^{11,22} = \Lambda^{12,12} & c_{12} = c_{66} & \text{et par suite} \quad c_{23} = c_{44} \quad c_{13} = c_{55} \\ \Lambda^{12,13} = \Lambda^{11,23} & c_{56} = c_{14} & \text{et par suite} \quad c_{64} = c_{25} \quad c_{45} = c_{36}. \end{array} \right.$$

Pour un cristal cubique, le nombre des coefficients serait ainsi ramené de 3 à 2 par ces relations.

Il est important de considérer les simplifications qui se produisent, si l'état initial est *isotrope*; ceci suppose un corps isotrope soumis, dans l'état initial, à une pression uniforme  $p$ . Dans ces conditions, on ne doit voir apparaître, dans les termes du second degré, que les combinaisons invariantes. Nous avons vu (§ 7) p. 227 que la seule combinaison invariante du 1<sup>er</sup> degré est  $I_1$ ; celles du 2<sup>e</sup> degré sont :

$$I_1^2 \quad \text{et} \quad I_2.$$

Nous pousserons, dans ce cas, notre développement jusqu'au 3<sup>e</sup> degré; les invariants du 3<sup>e</sup> degré sont :

$$I_1^3 \quad I_1 I_2 \quad \text{et} \quad I_3$$

et nous écrirons le développement (x. 64) sous la forme :

$$(x. 79) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \frac{p}{2} I_1 + \frac{\lambda}{8} I_1^2 + \frac{\mu}{4} I_2 + A I_1 I_2 + B I_1^3 + C I_3 \dots$$

Dans l'invariant  $I_1$ , comme dans  $I_1^2$  et  $I_2$ , on prendra soin de n'omettre aucun des termes d'ordre supérieur par rapport aux dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial x}$  du déplacement; si cette précaution n'est pas prise, il est inutile d'essayer de tenir

## ÉLASTICITÉ

compte des termes des 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> degrés. Dans cette formule, les

et  $\frac{1}{8}$  ont été choisis de manière à laisser aux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  de valeur usuelle. Ces coefficients numériques tiennent à ce que les courantes en élasticité, pour les déformations, n'ont pas toujours que nous avons adoptées aux paragraphes 4 et 5 mais en diffèrent par des facteurs  $\frac{1}{2}$  ; il est d'ailleurs fréquent que ces définitions usuelles soient

prises de telle sorte que les dilatations et glissements ne forment pas un tenseur. C'est ce qui se produit pour les  $e_1 \dots e_6$  de Voigt, à cause des coefficients 2.

Revenons au cas du cristal cubique en axes orthogonaux ; nous y verrons figurer, dans l'énergie potentielle, quelques termes de plus que pour le corps isotrope. Au 2<sup>e</sup> ordre, nous pourrions introduire la combinaison :

$$e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2$$

et au 3<sup>e</sup> ordre les groupes :

$$(x. 80) \quad \begin{aligned} &I_1(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) \\ &e_{11}^3 + e_{22}^3 + e_{33}^3. \end{aligned}$$

Si nous employons des notations analogues à celles de Lamé, nous posons :

$$(x. 81) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \frac{p}{2} I_1 + \frac{\lambda}{8} I_1^2 + \frac{\mu}{4} I_2 + \nu(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) \\ + AI_1 I_2 + BI_1^3 + CI_3 + DI_1(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + E(e_{11}^3 + e_{22}^3 + e_{33}^3) + \dots \end{aligned}$$

On établit facilement la correspondance avec les notations de Voigt (x. 76), en tenant compte des coefficients :

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu + 8\nu \\ c_{12} &= c_{23} = c_{31} = \lambda \\ c_{44} &= c_{55} = c_{66} = \mu. \end{aligned}$$

Le cas isotrope s'obtient pour  $\nu = 0$  ; les relations de Cauchy donnent  $\lambda = \mu$ .

Rappelons enfin les relations entre les deux coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$  de Lamé et d'autres notations <sup>(1)</sup> :

*Module de traction de Young E, et coefficient de Poisson  $\sigma$  :*

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} E & \mu &= \frac{E}{2(1 + \sigma)} \\ 2\sigma &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & E &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} (3\lambda + 2\mu). \end{aligned}$$

*Compressibilité  $\chi$  :*

$$\chi = 3 \frac{1 - 2\sigma}{E} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.$$

Les tableaux suivants résument ces résultats, en indiquant le nombre total des coefficients  $\Omega$  et  $\Lambda$  indépendants, pour les termes des 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> degrés, par rapport aux déformations :

<sup>(1)</sup> G. BRUHAT. *Cours de Mécanique physique*. Masson, Paris, 1935, p. 627 ; on ne confondra pas le module d'Young E avec le coefficient E de la formule (x. 81).

TABLEAU I

*Aucun effort extérieur ; cristal en équilibre naturel ; tous  $\Omega$  nuls.*

	CRISTAL GÉNÉRAL	CRISTAL SOUMIS AUX RELATIONS DE CAUCHY	CUBIQUE	CUBIQUE ET RELATIONS DE CAUCHY	ISOTROPE	ISOTROPE ET RELATIONS DE CAUCHY
Nombre des coeffi- cients $\Lambda$ ou $c$ .	21	15	3	2	2	1

TABLEAU II

*Des efforts extérieurs quelconques ; 6 coefficients  $\Omega$  indépendants.*

	CRISTAL GÉNÉRAL	CRISTAL SOUMIS AUX RELATIONS DE CAUCHY
Nombre des coefficients $\Lambda$ ou $c$ .	21	15
Nombre total de coefficients . . .	27	21

TABLEAU III

*Cristal soumis à la pression uniforme  $p$ .*

	CRISTAL GÉNÉRAL	CRISTAL SOUMIS AUX RELATIONS DE CAUCHY	CUBIQUE	CUBIQUE ET RELATIONS DE CAUCHY	ISOTROPE	ISOTROPE ET RELATIONS DE CAUCHY
Nombre des $\Lambda$ ou $c$ .	21	15	3	2	2	1
Total, y compris la pression . . .	22	16	4	3	3	2

Revenons au cas d'un solide dans son état naturel, soumis à aucun effort extérieur. L'équilibre exige que toute déformation s'accompagne d'une augmentation de l'énergie interne ; l'ensemble des termes du 2<sup>e</sup> degré  $\frac{1}{2} \Sigma c_{rs} e_r e_s$  par rapport aux déformations doit être positif pour toutes valeurs arbitraires des  $e$ . Voigt indique les conditions suivantes, qui garantissent ce résultat ; formons, pour  $m$  arbitraire ( $m = 1, 2, 3, 4, 5$  ou  $6$ ), les déterminants :

$$(x. 82) \quad P_m = \begin{vmatrix} c_{11}c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & \dots & c_{2m} \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

On doit avoir :

$$P_1 > 0 \quad P_2 > 0 \quad \dots \quad P_6 > 0.$$

Pour un cristal cubique, ces conditions s'écrivent :

$$c_{11} > 0 \quad c_{11} > |c_{12}| \quad c_{44} > 0$$



ou, avec les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  de (x. 81) :

$$\mu > 0 \quad \lambda + 2\mu + 8\nu > 0 \quad \mu + 4\nu > 0$$

les coefficients  $\lambda$ ,  $\nu$  peuvent être négatifs moyennant les dernières conditions.

Nous étudierons plus particulièrement le cas du solide isotrope homogène, tout en ne nous faisant pas d'illusions sur l'homogénéité des solides réels que l'on considère comme isotropes. Cet exemple simple conserve pourtant une grande valeur, en vertu d'une importante remarque de W. Voigt : prenons un corps cristallisé, réellement homogène mais anisotrope, et faisons la moyenne de ses propriétés, pour toutes les orientations possibles du cristal. Ces valeurs moyennes définissent un *solide isotrope fictif*, bien caractérisé. Inversement, en étudiant un solide isotrope, nous obtenons des relations valables, en moyenne, pour un cristal examiné sous toutes les orientations possibles.

### X. — Relation entre les forces et les déformations.

Rappelons rapidement les différents systèmes de référence que nous avons eu à envisager dans le solide déformé. Nous avons tout d'abord les axes  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  qui pouvaient être cartésiens et orthogonaux (cas du § 5). Le solide étant déformé, le point matériel qui se trouvait initialement en  $x^i$  était déplacé de  $u^i$  et venait occuper la position :

$$X^i = x^i + u^i$$

par rapport à ces axes supposés invariables; c'est dans un tel système d'axes, et pour des éléments de surface définis en  $X^i$ , que nous avons trouvé le tenseur  $T$  des efforts et le pseudo-tenseur  $\theta$  des paragraphes 3 et 4.

En dehors de ce système de référence, nous avons vu qu'il pouvait être intéressant de définir des coordonnées  $\bar{X}^i$ , toujours curvilignes, qui sont les déformées des coordonnées initiales, de telle sorte que le point situé initialement en  $x^i$  se trouve, après déformation, en :

$$\bar{X}^i = x^i$$

par rapport à ces coordonnées curvilignes entraînées dans la déformation. L'intérêt des  $\bar{X}^i$ , c'est que les intégrales, étendues au solide déformé, sont prises entre les mêmes limites que pour le solide initial.

Lorsqu'on produit une petite variation de la déformation, le travail correspondant doit pouvoir s'exprimer en fonction des variations du tenseur de déformation  $e_{ij}$ . Le travail prendra la forme de l'intégrale de volume d'une densité :

$$(x. 83) \quad \delta \mathfrak{A}_r = \Sigma \int \mathfrak{A}^{ij} \delta e_{ij} dx^1 dx^2 dx^3$$

$dx^1 dx^2 dx^3$  représentant l'élément de volume initial, et l'intégrale étant étendue à tout le solide considéré *dans son état primitif avant déformation*; nous pourrions aussi bien écrire  $d\bar{X}^1 d\bar{X}^2 d\bar{X}^3$ .

Il faut établir les relations qui existent entre les coefficients  $\mathfrak{A}^{ij}$  (densité tensorielle deux fois contravariante) et le tenseur des efforts, que nous avons introduit aux paragraphes précédents.

Admettons que les forces extérieures se traduisent par : 1° une densité de forces  $\Psi_r$ , que l'on pourra écrire, suivant une habitude courante, sous la forme  $\rho F_r$ , en mettant en évidence la densité matérielle  $\rho$  et un champ de forces  $F$ . Ces forces s'exercent dans tout le volume du solide; si le corps est en mouvement, les forces d'accélération  $\frac{\partial \rho v_r}{\partial t}$  rentreront dans ce terme général; 2° une densité superficielle de forces  $\Xi_r^k$  agissant sur la surface limite du solide; la force extérieure sur un élément de surface  $d\sigma_k$  sera  $\sum_k \Xi_r^k d\sigma_k$ . La résultante des forces agissant sur un élément de volume  $d\tau$  s'écrira alors (formule x. 18) :

$$(\Psi_r + \Phi_r) d\tau, \quad d\tau = dX^1 dX^2 dX^3$$

tandis qu'avec nos conventions de signe, la résultante des forces sur un élément  $d\sigma$  de la surface sera (x. 10) :

$$\sum_k (\Xi_r^k - \Theta_r^k) d\sigma_k.$$

La figure (x. 4) rappelle les conventions de signe. Le volume  $d\tau$  et la surface  $d\sigma$  sont pris dans les coordonnées finales  $X$ , qui représentent le corps déformé, rapporté aux axes rigides.

Supposons maintenant que l'équilibre soit réalisé, les deux termes ci-dessus étant nuls, je puis

écrire qu'un déplacement arbitraire infiniment petit  $\delta u^r$  produit un travail nul (principe des travaux virtuels) :

$$(x. 84) \quad \sum_r \int_v (\Psi_r + \Phi_r) \delta u^r d\tau + \sum_{r,k} \int_s (\Xi_r^k - \Theta_r^k) \delta u^r d\sigma_k = 0,$$

ce qui me donne :

$$\sum_r \int_v \Psi_r \delta u^r d\tau + \sum_{r,k} \int_s \Xi_r^k \delta u^r d\sigma_k + \sum_{r,k} \int_v \frac{D\Theta_r^k}{DX^k} \delta u^r d\tau - \sum_{r,k} \int_s \Theta_r^k \delta u^r d\sigma_k = 0.$$

Les deux derniers termes se laissent aisément transformer au moyen d'une intégration par parties; j'ai en effet :

$$\sum_{r,k} \int_s \Theta_r^k \delta u^r d\sigma_k = \sum_{r,k} \int_v \frac{D\Theta_r^k \delta u^r}{DX^k} d\tau,$$

de sorte que je puis écrire :

$$(x. 85) \quad \delta \mathfrak{A}_e = \sum_r \int_v \Psi_r \delta u^r d\tau + \sum_{r,k} \int_s \Xi_r^k \delta u^r d\sigma_k = \sum_{r,k} \int_v \Theta_r^k \frac{D\delta u^r}{DX^k} d\tau,$$

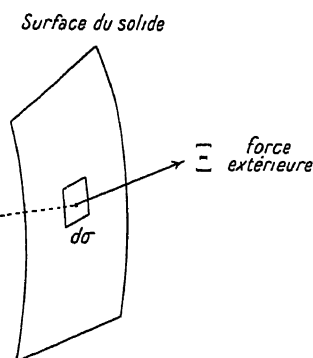


Fig. x. 4.

$\delta\mathfrak{A}_e$  représente le travail des forces extérieures  $\Psi$  et  $\Xi$  pour les déplacements arbitraires  $\delta u^r$  que nous avons imposés <sup>(1)</sup>. La dernière intégrale peut aussi bien s'écrire au moyen des composantes mixtes  $\Theta^{ik}$ , car j'ai :

$$\sum_{rk} \Theta_r^k \frac{D\delta u^r}{DX^k} = \sum_{lrk} \Theta^{lk} g_{lr} \frac{D\delta u^r}{DX^k} = \sum_{lk} \Theta^{lk} \frac{D\delta u_l}{DX^k},$$

puisque les dérivées covariantes sont de vrais tenseurs.

En vertu de la symétrie du pseudo-tenseur  $\Theta^{ik}$  je puis alors grouper les termes  $lk$  et  $kl$  et prendre :

$$(x. 86) \quad \delta\mathfrak{A}_e = \sum_{lk} \int_v \Theta^{lk} \frac{D\delta u_l}{DX^k} d\tau = \frac{1}{2} \sum_{lk} \int_v \Theta^{lk} \left( \frac{D\delta u_l}{DX^k} + \frac{D\delta u_k}{DX^l} \right) d\tau.$$

L'expression entre parenthèses s'exprime au moyen des variations du tenseur de déformation. Nous avons, en effet, établi la relation suivante (§ 6, formule x. 49) :

$$\delta e_{ij} = \sum_{lk} \left( \frac{D\delta u_l}{DX^k} + \frac{D\delta u_k}{DX^l} \right) a_i^k a_j^l,$$

qui se résout aussitôt ainsi :

$$\frac{D\delta u_l}{DX^k} + \frac{D\delta u_k}{DX^l} = \sum_{ij} \beta_i^l \beta_j^k \delta e_{ij},$$

$\Delta\beta_k^i$  étant le mineur de  $a_i^k$  dans le déterminant  $\Delta = |a_i^k|$  (x. 40 et 55). D'autre part, pour comparer nos formules (x. 86 et 83), il nous faut encore passer d'une intégrale portant sur les coordonnées  $X$  (après déformation) à une intégrale relative aux coordonnées initiales  $x$  ; ceci se fait aisément grâce à la relation :

$$d\tau_x = \Delta \cdot dx^1 dx^2 dx^3 \quad \Delta = \frac{D(X^1, X^2, X^3)}{D(x^1, x^2, x^3)} = |a_i^k|.$$

Nous aboutissons donc au résultat suivant :

$$(x. 87) \quad \delta\mathfrak{A}_e = \frac{1}{2} \int \Delta \sum_{ijkl} \beta_i^l \beta_j^k \Theta^{kl} \delta e_{ij} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Nous trouvons alors, par comparaison des formules (x. 87 et 83), les relations :

$$\mathfrak{A}^{ij} = \frac{1}{2} \Delta \sum_{kl} \beta_i^l \beta_j^k \Theta^{kl},$$

ou inversement :

$$(x. 88) \quad \Theta^{kl} = \frac{2}{\Delta} \sum_{ij} a_i^k a_j^l \mathfrak{A}^{ij}.$$

On saisit ici la simplification apportée par l'écriture tensorielle ; les formules (x. 88), développées tiendraient une page entière ! Le résultat obtenu peut se résumer assez simplement : les expressions  $2\mathfrak{A}^{ij}$  représentent la densité tensorielle  $\Theta^{rk}$  des efforts, dans le système d'axes curvilignes  $X^i$  obtenus en appliquant la déformation  $u$  aux axes originaux euclidiens.

<sup>(1)</sup> Pour un déplacement réel  $\delta u^r$  et un mouvement à vitesse fini, on obtiendrait ici  $d\mathfrak{A}_e = dE_{cin}$ ,  $E_{cin}$  représentant l'énergie cinétique totale du corps solide ; ceci est évident, puisque nous avons fait rentrer les forces d'inertie dans le terme  $\Psi_r$ .

Nous pouvons, dans les conditions spécifiées au paragraphe précédent, admettre l'existence d'une densité d'énergie globale  $\mathcal{E} + H$  ; nous aurons alors évidemment :

$$(x. 89) \quad \bar{\Theta}^{ij} = 2\mathcal{A}^{ij} = 2 \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial e_{ij}} + \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial e_{ji}}$$

ce sera le tenseur des efforts en axes déformés  $X$  ; le tenseur des efforts en axes rigides  $x'$  sera donc, d'après (x. 88) :

$$(x. 90) \quad \Theta^{kl} = \frac{1}{\Delta} \sum_{ij} a_i^k a_j^l \left( \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial e_{ij}} + \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial e_{ji}} \right).$$

### XI. — *Le milieu solide en mouvement ; coordonnées d'Euler.*

Jusqu'ici nous avons considéré les efforts dans un milieu solide déformé, au repos, et nous avons utilisé un système de coordonnées rigides  $X^i$ , qui donnent, dans le solide déformé, la position de chacun des points par rapport à des axes invariables. Nous allons passer maintenant au cas d'un solide en mouvement, rapporté à ces axes invariables.

Nous formerons ainsi les équations du mouvement en *coordonnées d'Euler* ; pour chaque point de l'espace ( $X^1 X^2 X^3$ ) nous supposons connue la vitesse  $v^k$  de la particule matérielle qui passe au point  $X^1 X^2 X^3$  à l'instant  $t$ . Des vitesses, nous supposons que nous sommes capables de remonter aux déformations, afin de calculer le tenseur des efforts  $\Theta$  ; les équations du mouvement sont alors :

$$(x. 91) \quad \Phi^r = \sum_k \frac{D\Theta^{rk}}{DX^k} = \rho \frac{Dv^r}{Dt}$$

$\rho$  est la densité de la matière qui se trouve en  $X^1 X^2 X^3$  à l'instant  $t$ , et  $\frac{Dv^r}{Dt}$  la dérivée de la vitesse, prise en suivant le mouvement d'une parcelle de matière ; si nous voulons que ces équations s'appliquent en axes curvilignes, il est nécessaire de prendre pour  $\Phi$  la définition (x. 19) de la divergence, avec son terme de correction en  $\Gamma$  ; de même, la dérivée  $\frac{Dv^r}{Dt}$  est la dérivée vraie (ou absolue) avec les corrections  $\Gamma$  qui compensent la courbure des axes. Tout cela ressort nettement de nos définitions générales des chapitres V et VII. Entre la dérivée  $\frac{Dv^r}{Dt}$  prise en suivant le mouvement de la particule et la dérivée locale  $\frac{\partial v^r}{\partial t}$  nous avons la relation :

$$(x. 92) \quad \frac{Dv^r}{Dt} = \frac{\partial v^r}{\partial t} + \sum_k v^k \frac{\partial v^r}{\partial X^k} + \sum_{kh} v^k v^h \Gamma_{kh}^r.$$

En axes orthogonaux cartésiens, les  $\Gamma$  sont nuls et les deux premiers ter-

mes constituent une expression classique. D'autre part, la conservation de la masse s'écrit :

$$(x. 93) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \rho v^k}{\partial X^k} = 0.$$

Ici, aucun terme de correction n'est nécessaire dans la divergence, comme nous l'avons souligné aux chapitres IV et VII. Formons l'expression :

$$(x. 94) \quad \frac{\partial(\rho v^r)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v^r}{\partial t} + v^r \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial v^r}{\partial t} - v^r \sum_k \frac{\partial \rho v^k}{\partial X^k}.$$

Utilisons encore la relation (x. 92) et nous trouvons :

$$\rho \frac{Dv^r}{Dt} = \frac{\partial(\rho v^r)}{\partial t} + v^r \sum_k \frac{\partial \rho v^k}{\partial X^k} + \sum_k \rho v^k \frac{\partial v^r}{\partial X^k} + \sum_{kh} \rho v^k v^h \Gamma_{kh}^r;$$

il suffit de nous reporter à la formule (x. 19) de la divergence pour reconnaître dans cette expression la même structure.

Donc :

$$(x. 95) \quad \rho \frac{Dv^r}{Dt} = \frac{\partial(\rho v^r)}{\partial t} + \sum_k \frac{D(\rho v^r v^k)}{DX^k}.$$

Et nous arrivons à mettre nos équations de mouvement (x. 91) sous la forme suivante :

$$(x. 96) \quad \sum_k \frac{D}{DX^k} [\Theta^{rk} - \rho v^r v^k] = \frac{\partial(\rho v^r)}{\partial t}$$

le second membre représente la variation locale de la *densité de quantité de mouvement*  $\rho v^r$ ; au premier membre nous voyons apparaître la divergence d'une densité tensorielle :

$$(x. 97) \quad \Theta'^{rk} = \Theta^{rk} - \rho v^r v^k.$$

Cherchons à préciser le sens de cette grandeur. Par rapport aux axes fixes, les actions qui se transmettent, à travers un *élément de surface*  $d\sigma_k$  *immobile* sont de deux sortes :

1° Les efforts élastiques statiques, représentés par  $\Theta^{rk}$ ;

2° Le *flux de quantité de mouvement*, conséquence de l'écoulement de matière à travers la surface  $d\sigma_k$ ; la densité de quantité de mouvement est  $\rho v^r$ ; son flux à travers la surface est  $\rho v^r v^k$ , et représente le transport (proportionnel à  $v^k$ ) de quantité de mouvement dans le sens de la normale positive. Le signe —, dans (x. 96 et 97) provient des conventions faites au [paragraphe 3, où nous avons convenu de doter du signe + une action exercée par la partie de matière (située du côté de la normale positive) sur la portion du solide située du côté négatif.

Le nouveau tenseur  $\Theta'^{rk}$  est symétrique en  $r, k$  comme  $\Theta^{rk}$ .

Les équations précédentes sont intéressantes, mais souvent difficiles à employer puisque, pour calculer la tension  $\Theta$ , il faut repasser des vitesses  $v$  (connues en des points fixes  $X$  à chaque instant) aux déplacements  $u$  (définis en fonction des coordonnées *initiales*  $x$ ), cette opération sera très délicate si les déplacements  $u$  ne sont pas infiniment petits. Cette transformation des équations des milieux continus est très importante par les applications qu'en a fait Einstein en relativité générale.

**XII. — Exemple d'étude d'un corps solide initialement déformé ;  
rôle d'une pression initiale interne ou externe,  
sur les propriétés élastiques.**

Nous avons insisté, au paragraphe 10, sur l'intérêt que présente l'étude des déformations élastiques d'un corps, à partir d'un état initial où ce corps est déjà soumis à des efforts, de sorte qu'on parte non pas d'un solide en équilibre naturel, mais d'un solide initialement déformé. Nous allons étudier de plus près le cas très important d'un solide soumis initialement à une pression uniforme et constante. Cet exemple avait été considéré par Poincaré, dans ses leçons sur l'élasticité, mais nous pourrions en retrouver la forme générale par un raisonnement beaucoup plus direct que celui de Poincaré.

Considérons un solide isotrope, rapporté à des axes cartésiens orthogonaux  $x_1, x_2, x_3$ ; supposons d'abord, pour plus de généralité, que nous ayons soumis ce solide à des efforts tels qu'il présente, initialement, des extensions  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  suivant les trois axes; ensuite nous ajouterons un petit déplacement  $w_1, w_2, w_3$ , qui représentera la déformation accidentelle supplémentaire, à partir de l'état intermédiaire  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Au total, pour passer du solide isotrope sans effort au solide déformé, nous devons faire subir aux diverses particules des déplacements :

$$(x. 98) \quad u_1 = \alpha_1 x_1 + w_1 \quad u_2 = \alpha_2 x_2 + w_2 \quad u_3 = \alpha_3 x_3 + w_3$$

et le déplacement supplémentaire  $w$  est compté à partir d'une nouvelle position de départ :

$$(x. 99) \quad x_1 = (1 + \alpha_1)x_1 \quad x_2 = (1 + \alpha_2)x_2 \quad x_3 = (1 + \alpha_3)x_3.$$

Les propriétés du solide isotrope, dans son état naturel libre seront supposées représentées par une densité d'énergie du type (x. 79) :

$$(x. 79) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{\lambda}{8} I_1^2 + \frac{\mu}{4} I_2 + A I_1 I_2 + B I_1^3 + C I_3 \dots$$

ce développement ne contient pas de termes du premier degré, le solide n'étant supposé soumis ici à aucun effort. Cherchons maintenant comment se présentera la densité d'énergie, lorsque nous la compterons à partir du nouvel état initial  $x$  (x. 99), c'est-à-dire à partir d'un état préalablement déformé par les trois dilatations  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Appelons  $f_{ik}$  les déformations, mesurées à partir de cet état (x. 99) :

$$(x. 100) \quad f_{ik} = \frac{\partial w_i}{\partial x^k} + \frac{\partial w_k}{\partial x^i} + \sum_r \frac{\partial w_r}{\partial x^i} \frac{\partial w_r}{\partial x^k}.$$

Ces déformations secondaires pourront nous permettre de calculer les déformations primaires  $e_{ik}$ , comptées à partir de l'état sans effort :

$$e_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} + \sum_r \frac{\partial u_r}{\partial x^i} \frac{\partial u_r}{\partial x^k}$$

un calcul élémentaire donne :

$$(x. 101) \quad e_{11} = 2\alpha_1 + \alpha_1^2 + (1 + \alpha_1)^2 f_{11} \quad e_{12} = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) f_{12}.$$

Nous procéderons de la manière suivante : nous prendrons en (x. 101) les expressions des déformations totales primaires ; nous les porterons de (x. 79) et nous obtiendrons ainsi la valeur de l'énergie  $\mathcal{E}$  d'un volume solide qui était égal à 1 en l'absence de tout effort, mais qui est  $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3)$  dans l'état intermédiaire déformé qui nous sert de nouvel état initial. À partir de cet état initial nouveau, la densité d'énergie sera donc :

$$(x. 102) \quad \mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3)}.$$

Spécifions maintenant une déformation initiale qui soit seulement une dilatation uniforme isotrope :

$$(x. 103) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Les invariants I (formés avec les  $e_{ik}$ ) s'expriment en fonction des invariants semblables J, que l'on forme de la même façon avec les  $f_{ik}$  :

$$(x. 104) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 3(2\alpha + \alpha^2) + (1 + \alpha)^2 J_1 \\ I_2 = e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{12}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{31}^2 \\ \quad = 3(2\alpha + \alpha^2)^2 + 2(2\alpha + \alpha^2)(1 + \alpha)^2 J_1 + (1 + \alpha)^4 J_2 \\ I_3 = 3(2\alpha + \alpha^2)^3 + 3(2\alpha + \alpha^2)^2(1 + \alpha)^2 J_1 + 3(2\alpha + \alpha^2)(1 + \alpha)^4 J_2 \\ \quad + (1 + \alpha)^6 J_3. \end{array} \right.$$

La nouvelle densité d'énergie  $\mathcal{E}'$  s'écrit finalement de la manière suivante :

$$(x. 105) \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E}'_0 - \frac{p'}{2} J_1 + \frac{\lambda'}{8} J_1^2 + \frac{\mu'}{4} J_2 + A' J_1 J_2 + B' J_1^3 + C' J_3$$

avec des coefficients  $\mathcal{E}'_0$ ,  $p'$ ,  $\lambda'$ ,  $\mu'$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  dont voici les valeurs :

$$(x. 106) \quad \begin{aligned} (1 + \alpha)^3 \mathcal{E}'_0 &= \mathcal{E}_0 + \frac{3}{8} (3\lambda + 2\mu) (2\alpha + \alpha^2)^2 + (2\alpha + \alpha^2)^3 [9A + 27B + 3C]. \\ (1 + \alpha) p' &= - \frac{3\lambda + 2\mu}{2} (2\alpha + \alpha^2) - 2(9A + 27B + 3C) (2\alpha + \alpha^2)^2 \\ \lambda' &= (1 + \alpha) [\lambda + 8(2\alpha + \alpha^2)(2A + 9B)] \\ \mu' &= (1 + \alpha) [\mu + 12(2\alpha + \alpha^2)(A + C)] \\ A' &= A(1 + \alpha)^3 \quad B' = B(1 + \alpha)^3 \quad C' = C(1 + \alpha)^3 \end{aligned}$$

Ces expressions sont rigoureuses, pour autant que le développement (x. 79) représente correctement les faits ; les coefficients d'élasticité  $\lambda'$ ,  $\mu'$  sous pression diffèrent donc des  $\lambda$ ,  $\mu$  sans effort extérieur ; en fait, l'expérience semble indiquer que les ABC sont négatifs, de l'ordre de  $\lambda$ ,  $\mu$  ; une compression ( $\alpha < 0$ ) élèverait donc  $\lambda'$  et  $\mu'$ .

D'autre part, nous aurons une expression (x. 68) pour la densité d'énergie H du système extérieur qui sert à appliquer la pression  $p'$  au corps solide ; ce sera par exemple un liquide dans lequel baigne le solide, comme sur la figure (x. 3) p. 231 ; naturellement, si la pression  $p'$  est positive, la dilatation  $\alpha$  est négative, ainsi qu'on le voit sur les formules (x. 106).

Pour toute déformation accidentelle ultérieure, à partir de cet état initial (solide sous pression  $p'$ ) nous savons que c'est la somme  $\mathcal{E}' + H$  qu'il faut

prendre comme densité d'énergie potentielle (équ. x. 69 ou x. 89); et cette densité s'écrit :

$$(x. 107) \quad \mathcal{E}' + H = \mathcal{E}'_0 + H_0 + \frac{\lambda' + p'}{8} J_1^2 + \frac{\mu' - p'}{4} J_2 + \dots$$

Nous n'avons écrit les termes que jusqu'au second ordre, car dans les termes du troisième ordre  $A'J_1J_2 + B'J_1^3 + C'J_3$  il y aurait aussi des corrections dues à la fonction  $H$  de (x. 68), mais nous n'avions pas poussé le développement de (x. 68) assez loin.

Nous pouvons donc, pour le cas d'un solide isotrope, soumis initialement à une pression extérieure  $p'$  constante, préciser nos remarques générales du paragraphe 8 et dire :

lorsqu'on voudra mesurer les deux coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  de Lamé, sur ce solide sous pression, on obtiendra, en réalité :

$$(x. 108) \quad \lambda_{\text{apparent}} = \lambda' + p' \quad \text{et} \quad \mu_{\text{apparent}} = \mu' - p'.$$

Ce fait avait été signalé par Poincaré dans ses leçons sur l'Elasticité, mais il obtenait ce résultat par une suite de calculs très particuliers. Nos raisonnements du paragraphe 8 ont montré la généralité de cet effet.

S'agit-il d'un phénomène observable, et quel est son ordre de grandeur? Voici quelques valeurs de coefficients  $\mu$ , en c. g. s., c'est-à-dire en baryes; en faisant abstraction du facteur  $10^6$ , ces nombres donnent à peu près des kg.-poids par centimètre carré :

Substances	Ni	Pt	Cu	Al	Pb
$\mu \cdot 10^{-6}$	800.000	650.000	420.000	250.000	70.000
Substances	Aciers		Verres	Quartz	Caoutchouc
$\mu \cdot 10^{-6}$	500.000 à 800.000		180.000 à 320.000	300.000	16

Pour les corps cristallisés, les coefficients correspondants ont des valeurs du même ordre : en voici dans les mêmes unités :

NaCl	$c_{11} = 477.000$	$c_{44} = 129.400$	$c_{23} = 132.000$
KCl	376.000	65.500	65.400

Ces nombres montrent que l'influence de la correction  $\pm p'$  ne pourra se manifester qu'aux très hautes pressions. Bridgman a réalisé des pressions allant jusqu'à 40.000 kg. par centimètre carré, qui sont presque du même ordre de grandeur que les nombres ci-dessus; dans ses mesures, la correction  $\pm p'$  serait donc notable. Mais les dispositifs expérimentaux ne permettent guère de réaliser ces énormes pressions d'une manière tout à fait isotrope; c'est souvent plutôt un effort dirigé suivant un axe que réparti dans les trois directions; ce point compliquera notablement les discussions; d'ailleurs, lorsqu'on arrive à de tels efforts, on dépasse très vite les limites de déformation élastique pour tomber dans les phénomènes de déformations permanentes et de plasticité.

En dehors des pressions  $p'$  exercées de l'extérieur, il peut y avoir des pressions internes, de signe opposé ( $p' < 0$ ) s'exerçant de l'intérieur vers l'extérieur du corps solide, et provoquant ainsi une dilatation du solide.

En premier lieu, l'agitation thermique intervient dans ce sens; on sait



que les particules constituant un corps sont en état d'agitation d'autant plus grande que la température est plus élevée; ces particules viennent frapper la surface qui limite le corps et exercent une pression, de l'intérieur vers l'extérieur, et qui s'élève si la température monte. Ce fait est bien connu dans la théorie cinétique des gaz; il subsiste, *grosso modo*, pour les solides, et l'on connaît des moyens de calculer cette pression thermique (voir chap. XII), c'est elle qui est responsable de la dilatation thermique des solides; il s'agit donc d'une pression considérable, car entre le zéro absolu et les températures élevées, la dilatation  $\alpha$  peut être assez importante; les pressions internes correspondantes (x. 106) sont données approximativement par :

$$(x. 109) \quad p' = - \frac{3\lambda + 2\mu}{2} \frac{2\alpha + \alpha^2}{1 + \alpha}$$

elles resteront bien inférieures à  $\lambda$  ou  $\mu$ , mais non pas dans une proportion négligeable.

Outre la pression interne d'agitation thermique, on a dans le cas des métaux la pression des électrons libres; la théorie moderne des électrons libres dans les métaux leur attribue les propriétés d'un gaz dégénéré de Fermi; on peut alors calculer <sup>(1)</sup> la pression interne par la formule approchée, valable au zéro absolu :

$$(x. 110) \quad p_{\text{électrons}} = - \frac{4\pi h^2}{15m} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{\frac{5}{3}}$$

ce qui donne de  $-10.000$  à  $-200.000$  kg. par centimètre carré; ce sont ici des pressions énormes, qui peuvent contribuer considérablement aux coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ . Vérifions ces ordres de grandeur :

$h = 6.55 \cdot 10^{-27}$	constante de Planck
$m = 9 \cdot 10^{-28}$	masse de l'électron
$\frac{N}{V} = 1 \text{ à } 6 \cdot 10^{22}$	nombre d'électrons par centimètre cube, en comptant un électron libre par atome du métal.

Ces nombres donnent pour la pression électronique  $p$  de  $10^{10}$  à  $2 \cdot 10^{11}$  dynes par centimètre carré, ce qui correspond bien aux chiffres ci-dessus.

Pour ces pressions internes, on ne peut d'ailleurs pas raisonner si simplement que pour une pression externe supposée exactement constante; en effet, si l'on produit une variation du volume du solide, la pression ne reste pas constante; dans le cas des électrons, la formule (x. 110) montre que  $p$  dépend de  $V$ ; pour la pression interne d'agitation thermique, on aurait une relation du même genre. L'énergie interne  $H$  correspondant à ces diverses causes ne pourra donc pas être prise sous la forme simple (x. 67 ou 68);

<sup>(1)</sup> L. BRILLOUIN. *Statistiques quantiques*. Presses Univ. Paris, 1930, pp. 144-147, éq. 31 bis, 38 et 60; p. 199, éq. 16 :

$$p = \frac{2}{3} \frac{U_0}{V} \qquad U_0 = 2 \frac{3N'h^2}{10m} \left( \frac{3N'}{4\pi V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

avec  $N' = \frac{N}{2}$  par suite des deux sortes d'électrons à spins opposés ( $g=2$ ).

supposons que nous sachions prévoir, par une théorie plus complète, la valeur  $p(v)$  de la pression ; nous en tirerons :

$$H = \int p dv;$$

limitons-nous à de petites variations de volume à partir de l'état choisi comme état initial et développons :

$$(x. 111) \quad p(v) = p_0 + p_1 \delta v \dots \quad H = H_0 + p_0 \delta v + \frac{1}{2} p_1 (\delta v)^2 \dots$$

Ce développement s'exprimera au moyen de nos invariants  $J$  de la déformation (par la formule x. 59) :

$$(x. 112) \quad \begin{aligned} H &= H_0 + p_0 \left[ \frac{J_1}{2} - \frac{J_2}{4} + \frac{J_1^2}{8} \right] + \frac{1}{2} p_1 \left[ \frac{J_1}{2} - \frac{J_2}{4} + \frac{J_1^2}{8} \right]^2 \dots \\ &= H_0 + \frac{p_0}{2} J_1 - \frac{p_0}{4} J_2 + \frac{p_1 + p_0}{8} J_1^2 + \dots \end{aligned}$$

En portant cette expression dans la densité d'énergie globale  $\mathcal{E}' + H$ , nous obtiendrons un développement un peu différent de (x. 107) :

$$(x. 113) \quad \mathcal{E}' + H = \mathcal{E}'_0 + H_0 + \frac{\lambda' + p_1 + p_0}{8} J_1^2 + \frac{\mu' - p_0}{4} J_2$$

de sorte que la correction sera  $p_1 + p_0$  sur  $\lambda'$  et  $-p_0$  seulement sur  $\mu'$  :

$$(x. 114) \quad \lambda_{\text{apparent}} = \lambda' + p_1 + p_0 \quad \mu_{\text{apparent}} = \mu' - p_0.$$

Comme il s'agit de pressions internes,  $p_0$  est *négligé*, quant à  $p_1$  son signe et sa grandeur dépendront des mécanismes qui provoquent les pressions internes. Précisons qu'un corps satisfaisant aux conditions particulières qui donnent les relations de Cauchy (x. 78 et 81) nous fournirait deux coefficients  $\lambda'$  et  $\mu'$  égaux, de sorte que les  $\lambda$  et  $\mu$  apparents de (x. 114) présenteraient une différence :

$$(x. 115) \quad \lambda' - \mu' = 0 \quad (\lambda - \mu)_{\text{apparent}} = 2p_0 + p_1.$$

Enfin, il peut se produire une complication supplémentaire, si l'énergie  $H$  d'où dérive la pression ne dépend pas seulement du volume mais de toutes les déformations (cf. chap. XII, § 12).

### XIII. — Équations de mouvement en coordonnées de Lagrange ; formules de Boussinesq.

Revenons au problème des mouvements d'un corps élastique ; nous obtenons des formules plus maniables, et plus commodes pour les applications, en restant en coordonnées de Lagrange. C'est un calcul qui ne peut d'ailleurs s'écrire que si l'on emploie des coordonnées euclidiennes, car il s'y introduit des grandeurs qui n'ont pas le caractère tensoriel, en général ; au contraire, les calculs des paragraphes précédents peuvent se transcrire en axes quelconques.

Considérons, dans le solide initialement non déformé, un élément de volume  $dx^1 dx^2 dx^3$ , placé par exemple à l'origine des coordonnées. Lorsque le solide est déformé, ce même élément de volume a changé de place *et de forme*. Une face  $dx^2 dx^3$  qui était initialement rectangulaire, parallèle au plan  $Ox^2 x^3$  sera devenue une face oblique, en forme de losange; nous appellerons :

(x. 116)

$$f_K = \mathfrak{B}_K^1 dx^2 dx^3$$

la force agissant au travers de cette face, force dont nous prenons les *composantes K projetées sur les axes rigides fixes  $X^k$* ; pour bien marquer cette particularité, nous avons mis l'indice  $k$  en petite majuscule; la grandeur  $\mathfrak{B}_K^1$  ne serait pas en général une grandeur tensorielle; par l'indice  $K$  c'est une grandeur covariante attachée au point  $X^k = x^k + u^k$  où se trouve le solide *après* déformation; par l'indice  $i$  au contraire c'est une grandeur contravariante attachée au point  $x^i$  où se trouve la particule solide *avant* déformation.

Mais en coordonnées euclidiennes (axes rectangulaires), ces difficultés de définition ne nous gênent pas; un déplacement  $u$ , même de grandeur finie, conserve les propriétés d'un vecteur; les grandeurs (x. 30) :

$$a_i'' = \delta_i' + \frac{\partial u^r}{\partial x^i}$$

qui ne sont pas en général des tenseurs, peuvent être traitées comme telles, tant qu'on reste en axes d'Euclide, et nos  $\mathfrak{B}_K^1$  vont aussi, dans ces conditions, jouer le rôle d'une densité tensorielle.

Nous emploierons les mêmes conventions de signes que pour les tensions (§ 3). Considérons alors les deux faces qui se trouvaient initialement (avant déformation) parallèles à  $Ox^2 x^3$ ; sur celle de gauche, nous avons une force  $-\mathfrak{B}_K^1 dx^2 dx^3$ , et sur celle de droite :

$$(\mathfrak{B}_K^1 + \frac{\partial \mathfrak{B}_K^1}{\partial x^1} dx^1) dx^2 dx^3.$$

La force résultante est donc :

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_K^1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 dx^3.$$

En répétant le même raisonnement pour les autres faces, nous voyons que la force totale est :

$$(x. 117) \quad \Phi_K dx^1 dx^2 dx^3 = \left[ \frac{\partial \mathfrak{B}_K^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathfrak{B}_K^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathfrak{B}_K^3}{\partial x^3} \right] dx^1 dx^2 dx^3,$$

$\Phi_k$  représente une densité de force, rapportée au volume initial  $dx^1 dx^2 dx^3$  avant déformation. Cherchons maintenant le travail des forces, pour des

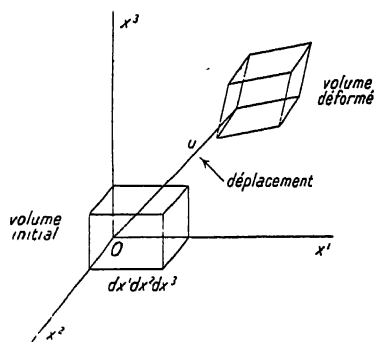


Fig. x. 5.

déplacements virtuels  $\delta u^k$ ; considérons les faces qui étaient initialement parallèles à  $x^2x^3$ ; le travail est, pour la face de gauche :

$$-\sum_K \mathcal{B}_K^i \delta u^K dx^2 dx^3$$

et pour celle de droite :

$$\sum_K [\mathcal{B}_K^i \delta u^K + \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathcal{B}_K^i \delta u^K) dx^i] dx^2 dx^3.$$

Faisons la somme pour toutes les faces :

$$\begin{aligned} (x. 118) \quad d\mathcal{E} &= \sum_K \left[ \mathcal{B}_K^i \frac{\partial \delta u^K}{\partial x^i} + \delta u^K \frac{\partial \mathcal{B}_K^i}{\partial x^i} \right] dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \sum_K \Phi_K dx^1 dx^2 dx^3 \delta u^K + \sum_K \mathcal{B}_K^i \delta \frac{\partial u^K}{\partial x^i} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Le premier terme représente le travail de la densité de force (x. 117); supposons qu'il n'y ait pas de forces extérieures (gravité, magnétisme, électricité...) donnant une action dans l'intérieur du solide, proportionnelle à la densité; dans ce cas le travail représenté par ce premier terme  $\sum_K \Phi_K \delta u^K dv$  sert à augmenter l'énergie cinétique de la matière contenue dans  $dv$ ; soit donc  $\rho_0$  la densité initiale du solide, nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi_K &= \rho_0 \frac{d^2 u_K}{dt^2} \\ (x. 119) \quad \sum_K \Phi_K \delta u^K &= \frac{1}{2} \rho_0 \delta \left( \frac{du}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Ce sont les *équations de mouvement de Boussinesq*, dans lesquelles on utilise les coordonnées dites de Lagrange.

Le deuxième terme de (x. 118) correspond à l'augmentation d'énergie élastique interne; nous avons défini au paragraphe 8 une densité  $\mathcal{E}$  d'énergie élastique, rapportée au volume initial, à laquelle il fallait adjoindre la densité d'énergie  $H$  correspondant aux forces extérieures produisant la déformation initiale (x. 66 à 68).

Nous aurons donc :

$$(x. 120) \quad \delta(\mathcal{E} + H) dx^1 dx^2 dx^3 = \sum_K \mathcal{B}_K^i \delta \frac{\partial u^K}{\partial x^i} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Cette relation nous montre immédiatement que nos  $\mathcal{B}_K^i$  sont les dérivées partielles de  $(\mathcal{E} + H)$  par rapport à  $\frac{\partial u^K}{\partial x^i}$  :

$$(x. 121) \quad \mathcal{B}_K^i = \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial \left( \frac{\partial u^K}{\partial x^i} \right)}.$$

Nous avons donc un jeu complet d'équations, posées sous une forme assez simple; mais on ne peut les écrire ainsi qu'en axes orthogonaux.

Pour résumer les diverses définitions données dans ce chapitre, écrivons

côte à côte les développements qui donnent le travail virtuel des forces élastiques :

$$(x. 83) \quad d\mathfrak{E}_{el} = \sum_{ij} \int_v \mathfrak{A}^{ij} \delta e_{ij} dx^1 dx^2 dx^3$$

intégrale étendue au *solide non déformé*  $x^1 x^2 x^3$ .

$$(x. 86) \quad d\mathfrak{E}_{el} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \int_v \Theta^{ik} \left[ \frac{D\delta u_i}{DX^k} + \frac{D\delta u_k}{DX^i} \right] dX^1 dX^2 dX^3$$

intégrale étendue au *solide déformé*  $X^1 X^2 X^3$ .

$$(x. 122) \quad d\mathfrak{E}_{el} = \sum_{\kappa i} \int \mathcal{B}_\kappa^i \delta \left( \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i} \right) dx^1 dx^2 dx^3$$

intégrale étendue au *solide non déformé*  $x^1 x^2 x^3$ .

La comparaison de ces formules nous a servi de base pour écrire les relations entre les différentes densités tensorielles  $\mathfrak{A}$ ,  $\Theta$  et  $\mathcal{B}$ , et préciser leurs sens physiques.

Si dans un solide en mouvement on considère des surfaces initialement définies par leurs grandeurs et orientations dans le solide au repos, et qu'on suppose ces surfaces entraînées et déformées par le mouvement du solide; si l'on mesure les forces qui s'exercent à travers ces surfaces déformées [mesures faites par des observateurs entraînés] en rapportant ces forces à des axes fixes, ce sont les  $\mathcal{B}_\kappa$  que l'on détermine. Ce sont ces grandeurs, en particulier, que considère toujours M. Born.

Si l'on considère, au milieu du solide en mouvement, un élément de surface idéal, rigide et immobile, constituant une sorte de maille fixe d'un réseau de coordonnées, au travers duquel le milieu se meut comme un liquide passant dans les mailles d'un grillage, et qu'on veuille évaluer les actions qui s'exercent au travers de cet élément de surface idéal, il faudra utiliser la densité tensorielle  $\Theta'$  de (x. 97).

Ces diverses définitions sont assez délicates, et demandent à être très nettement précisées, c'est pourquoi nous avons jugé nécessaire d'insister un peu longuement. Des confusions se sont souvent produites, du fait que ces diverses grandeurs sont identiques, au premier ordre, à un facteur 2 près; nous avons en effet établi les relations suivantes :

$$(x. 88) \quad \Theta^{ik} = \frac{2}{\Delta} \sum_{ij} \alpha_i^k \alpha_j^i \mathfrak{A}^{ij},$$

mais en *axes cartésiens orthogonaux*, nous avons :

$$(x. 30) \quad \alpha_i^k = \delta_i^k + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \approx \delta_i^k$$

$\alpha_i^k$  se réduit à 1 ou zéro suivant que  $k$  et  $i$  sont égaux ou inégaux, lorsqu'on néglige la dérivée partielle  $\frac{\partial u^k}{\partial x^i}$  qui n'apporte dans les formules finales que des corrections d'ordre supérieur; donc :

$$\Theta^{ik} \approx 2\mathfrak{A}^{ik}$$

au premier ordre

le déterminant  $\Delta$ , à la même approximation, se réduit à l'unité ; la formule (x. 89) nous donne alors :

$$\mathcal{A}^{ik} = \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial e_{ik}} \approx \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial \left( \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \right)} = \mathcal{B}_l^k,$$

d'après (x. 121) ; lorsqu'on ne développe aucune de ces expressions au delà des termes linéaires en  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , on trouve donc :

$$\mathcal{A}^{ik} \approx \mathcal{B}_l^k \approx \frac{1}{2} \Theta_{lk}.$$

Les définitions rigoureuses deviennent indispensables, aussitôt qu'on veut pousser au delà de cette première approximation. Il faut alors préciser nettement la grandeur que l'on étudie ; suivant les auteurs, ce sera  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  ou  $\Theta$ .

#### XIV. — *Un principe général de minimum.*

Pour de très nombreux problèmes, il est commode de ramener la théorie générale à un principe de minimum ; ceci peut être fait d'une manière simple, en se rattachant au principe général des travaux virtuels, qui régit toute la mécanique. Prenons le solide déformé ; les forces élastiques équilibrent, sur chaque élément de volume, les forces extérieures appliquées au solide et les forces d'inertie. Tout système de déplacements arbitraires doit donc donner un travail virtuel total nul.

En particulier, prenons une portion du solide, qui n'est soumise à aucune force extérieure et se trouve au repos (pas de forces d'inertie) ; dans ces conditions, il n'y a plus que les forces d'élasticité qui restent en jeu ; effectuons des déplacements virtuels arbitraires ; le travail virtuel est égal à l'accroissement d'énergie interne ; ce travail est nul, donc l'accroissement de l'énergie interne est aussi nul.

Pour une portion du solide, au repos, et soumise à nulle force extérieure, l'intégrale de la densité d'énergie potentielle doit être un minimum. L'énergie potentielle totale est minima.

Cette règle permet de déterminer la nature des déformations possibles, dans certaines conditions imposées. Si l'on ne sait pas trouver les déformations exactes du solide, on pourra se donner un système de déformations simples, assez voisines de la vérité, et on ajustera les grandeurs de ces déformations de manière à rendre minima l'énergie potentielle élastique totale. Il faudra ensuite évaluer l'erreur commise par la simplification arbitraire apportée au système des déformations.

## CHAPITRE XI

### ONDES ÉLASTIQUES DANS LES SOLIDES

#### *I. — Propagation des ondes élastiques dans un cristal.*

Les formules générales d'élasticité, établies au chapitre X, vont nous servir à discuter la propagation d'ondes élastiques et les modes de vibration propres d'un solide; pour ces applications, ce seront les formules de Boussinesq (coordonnées de Lagrange) qui nous seront les plus commodes. Nous prendrons un solide, soumis initialement à une certaine déformation arbitraire, et dont la densité d'énergie potentielle sera définie par les formules du chapitre X, § 8; cette énergie potentielle se compose de l'énergie  $\mathcal{E}$  de déformation élastique, et de l'énergie  $H$  du système des forces extérieures permanentes, qui provoquent une certaine déformation initiale; récrivons cette formule, *développée par rapport aux déformations* :

$$(x. 69) \quad \mathcal{E} + H = \mathcal{E}_0 + H_0 + \mathcal{E}_2 + H_2 + \dots$$

Les termes du 1<sup>er</sup> degré ont disparu de cette somme. Nous effectuons maintenant un développement, *non plus par rapport aux déformations, mais par rapport aux dérivées partielles*  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  du déplacement :

$$\mathcal{E} + H = \mathcal{E}_0 + H_0 + E_2 \dots$$

$$(xi. 1) \quad E_2 = \sum_{ijkl} \mathcal{K}_{ij,kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

et nous arrêtons le développement aux termes  $E_2$  du second degré par rapport aux dérivées partielles. Cela se fera facilement; nos  $\mathcal{E}_2$  et  $H_2$  sont du second degré par rapport aux déformations (x. 26), lesquelles comprennent des termes du 1<sup>er</sup> ou 2<sup>e</sup> degré par rapport aux dérivées partielles; pour nous limiter en (xi. 1), il suffira d'employer pour les déformations les expressions simplifiées (x. 27), valables seulement pour de très petites déformations supplémentaires, à partir de notre nouvel état initial :

$$(xi. 2) \quad e_{11} = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Or, nous avons en (x. 64, 66) :

$$(xi. 3) \quad \mathcal{E}_2 + H_2 = \sum_{ijkl} (\Lambda^{ij,kl} + \Lambda_1^{j,kl}) e_{ij} e_{kl}$$

d'où résulte :

$$\mathcal{G}_{ij,kl} = \Lambda^{ij,kl} + \Lambda^{ji,kl} + \Lambda^{ij,lk} + \Lambda^{ji,lk} + \Lambda_i^{ij,kl} \dots = 4[\Lambda^{ij,kl} + \Lambda_i^{ij,kl}]$$

on prendrait pour  $\Lambda_i$  les 4 permutations d'indices comme pour  $\Lambda$ ; nous n'avons pas à faire ici la permutation du groupe  $ij$  avec le groupe  $kl$ , car les sommes  $\Sigma$  en  $i, j, k, l$ , sont faites indépendamment sur chacun des 4 indices, et de la même manière dans toutes les formules (x. 66) ou (xi. 1). Nous tiendrons compte de ce fait dans les applications (cf. xi. 4). Les expressions montrent que les  $\mathcal{G}$  comme les  $\Lambda$  et  $\Lambda_i$  forment une densité tensorielle symétrique en  $ij$ , en  $kl$  et en  $(ij)$ ,  $(kl)$ .

Pour toutes les formules de Boussinesq, nous restons en axes cartésiens, et la place des indices n'a plus d'importance.

Nous ne précisons pas davantage la nature des coefficients  $\Lambda$  ou  $\mathcal{G}$ , de sorte que nos formules soient valables pour un milieu cristallisé anisotrope tout à fait quelconque, initialement soumis à une déformation arbitraire, mais *homogène de densité uniforme*.

Les quantités  $\mathcal{B}_k^i$  de (x. 121) ont pour valeurs :

$$(xi. 4) \quad \mathcal{B}_j^i = \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = \sum_{kl} (\mathcal{G}_{ij,kl} + \mathcal{G}_{kl,ij}) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = 2 \sum_{kl} \mathcal{G}_{ij,kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

on doit tenir compte de la symétrie des  $\mathcal{G}$ .

Nous voulons chercher comment se propage une *onde plane*, dont la direction est définie par ses cosinus directeurs  $q_1, q_2, q_3$ , mais dont la forme  $\varphi(t)$  reste arbitraire. Les déplacements sont supposés du type suivant :

$$(xi. 5) \quad u_i = A_i \varphi \left[ t - \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3}{W} \right]$$

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{q_j}{W} A_i \varphi'.$$

Le vecteur  $A_i$  définit la direction de vibration ; nous avons une fonction arbitraire  $\varphi$ , de forme quelconque mais petite, de façon que les déplacements  $u_i$  soient toujours très petits.

Nous ignorons *a priori* la valeur de la vitesse de propagation  $W$  et de la direction de vibration  $\vec{A}$  ; ce sont ces quantités qu'il va falloir déterminer. La propagation ne peut se faire sans déformation que si nous avons des déplacements  $u_i$  assez petits pour qu'on puisse négliger complètement, dans l'énergie (xi. 1) les termes  $E_3, E_4, \dots$  d'ordre supérieur à 2, *par rapport aux dérivées partielles*  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Supposons que cela soit possible ; le développement des  $\mathcal{B}_j^i$  s'arrêtera au 1<sup>er</sup> degré (xi. 4) et les équations de Boussinesq (x. 119) nous donneront :

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{B}_j^i}{\partial x^i} = \rho \frac{d^2 u_j}{dt^2}$$

$$\text{or, d'après (xi. 4 et 5)} \quad \mathcal{B}_j^i = - 2 \sum_{lk} \mathcal{G}_{ij,kl} \frac{q_l}{W} A_k \varphi'.$$



La dérivée seconde  $\varphi''$  va figurer à droite et à gauche, et il reste :

$$(xi. 6) \quad 2 \sum_{ikl} \mathcal{G}_{ijkl} A_k \frac{q_l q_i}{W^2} = \rho A_j \quad 3 \text{ équations } j = 1, 2, 3.$$

Nous saisisons mieux la signification de ces équations si nous formons l'expression  $T - E_2$ , où  $T$  est la densité d'énergie cinétique, rapportée à un volume initialement égal à l'unité (comme c'est la convention aussi pour  $E_2$ ) :

$$(xi. 7) \quad T = \frac{1}{2} \rho \varphi'^2 [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2] = \frac{1}{2} \rho \varphi'^2 |A|^2$$

$$T - E_2 = \frac{\varphi'^2}{W^2} \left[ \frac{1}{2} \rho W^2 |A|^2 - \sum_{ijkl} \mathcal{G}_{ijkl} q_j q_l A_j A_k \right].$$

C'est une forme quadratique homogène par rapport aux amplitudes  $A_1 A_2 A_3$ , et les équations (xi. 6) se traduisent ainsi :

$$(xi. 8) \quad \frac{\partial}{\partial A_j} (T - E_2) = 0 \quad j = 1, 2, 3.$$

Ces conditions signifient que la forme quadratique doit être stationnaire, elles entraînent d'ailleurs, par suite de l'homogénéité du 2<sup>e</sup> degré, la relation :

$$(xi. 9) \quad 2(T - E_2) = \sum_j A_j \frac{\partial (T - E_2)}{\partial A_j} = 0.$$

Cette équation définit, dans l'espace  $A_1 A_2 A_3$ , un ellipsoïde ; les directions des axes de cet ellipsoïde sont trois directions perpendiculaires entre elles, que nous appellerons  $\alpha\beta\gamma$ , et qui satisfont aux équations (xi. 8). Elles définissent les directions de vibration permettant une propagation du type (xi. 5) sans déformation ; les longueurs des axes de l'ellipsoïde nous fourniront les vitesses de propagation  $W_\alpha W_\beta W_\gamma$  de ces trois ondes simples. Reprenons ce raisonnement en langage tensoriel ; nous avons des coefficients  $\mathcal{G}_{ijkl}$  symétriques en  $ij$ , en  $kl$  et pour l'échange de  $ij$  avec  $kl$  ; dans les formules (xi. 6 ou 7) nous formons une combinaison contractée, en multipliant ces coefficients par des composantes du vecteur  $q$  de longueur 1. Nous obtenons ainsi une densité tensorielle symétrique :

$$(xi. 10) \quad \mathcal{N}_{jk} = \sum_{il} \mathcal{G}_{ijkl} q_l q_i.$$

Si nous passons des axes  $x^1 x^2 x^3$  aux nouveaux axes rectangulaires  $\alpha\beta\gamma$  nous ramenons cette densité tensorielle à la forme diagonale :

$$(xi. 11) \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{N}_\gamma \end{pmatrix}.$$

Projetons donc le déplacement  $A$  sur les  $\alpha\beta\gamma$  au lieu de le projeter sur les axes anciens  $x^1 x^2 x^3$  et nous aurons :

$$(xi. 12) \quad \frac{W^2}{\varphi'^2} E_2 = \sum_{jk} \mathcal{N}_{jk} A_j A_k = \mathcal{N}_\alpha A_\alpha^2 + \mathcal{N}_\beta A_\beta^2 + \mathcal{N}_\gamma A_\gamma^2.$$

La relation (xi. 9) s'écrit donc :

$$T - E_2 = \frac{\tau'^2}{W^2} \left[ \frac{1}{2} \rho W^2 |A|^2 - \partial \pi_\alpha A_\alpha^2 - \partial \pi_\beta A_\beta^2 - \partial \pi_\gamma A_\gamma^2 \right] = 0.$$

Prenons une vibration suivant la direction  $\alpha$ , nous aurons  $|A| = A_\alpha$ , et la relation précédente nous donne la vitesse de propagation  $W_\alpha$  de l'onde vibrant suivant  $\alpha$  :

$$(xi. 13) \quad \frac{1}{2} \rho W_\alpha^2 = \partial \pi_\alpha.$$

De même :

$$\frac{1}{2} \rho W_\beta^2 = \partial \pi_\beta \quad \frac{1}{2} \rho W_\gamma^2 = \partial \pi_\gamma.$$

Nous vérifions facilement que les relations (xi. 6) sont ainsi satisfaites ; elles prennent la forme :

$$2 \sum_k \partial \pi_{jk} \lambda_k = \rho W^2 A_j$$

ce qui, en axes  $\alpha\beta\gamma$ , se réduit à :

$$2 \partial \pi_\alpha A_\alpha = \rho W_\alpha^2 A_\alpha.$$

La relation (xi. 9) entraîne une conséquence physique importante : dans une onde plane se propageant librement, la densité d'énergie cinétique  $T$  est constamment égale à la densité d'énergie potentielle  $E_2$ , limitée aux termes du second degré par rapport aux dérivées partielles du déplacement.

Dans un corps anisotrope homogène, il y a donc toujours trois directions  $\alpha\beta\gamma$  de vibration, perpendiculaires entre elles, qui donnent des ondes planes se propageant dans une direction de cosinus directeurs  $q_1, q_2, q_3$ , donnés.

Si nous revenons au solide homogène isotrope, nous allons voir qu'une des directions de vibration sera dans la direction de propagation (onde longitudinale), tandis que les deux autres sont perpendiculaires au rayon (ondes transversales). Nous aurions pour le solide isotrope homogène une densité d'énergie potentielle du type (x. 71, 107 ou 113) ; limitons-nous au cas du solide sous pression extérieure uniforme (x. 107) :

$$(x. 107) \quad \mathcal{E} + H = \mathcal{E}_0 + H_0 + \frac{\lambda_a}{8} I_1^2 + \frac{\mu_a}{4} I_2$$

$$\lambda_a = \lambda + p \quad \mu_a = \mu - p.$$

Nous avons insisté au chapitre X (p. 244) sur le sens de ces coefficients apparents  $\lambda_a$  et  $\mu_a$ . Développons et gardons les termes du second degré par rapport aux dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial x}$  :

$$I_1 = 2 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right]$$

$$I_2 = 4 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \dots$$

Les termes non écrits se déduisent des précédents par permutation circulaire 1. 2. 3. Nous trouvons donc :

$$E_2 = \frac{\lambda_a}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots \right)^2 + \mu_a \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \dots \right]$$

$$= \frac{\lambda_a \varphi'^2}{2W^2} [q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3]^2 + \frac{\mu_a \varphi'^2}{W^2} [q_1^2 A_1^2 + \dots + \frac{1}{2} (q_1 A_2 + q_2 A_1)^2 \dots]$$

en tenant compte de (xi. 5). Posons maintenant :

$$(xi. 14) \quad \begin{aligned} |A|^2 &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \\ L &= A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 \quad \text{composante longitudinale.} \end{aligned}$$

La formule (xi. 9) se transcrit alors ainsi :

$$(xi. 15) \quad T - E_2 = \frac{\varphi'^2}{2W^2} [(\rho W^2 - \mu_a) |A|^2 - (\lambda_a + \mu_a) L^2] = 0.$$

L'ellipsoïde, dont nous parlions plus haut, est ici de révolution autour de la direction de propagation ; la composante L du déplacement suivant le rayon peut varier de + A à - A, suivant l'orientation de la vibration A ; l'expression  $T - E_2$  est maxima ou minima pour :

$$(xi. 16) \quad \begin{cases} L = A & \text{vibration longitudinale} \\ L = 0 & \text{vibration transversale} \end{cases} \quad \begin{aligned} W_l^2 &= \frac{\lambda_a + 2\mu_a}{\rho} = \frac{\lambda + 2\mu - p}{\rho} \\ W_{tr}^2 &= \frac{\mu_a}{\rho} = \frac{\mu - p}{\rho}. \end{aligned}$$

Ces formules mettent en évidence une influence de la pression extérieure p sur les vitesses de propagation des ondes. Nous avons discuté les ordres de grandeur au chapitre X, § 12 ; l'effet de la pression est faible et pourra être en général négligé ; il ne devient notable qu'aux pressions énormes et pourrait jouer un rôle en physique du globe. La pression intervient aussi dans certains problèmes relatifs aux efforts exercés par des ondes élastiques <sup>(1)</sup> (pressions de radiation) dont nous parlerons à la fin de ce chapitre.

## II. — Vibrations propres d'un volume parallélépipédique rectangle ; conditions cycliques.

C'est un problème important, pour un grand nombre d'applications et pour les théories modernes des corps solides, que celui de la décomposition des vibrations d'un certain volume solide en vibrations propres. Nous l'examinerons dans différentes conditions et nous commencerons par l'exemple d'un volume parallélépipédique rectangle, soumis aux conditions cycliques de Born ; le solide pourra être anisotrope, mais homogène.

Nous prendrons pour la densité d'énergie potentielle l'expression (xi. 1) arrêtée aux termes du second degré par rapport aux dérivées  $\frac{\partial u}{\partial x}$  du déplace-

<sup>(1)</sup> L. BRILLOUIN. Sur les tensions de radiation. *Annales de Physique*, X, t. 4, 1925, p. 528.

ment. C'est seulement à cette approximation qu'on trouve des ondes se propageant sans déformation ; si l'on tient compte des termes d'ordre supérieur par rapport aux dérivées, les ondes se déforment au cours du temps, ce qui entraîne d'assez grandes complications.

Prenons un parallélépipède rectangle, d'arêtes  $l_1, l_2, l_3$  parallèles aux trois axes et de volume :

$$(xi. 17) \quad V = l_1 l_2 l_3.$$

Nous supposons, sur la surface limite de ce parallélépipède, des *conditions cycliques*. Cela revient à admettre que ce volume fait partie d'un solide illimité, dans lequel nous choisissons les mouvements qui se reproduisent périodiquement dans l'espace, avec des périodes  $l_1$  en  $x_1$ ,  $l_2$  suivant  $x_2$  et  $l_3$  suivant  $x_3$  ; le mouvement en un point  $x_1 x_2 x_3$  devra donc être identique à celui qui se produit en  $x_1 + m_1 l_1, x_2 + m_2 l_2, x_3 + m_3 l_3$ , où  $m_1, m_2, m_3$  sont trois entiers quelconques, positifs ou négatifs :

$$(xi. 18) \quad u_h(x_1, x_2, x_3) = u_h(x_1 + m_1 l_1, x_2 + m_2 l_2, x_3 + m_3 l_3).$$

Ces conditions ont pour résultat qu'en connaissant le mouvement dans le volume  $V$  on le connaît aussitôt pour tout l'espace, car il se reproduit périodiquement dans tous les parallélépipèdes adjacents à  $V$  et jusqu'à l'infini.

D'après (xi. 18), le déplacement  $u_h$  doit être une fonction périodique en  $x_1, x_2, x_3$  ; nous pourrions donc le développer en série de Fourier triple :

$$(xi. 19) \quad u_h = \sum_{a_1 a_2 a_3} A_{h a_1 a_2 a_3}(t) e^{2\pi i(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)}$$

Un développement de ce type satisfait automatiquement aux conditions cycliques (xi. 18), si l'on choisit ainsi les coefficients  $a$  :

$$a_1 = \frac{n_1}{l_1} \quad a_2 = \frac{n_2}{l_2} \quad a_3 = \frac{n_3}{l_3} \quad n_1, n_2, n_3 \text{ entiers.}$$

La sommation de (xi. 19) est étendue à toutes les combinaisons de trois entiers  $n_1, n_2, n_3$  positifs ou négatifs. Le déplacement  $u_h$  doit être réel, ce que nous obtenons en spécifiant :

$$(xi. 20) \quad A_{h, a_1, a_2, a_3} = A_{h, -a_1, -a_2, -a_3}^*$$

où l'astérisque  $*$  indique l'imaginaire conjuguée ; ces deux fonctions du temps  $t$  doivent toujours rester imaginaires conjuguées. La décomposition (xi. 19) nous intéressera, si elle permet de trouver des *variables* nouvelles *séparées*, grâce auxquelles les énergies cinétiques et potentielles se présentent comme des sommes de carrés. La formule (xi. 19) fait apparaître une décomposition en ondes planes ; le vecteur  $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$  est normal au plan d'ondes.

Il nous faut calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle totales, pour le volume  $V$ . Commençons par l'énergie cinétique :

$$(xi. 21) \quad E_{cin} = \frac{\rho}{2} \int_V (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) d\tau = \frac{\rho}{2} \int_V \sum_h \sum_a \sum_{a'} A_{h, a} A_{h, a'} e^{2\pi i((a+a') \cdot r)} d\tau.$$

Pour simplifier l'écriture nous inscrivons un seul indice,  $a$  ou  $a'$  pour

représenter un triplet de nombres  $a_1, a_2, a_3$  ou  $a'_1, a'_2, a'_3$ ; les expressions telles que  $(a.r)$  représentent des produits scalaires :

$$\begin{aligned}(a.r) &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ ((a + a').r) &= (a_1 + a'_1)x_1 + (a_2 + a'_2)x_2 + (a_3 + a'_3)x_3.\end{aligned}$$

Les points indiquent les dérivées par rapport au temps.

Les  $a$  et  $a'$  étant définis en (xi. 19) par deux séries d'entiers différents, l'intégrale de volume  $V$  est nulle, sauf dans le cas spécial :

$$\vec{a}' = -\vec{a} \qquad a'_1 = -a_1 \qquad a'_2 = -a_2 \qquad a'_3 = -a_3.$$

Nous obtenons alors une intégrale égale à  $V$ . L'énergie cinétique se présente donc finalement ainsi :

$$\begin{aligned}(\text{xi. 22}) \quad E_{\text{cin}} &= \rho \frac{V}{2} \sum_h \sum_a A_{h,a} A_{h,-a} = M \sum_h \sum_a A_{h,a} A_{h,-a} \\ M &= \rho V \qquad \text{masse totale du solide.}\end{aligned}$$

Cette expression est réelle, en vertu des relations (xi. 20). Dans la sommation le même terme se retrouve deux fois, pour  $a_1a_2a_3$  et  $-a_1-a_2-a_3$ . Il vaut mieux regrouper ces deux termes, doubler la formule, et indiquer une sommation  $\Sigma'$  faite de manière à n'obtenir chaque terme qu'une seule fois; nous adopterons la convention :

$$(\text{xi. 23}) \quad \Sigma'_a \text{ signifie } a_1 > 0 \qquad a_2, a_3 \text{ positifs ou négatifs.}$$

C'est ce que suppose la seconde forme de l'équation (xi. 22).

Pour l'énergie potentielle, nous suivrons une voie analogue; la densité d'énergie potentielle du solide anisotrope (xi. 1) se décompose en une somme de termes :

$$E_2 = \sum_a \sum_{a'} \sum_{ijkl} \mathfrak{T}_{ij,kl} A_{ja} A_{ka'} 2\pi i a_1 2\pi i a'_1 e^{2\pi i((a+a').r)};$$

lorsque nous intégrons sur le volume  $V$ , pour obtenir l'énergie totale, tous les termes disparaissent, sauf ceux où  $\vec{a}' = -\vec{a}$  et il reste :

$$(\text{xi. 24}) \quad E_{\text{pot}} = \int_V E_2 d\tau = + 8\pi^2 V \Sigma' \sum_{a \quad ijkl} \mathfrak{T}_{ij,kl} A_{j,a} A_{k,-a} a_i a_l,$$

comme pour l'énergie cinétique, nous avons doublé le résultat et introduit une somme  $\Sigma'$  du type (xi. 23). Considérons un de ces termes, où le vecteur de propagation  $\vec{a}$  est donné. Nous pourrions simplifier son expression, en décomposant les déplacements  $A_a$  et  $A_{-a}$  non plus par rapport aux axes fixes  $x_1x_2x_3$  mais par rapport aux directions  $\alpha\beta\gamma$  définies au paragraphe précédent; appelons, comme alors  $q_1, q_2, q_3$  les cosinus directeurs de la direction de propagation, de sorte que :

$$(\text{xi. 24 bis}) \quad a_i = |a| q_i \qquad \mathfrak{T}_{ij,kl} a_i a_l = |a|^2 \mathfrak{T}_{ij,kl} q_i q_l$$

et introduisons la densité tensorielle à 2 indices  $\mathfrak{N}_{ik}$  définie en (xi. 10). La formule (xi. 24) se présente alors ainsi :

$$E_{\text{pot}} = 8\pi^2 V \Sigma' |a|^2 \sum_{jk} \mathfrak{N}_{jk} A_{j,a} A_{k,-a}.$$

Passons maintenant dans le système d'axes  $\alpha\beta\gamma$ , orthogonaux, qui ramène

la densité tensorielle  $\mathfrak{M}_{ik}$  à la forme diagonale (xi. 11); appelons  $A_{\alpha a}$  les composantes du déplacement  $A$  suivant ces nouveaux axes; notre énergie potentielle se présente alors ainsi :

$$\begin{aligned} \text{(xi. 25)} \quad E_{\text{pot}} &= 8\pi^2 V \sum'_{\alpha\beta\gamma} |a|^2 \mathfrak{M}_{\alpha a, \alpha a} A_{\alpha, a} A_{\alpha, -a} \\ &= 4\pi^2 M \sum'_{\alpha\beta\gamma} v_a^2 A_{\alpha, a} A_{\alpha, -a}. \end{aligned}$$

Les  $\mathfrak{M}_{\alpha}$  s'expriment, en effet, au moyen des vitesses de propagation  $W_{\alpha}$  par les relations (xi. 13), et nous pouvons introduire les fréquences  $\nu_{\alpha}$  des vibrations propres de la manière suivante :

$$\text{(xi. 26)} \quad \mathfrak{M}_{\alpha} = \frac{1}{2} \rho W_{\alpha}^2 \quad |a| = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu_{\alpha}}{W_{\alpha}} = \frac{\nu_{\beta}}{W_{\beta}} = \frac{\nu_{\gamma}}{W_{\gamma}}.$$

Lorsque le vecteur  $\vec{a}$  est donné, la direction de propagation de l'onde et sa longueur d'onde  $\lambda$  sont fixées d'après (xi. 24 bis et 26); ce qui reste dans l'énergie potentielle, ce sont les fréquences  $\nu$ ; lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  est fixée, les trois fréquences  $\nu$  correspondant aux 3 directions de vibra-

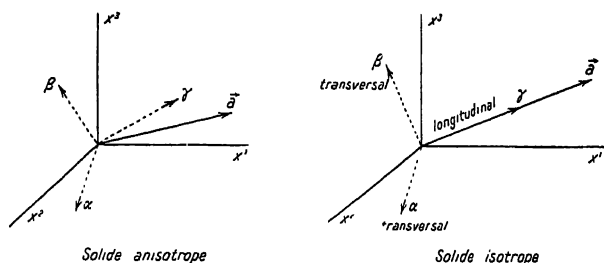


Fig. xi. 1.

tions  $\alpha\beta\gamma$  sont différentes, parce que ces 3 vibrations ont des vitesses  $W$  de propagation différentes.

Si notre solide est isotrope, les coefficients d'élasticité se réduisent à deux; les directions de vibration  $\alpha\beta\gamma$  sont l'une longitudinale ( $\gamma$ ) et les deux autres transversales ( $\alpha\beta$ ) comme on le voit sur la figure xi. 1. On a alors, tout comme en (xi. 16) :

$$\begin{aligned} W_{\alpha} = W_{\beta} = W_{tr} &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\rho}} & \nu_{\alpha} = \nu_{\beta} & \text{vibration transversale} \\ W_{\gamma} = W_l &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu_a}{\rho}} & \nu_{\gamma} & \text{vibration longitudinale} \end{aligned}$$

on ne confondra pas la longueur d'onde  $\lambda$  avec les coefficients de Lamé apparents  $\lambda_a \mu_a$ .

Avec les variables  $A_{\alpha, a}(t)$  nous avons trouvé un système de grandeurs qui simplifie beaucoup l'expression des énergies cinétique et potentielle, rapportées au volume  $V$ ; mais ces variables ne sont pas indépendantes; d'une part, à cause des relations (xi. 20), et d'autre part, du fait que les expressions (xi. 22 et 25) des énergies ne sont pas des sommes de carrés.

Séparons les parties réelles et imaginaires, en posant les formules ci-dessous, qui satisfont automatiquement à la condition (xi. 20) :

$$(xi. 27) \quad A_{\alpha,a} = \frac{i}{2} (\xi_{\alpha,a} + i\eta_{\alpha,a}) \quad A_{\alpha,-a} = \frac{i}{2} (\xi_{\alpha,a} - i\eta_{\alpha,a}).$$

Nos énergies se transforment ainsi :

$$(xi. 28) \quad \begin{cases} E_{cin} = \frac{M}{4} \sum_a [\dot{\xi}_{\alpha,a}^2 + \dot{\xi}_{\beta,a}^2 + \dot{\xi}_{\gamma,a}^2 + \dot{\eta}_{\alpha,a}^2 + \dot{\eta}_{\beta,a}^2 + \dot{\eta}_{\gamma,a}^2] \\ E_{pot} = \frac{M}{4} \sum_a 4\pi^2 [\nu_{\alpha}^2 (\xi_{\alpha,a}^2 + \eta_{\alpha,a}^2) + \nu_{\beta}^2 (\xi_{\beta,a}^2 + \eta_{\beta,a}^2) + \nu_{\gamma}^2 (\xi_{\gamma,a}^2 + \eta_{\gamma,a}^2)]. \end{cases}$$

Le facteur  $\frac{i}{2}$  de (xi. 27) nous permet de faire apparaître le même coefficient  $\frac{M}{4}$  dans les deux formules (xi. 28). Chacune des coordonnées  $\xi$  ou  $\eta$  correspond à une masse  $M' = \frac{i}{2} M$ , ce qui s'explique aisément, si l'on examine la nature du mouvement créé, dans tout le solide, par une de ces variables  $\xi$  ou  $\eta$  ; ces variables représentent en effet les amplitudes d'ondes stationnaires ; en combinant (xi. 19) et (xi. 27) on obtient :

$$(xi. 29) \quad u_h = \sum_{\alpha\beta\gamma} \xi_{\alpha,a}(t) \cos 2\pi(a.r) + \eta_{\alpha,a}(t) \sin 2\pi(a.r) \\ (a.r) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

Pour obtenir le déplacement  $u_h$  suivant un axe  $x_h$ , il faut faire la somme de toutes les ondes stationnaires en  $\xi_{\alpha,a}$  et  $\eta_{\alpha,a}$  et projeter les directions  $\alpha\beta\gamma$  de vibration sur l'axe  $h$ . Une onde stationnaire  $\xi$  ou  $\eta$  ne met en mouvement que la moitié de la masse totale  $M$ .

Les sommations  $\sum'$  sont prises pour  $a_1 > 0$  et  $a_2, a_3$  quelconques (xi. 23) ; à chaque jeu de valeurs  $a_1a_2a_3$  ainsi limitées correspondent 6 variables  $\xi$  et  $\eta$  ; au total, le nombre des variables indépendantes est de 6 fois les  $a_1, a_2, a_3$  limités ou de 3 fois les  $a_1a_2a_3$  pris sans restriction, tous trois positifs ou négatifs ; nous discuterons ce point au paragraphe 4, un peu plus loin.

Nous avons raisonné sur un solide continu ; un solide réel sera composé d'un nombre limité de particules ; pour un corps monoatomique, par exemple, nous aurons  $N$  atomes identiques dans le volume  $V$  ; ces  $N$  atomes ont  $3N$  degrés de liberté ; nous devons décompter les 3 translations et les 3 rotations d'ensemble, il restera donc  $3N - 6$  degrés de vibration ; nous devons trouver seulement ce nombre de vibrations propres  $\xi\eta$ , ce qui signifie que le nombre  $\mathfrak{N}$  des groupes de valeurs  $a_1a_2a_3$  devra être :

$$(xi. 30) \quad \mathfrak{N} = N - 2 \\ 3\mathfrak{N} = 3N - 6$$

représentera le nombre des variables  $\xi\eta$  ; comme  $N$  est extrêmement grand, on négligera les corrections 2 ou 6 dans les applications.

Les formules montrent que les  $\xi_{\alpha,a}$ ,  $\eta_{\alpha,a}$  possèdent, deux à deux, la même fréquence  $\nu_{\alpha}$  ; c'est ce que l'on nomme un cas de *dégénérescence*. Dans l'exemple du solide isotrope, la dégénérescence est même plus complète puisque les deux vibrations transversales  $\alpha\beta$  ont même fréquence, de sorte que les 4 variables  $\xi_{\alpha a}\eta_{\alpha a}\xi_{\beta a}\eta_{\beta a}$  ont même fréquence.

Les expressions des énergies sont exactement celles des vibreurs harmoniques de fréquence  $\nu$  ; la résolution donnera donc pour les  $\xi$  ou  $\eta$  des oscillations sinusoïdales  $\nu$  ; lorsqu'on passera en mécanique quantique, chacun de ces oscillateurs ne pourra prendre l'énergie que par quantum  $h\nu$  ; la décomposition en vibrations propres, telles que nous venons de la faire est essentielle à ce point de vue.

Examinons de plus près la signification de la dégénérescence entre les variables  $\xi_{x,a}$  et  $\eta_{x,a}$ . Prenons deux axes  $\xi$  et  $\eta$  et un point M dans le plan

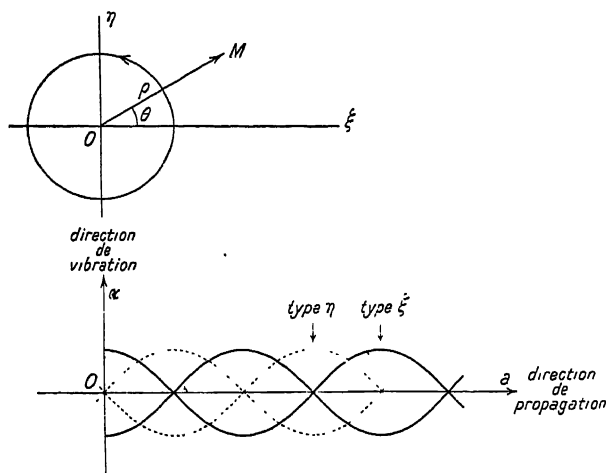


Fig. XI. 2.

$\xi\eta$  de la figure XI. 2 ; un mouvement du point M représentera un certain mode de vibration du corps solide ; les fréquences  $\nu$  étant les mêmes suivant les axes  $\xi$  et  $\eta$  la force de rappel qui agit sur le point fictif M est toujours dirigée suivant le rayon  $\rho$  ; il y a conservation de la quantité de mouvement du point M dans son plan ; le tableau suivant donne la correspondance entre les mouvements du point M et les modes de vibration du solide :

TABLEAU I

OSCILLATEUR FICTIF $\xi\eta$	CORPS SOLIDE
Oscillation suivant l'axe $\xi$ .	Onde stationnaire en $\cos 2\pi (a. r.)$ .
Oscillation suivant l'axe $\eta$ .	Onde stationnaire en $\sin 2\pi (a. r.)$ .
Oscillation suivant la direction $\theta$ .	Onde stationnaire en $\cos[2\pi (a. r.) - \theta]$ .
Mouvement circulaire direct.	Onde libre se propageant vers la droite.
Mouvement circulaire inverse.	Onde libre se propageant vers la gauche.
Mouvement elliptique.	Superposition d'ondes stationnaires et d'une onde libre.
Renversement du sens de rotation.	Réflexion de l'onde libre sur un miroir avec renversement du sens de propagation.



A la conservation du moment d'impulsion (plan  $\xi\eta$ ) correspond la conservation de l'énergie se propageant sous forme d'onde libre, dans le solide. La distinction entre ondes stationnaires et ondes libres repose exclusivement sur la valeur de la *différence de phase* entre  $\xi$  et  $\eta$ ; c'est un point qu'il ne faut pas perdre de vue, lorsqu'on fait des applications de cette méthode de décomposition; on a souvent omis ce rôle de la phase <sup>(1)</sup>, et créé ainsi de nombreuses confusions, car les propriétés des ondes stationnaires ou des ondes libres ne sont pas du tout les mêmes.

### III. — Réflexion d'une onde élastique sur une paroi plane.

Pour étudier les vibrations propres d'un certain volume  $V$  du corps élastique, nous avons utilisé au paragraphe précédent des conditions aux limites très particulières. Ces « conditions cycliques » évitent toute réflexion sur les parois, et permettent ainsi une décomposition très simple des mouvements vibratoires; mais on doit reconnaître que ces conditions aux limites sont assez artificielles, et ne correspondent à aucune circonstance physiquement réalisable. Nous allons discuter rapidement ce qui se produit, dans des problèmes physiques réels, afin de nous rendre compte des difficultés et des complications que l'on rencontre.

En deux mots, les faits sont les suivants: supposons une paroi plane, qui pourra limiter un corps élastique ou bien séparer deux corps différents. Dans chacun des corps, nous avons pour chaque direction de propagation trois types d'ondes planes, avec vibrations dirigées suivant les axes  $\alpha\beta$  ou  $\gamma$ . Supposons d'abord une paroi plane limitant un solide, et certaines conditions aux limites imposées sur ce plan; si le plan est idéalement rigide, nous devons écrire que les déplacements  $u$  s'annulent; en général, nous devons satisfaire à certaines relations entre les composantes du déplacement et ses dérivées premières. Laissons alors tomber sur le plan limite une onde plane unique, polarisée en  $\alpha$  par exemple. Il nous sera, dans la plupart des cas, impossible de satisfaire aux conditions limites en superposant seulement l'onde incidente  $\alpha$  et une onde réfléchie de même type  $\alpha$ ; nous devons faire intervenir des ondes secondaires  $\beta$  et  $\gamma$ , avec certaines amplitudes convenables; ainsi donc, une onde incidente unique donne trois ondes réfléchies des trois types.

Si le plan limite sépare deux milieux différents, une onde incidente unique donnera trois ondes réfléchies et trois ondes réfractées pénétrant dans le second milieu. C'est dire que le problème se complique beaucoup, et que les réflexions ne permettent plus d'isoler les unes des autres les ondes des divers types et de les étudier séparément.

Nous ne traiterons pas en détail tous ces problèmes de réflexion et réfraction, mais nous prendrons quelques exemples simples, pour montrer comment se produisent ces réflexions complexes.

Nous choisirons la condition la plus simple, mathématiquement, en supposant une paroi sur laquelle les déplacements  $u$  doivent s'annuler.

<sup>(1)</sup> L. BRILLOUIN. *Journ. de Phys.*, t. 6, 1935, p. 185 et *G. R.*, t. 200, 1935, p. 1725.

Prenons donc un milieu solide limité par un plan horizontal ( $y=0$ ) et situé au-dessus de ce plan (fig. xi. 3); le plan  $yo\alpha$  sera le plan d'incidence et une onde incidente longitudinale s'écrira :

$$(xi. 31) \quad \begin{cases} u_x = A \sin \theta \cos \omega \left[ t - \frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{W_l} \right] \\ u_y = -A \cos \theta \cos \omega \left[ t - \frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{W_l} \right] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \theta \text{ angle d'incidence} \\ W_l \text{ vitesse des ondes} \\ \text{longitudinales.} \end{array}$$

une onde réfléchie de même type et d'amplitude B serait :

$$\begin{cases} u'_x = B \sin \theta \cos \omega \left[ t - \frac{x \sin \theta + y \cos \theta}{W_l} \right] \\ u'_y = B \cos \theta \cos \omega \left[ t - \frac{x \sin \theta + y \cos \theta}{W_l} \right] \end{cases}$$

En superposant ces deux ondes, on ne peut pas annuler à la fois  $u_x + u'_x$  et  $u_y + u'_y$  sur le plan réflecteur  $y=0$ . Pour arriver à annuler les déplace-

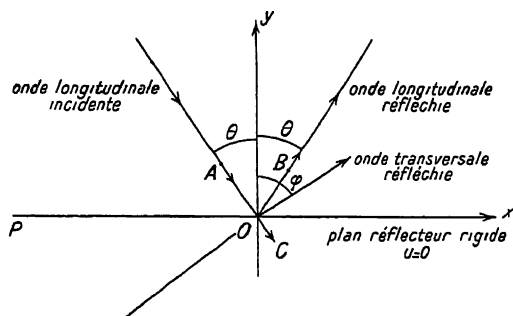


Fig. xi. 3.

ments dans le plan  $y=0$ , nous devons ajouter une onde transversale, réfléchie suivant un angle  $\varphi$  et polarisée dans le plan d'incidence :

$$(xi. 32) \quad \begin{cases} u''_x = C \cos \varphi \cos \omega \left[ t - \frac{x \sin \varphi + y \cos \varphi}{W_{tr}} \right] \\ u''_y = -C \sin \varphi \cos \omega \left[ t - \frac{x \sin \varphi + y \cos \varphi}{W_{tr}} \right] \end{cases}$$

et nous chercherons à satisfaire aux conditions :

$$u_x + u'_x + u''_x = 0 \quad u_y + u'_y + u''_y = 0 \quad \text{pour } y=0.$$

Il faudra tout d'abord que  $u''$  dépende de  $x$  suivant la même loi que  $u$  et  $u'$ , dans le plan  $y=0$ ; donc :

$$(xi. 33) \quad \frac{\sin \theta}{W_l} = \frac{\sin \varphi}{W_{tr}}.$$

C'est la loi de réfraction bien connue : *loi des sinus*; cela fixe l'angle  $\varphi$ ; ensuite nous déterminerons B et C par les relations :

$$(xi. 34) \quad \begin{aligned} (A + B) \sin \theta + C \cos \varphi &= 0 \\ (-A + B) \cos \theta - C \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

ce qui nous donnera les amplitudes B et C des deux ondes longitudinale et transversale réfléchies.

Ainsi donc, sur cet exemple très simple, nous voyons déjà apparaître le genre de complications annoncées précédemment. Les mêmes difficultés se rencontrent si l'on admet que la surface du solide est libre, sans qu'aucun effort ne s'exerce sur elle; cette condition conduit à annuler les dérivées normales du déplacement, et provoque le même genre de réflexions complexes.

Cherchons un type de conditions aux limites qui ne produise pas ces réflexions multiples; nous en trouverons un en posant :

$$(x. 35) \quad u_y = 0 \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0;$$

c'est-à-dire, en général :

$$\left. \begin{array}{l} \text{déplacement normal nul,} \\ \text{dérivée normale nulle pour les déplacements tangentiels.} \end{array} \right\}$$

Ces conditions (x. 35) sont satisfaites, avec nos deux ondes longitudinales (x. 31), auxquelles on donnera même amplitude  $A = B$  :

$$(x. 36) \quad \begin{aligned} u_y + u'_y &= (-A + B) \cos \theta \cos \omega \left[ t - \frac{x \sin \theta}{W_l} \right] \quad \text{plan } y = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u'_x}{\partial y} &= (A - B) \sin \theta \cos \theta \frac{\omega}{W_l} \sin \omega \left[ t - \frac{x \sin \theta}{W_l} \right]. \end{aligned}$$

On vérifierait facilement le fait que les conditions (x. 35) simplifient de la même manière les lois de réflexion des ondes transversales; une onde transversale polarisée dans le plan d'incidence donne une onde réfléchie transversale de même polarisation; une onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence se réfléchit aussi polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

Ces conditions (x. 35) permettent donc de garder la séparation des ondes des trois types, lorsque le milieu solide est isotrope; si l'on avait un milieu anisotrope, avec trois directions de vibration  $\alpha\beta\gamma$  qui ne seraient plus longitudinales et transversales, ces simplifications cesseraient de jouer.

Physiquement, les conditions (x. 35) signifient que le milieu solide est appuyé sur un plan rigide, ses molécules pouvant glisser le long du plan rigide sans effort ni frottement. Le plan limite rigide peut exercer sur le solide des *efforts normaux* (pressions ou tractions normales) mais les efforts tangentiels sont nuls. Prenons, en effet, pour un milieu isotrope, la densité d'énergie potentielle (x. 107) :

$$(x. 37) \quad \mathcal{E} + H = \mathcal{E}_0 + H_0 + \frac{\lambda_a}{8} I_1^2 + \frac{\mu_a}{4} I_2.$$

Le plan limite sera  $x_2 = 0$ , et les conditions limites :

$$\text{Pour } x_2 = 0 \quad u_2 = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0;$$

il en résulte que les déformations  $e_{12}$  et  $e_{32}$  sont nulles ; sur ce plan limite nous avons donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ (xi. 38) \quad I_2 &= 4 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Les efforts qu'exerce le plan limite sur le solide seront pris, par exemple, avec les définitions de Boussinesq (x. 116) ; nous avons, au travers du plan  $x_2 = 0$  les composantes  $\mathcal{B}_1^2$ ,  $\mathcal{B}_2^2$  et  $\mathcal{B}_3^2$  parallèles aux axes 1.2.3 ; donc  $\mathcal{B}_2^2$  est l'effort *normal* et  $\mathcal{B}_1^2, \mathcal{B}_3^2$  sont les efforts tangentiels ; les formules (x. 121) nous donnent :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^2 &= \frac{2(\mathcal{E}+H)}{2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)} = 0 & \mathcal{B}_3^2 &= \frac{2(\mathcal{E}+H)}{2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)} = 0 \\ (xi. 39) & & & \text{efforts tangentiels nuls.} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_2^2 = \frac{2(\mathcal{E}+H)}{2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)} = \lambda_a \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + (\lambda_a + 2\mu_a) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \neq 0$$

effort normal non nul.

Il y a donc un effort normal, mais aucun déplacement normal, donc aucun travail ; les déplacements tangentiels ne correspondent à aucune force tangentielle ; le travail des forces extérieures est nul ; le corps solide appuyé sur le plan rigide, avec les conditions (xi. 35) conserve une énergie constante. Nous avons d'ailleurs vu qu'une onde élastique se réfléchit sans changer d'amplitude, ce qui correspond au même fait.

#### IV. — *Dénombrement des vibrations propres d'un volume solide limité.*

Les conditions que nous avons choisies permettent de traiter séparément les ondes longitudinales et transversales, dans un *solide homogène isotrope*. Nous allons donc supposer ces conditions satisfaites sur les parois du volume V, qui sera encore un parallélépipède rectangle de côtés  $l_1, l_2, l_3$ . Avant de faire le calcul détaillé, voyons comment nous pouvons prévoir les résultats. Par analogie avec les résultats bien connus sur les tuyaux sonores, nous savons que les vibrations les plus basses correspondent à un ventre de vibration au milieu du volume et des nœuds aux extrémités ; on aura trois vibrations de ce type, suivant qu'on traitera le volume V comme un tuyau de longueur  $l_1, l_2$  ou  $l_3$  ; pour les vibrations d'ordre supérieur, nous pourrions avoir un ou plusieurs nœuds sur chaque arête. Considérons un vecteur OR, dirigé suivant le rayon normal à un plan d'onde, qui se réfléchit sur les miroirs plans (fig. xi. 4) formant les diverses faces ; si  $q_1, q_2, q_3$  sont les cosinus directeurs du rayon incident, les réflexions successives nous donnent  $\delta$  rayons de cosinus directeurs :

$$\pm q_1, \pm q_2, \pm q_3.$$

Examinons d'abord la réflexion sur le plan  $Ox_2x_3$ ; par suite des interférences entre l'onde incidente  $q_1, q_2, q_3$  et réfléchie —  $q_1, q_2, q_3$  des oscillations stationnaires prennent naissance devant ce miroir; une grandeur qui s'annule sur le plan réfléchissant (comme  $u_1$ , ou  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$  par exemple) présentera une série de plans nodaux en :

$$(xi. 40) \quad x_1 = n_1 \frac{\Lambda}{2q_1} \quad q_1 \text{ cosinus de l'angle d'incidence } \theta_1, \\ \Lambda \text{ longueur d'onde,} \\ n_1 \text{ entier positif.}$$

C'est ce qu'on voit directement sur la figure (xi. 5); les ondes incidente et réfléchie interfèrent au point A, qui correspond à  $n_1 = 1$  dans la formule ci-dessus.

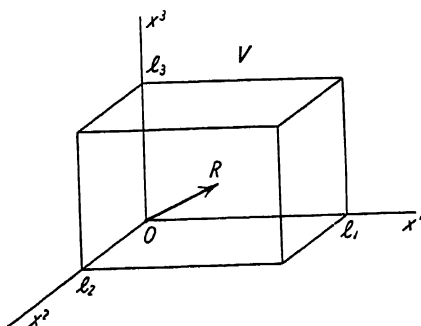


Fig. xi. 4.

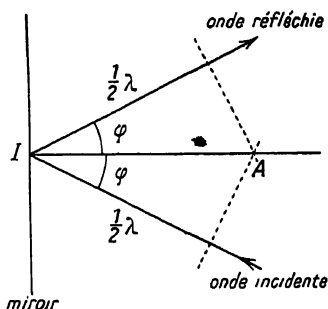


Fig. xi. 5.

Le plan parallèle opposé  $x_1 = l_1$  du parallélépipède devra nécessairement coïncider avec un de ces plans nodaux; d'où la condition :

$$(xi. 41) \quad l_1 = n_1 \frac{\Lambda}{2q_1} \quad q_1 = \cos \theta_1 = \Lambda \frac{n_1}{2l_1}.$$

Pour les autres faces du parallélépipède, on trouve des conditions analogues :

$$q_2 = \cos \theta_2 = \Lambda \frac{n_2}{2l_2} \quad q_3 = \cos \theta_3 = \Lambda \frac{n_3}{2l_3}$$

avec trois entiers  $n_1, n_2, n_3$ ; nous avons la relation des cosinus directeurs :

$$(xi. 42) \quad q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad \frac{1}{\Lambda^2} = \left( \frac{n_1}{2l_1} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{2l_2} \right)^2 + \left( \frac{n_3}{2l_3} \right)^2.$$

Notre raisonnement nous conduit à prévoir autant de systèmes d'ondes stationnaires que de jeux de nombres entiers  $n_1, n_2, n_3$ ; mais une étude plus détaillée nous montrera que chacun de ces systèmes d'ondes stationnaires peut être réalisé soit par une onde longitudinale, soit par l'une ou l'autre des deux vibrations transversales; nous serons donc en état de dénombrer les modes de vibration des divers types, ce que nous allons faire bientôt.

Précisons tout de suite les conditions de comparaison avec les calculs du

paragraphe 2 : nous avons pu raisonner, au paragraphe 2, sur un solide cristallin anisotrope quelconque ; nous trouvons cet avantage dans l'emploi des conditions cycliques aux limites ; en revanche, le problème ainsi posé était assez artificiel ; l'étude d'un volume  $V$  limité, à laquelle nous pourrions procéder maintenant, par l'emploi des conditions xi. 35 (paroi rigide lisse) ne s'applique qu'à un *solide homogène isotrope* ; pour un corps cristallisé anisotrope, nos conditions limites ne permettent pas de séparer commodément les diverses vibrations, et la solution se compliquerait beaucoup.

Prenons donc l'exemple du solide isotrope et comparons les résultats des deux méthodes ; les *conditions cycliques* fixaient ainsi la nature des solutions (xi. 19 et 26) :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{n_1}{l_1} & a_2 &= \frac{n_2}{l_2} & a_3 &= \frac{n_3}{l_3} \\ \text{(xi. 43)} \quad |a|^2 &= \frac{1}{\Lambda^2} = \left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{l_3}\right)^2 \end{aligned}$$

les  $n_1, n_2, n_3$  pouvaient être ici des *entiers positifs ou négatifs* quelconques ; au contraire, lorsque nous prenons le volume  $V$  limité par une *paroi rigide*, nous trouvons les conditions (xi. 41) qui se traduisent ainsi :

$$\text{(xi. 44)} \quad a_1 = \frac{q_1}{\Lambda} = \frac{n_1}{2l_1} \quad a_2 = \frac{q_2}{\Lambda} = \frac{n_2}{2l_2} \quad a_3 = \frac{q_3}{\Lambda} = \frac{n_3}{2l_3}$$

les conditions sont différentes des précédentes, par suite des facteurs  $\frac{1}{2}$ , mais

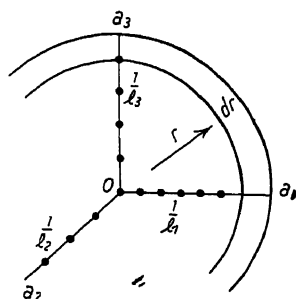


Fig. xi. 6.

d'autre part, nous devons prendre pour  $n_1, n_2$  et  $n_3$  des *entiers positifs* ; en effet, les réflexions multiples se chargent de faire tous les changements de signes sur les  $q$  ou les  $a$ , comme nous le remarquons plus haut p. 264.

Les conditions différentes, aux limites du volume  $V$  aboutissent donc à des résultats différents ; mais nous retrouverons un fait commun si nous calculons le nombre de vibrations propres dont les longueurs d'onde sont comprises entre deux limites  $\Lambda$  et  $\Lambda + d\Lambda$  ; nous supposons  $\Lambda$  très petit devant les dimensions  $l_1, l_2$  et  $l_3$  du volume  $V$ .

Considérons d'abord le cas des *conditions cycliques* ; prenons un espace à 3 dimensions  $a_1, a_2, a_3$  ; les relations xi. 43 nous définissent une série de points, formant dans cet espace un réseau régulier (fig. xi. 6) avec l'équidistance  $\frac{1}{l_1}$  dans la direction  $a_1$  ;  $\frac{1}{l_2}$  suivant  $a_2$  et  $\frac{1}{l_3}$  suivant  $a_3$  ; cela fait donc  $l_1$  points sur un vecteur unité dirigé suivant  $a_1$  ; et de même sur les autres axes ; ce réseau comporte donc :

$$\text{(xi. 45)} \quad l_1 l_2 l_3 = V \quad \text{points par unité de volume } a_1 a_2 a_3.$$

Cherchons maintenant ce que signifie la limitation de la longueur d'onde

entre  $\Lambda$  et  $\Lambda + d\Lambda$ . D'après (xi. 43) cette condition nous définit, dans l'espace  $a_1, a_2, a_3$ , une couche sphérique de rayons :

$$(xi. 46) \quad r = \frac{1}{\Lambda} \quad r + dr = \frac{1}{\Lambda + d\Lambda} \quad dr = d\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = -\frac{d\Lambda}{\Lambda^2}.$$

Combien trouverons-nous de modes de vibrations propres de ce genre ?

Nous devons compter tout d'abord combien il y a de points  $a$ , du réseau précédent, dans la couche sphérique ; si  $\Lambda$  est très petit devant  $l_1, l_2$  et  $l_3$  la couche a un très grand rayon  $r$ , son volume est :

$$4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{\Lambda^2} d\left(\frac{1}{\Lambda}\right);$$

les points  $a$  ayant une densité  $l_1 l_2 l_3$  nous trouvons que leur nombre est :

$$(xi. 47) \quad d\mathcal{N} = l_1 l_2 l_3 \frac{4\pi}{\Lambda^2} d\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = \frac{4\pi V}{\Lambda^2} d\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$$

à chacun des points correspond une vibration longitudinale et deux transversales.

Reprenons le même calcul pour le volume  $V$  limité, à *parois rigides*. Les conditions (xi. 44) nous donnent encore un réseau régulier de points  $a_1, a_2, a_3$  mais avec des équidistances moitiés ; par unité de volume de  $a$ , nous avons une densité de points représentatifs :

$$(xi. 48) \quad 2l_1 \cdot 2l_2 \cdot 2l_3 = 8V$$

au lieu de  $V$  (éq. xi. 45) ; en revanche, nous devons nous limiter aux entiers  $n_1, n_2, n_3$  positifs, c'est-à-dire aux points représentatifs situés dans le premier octant ( $a_1 > 0, a_2 > 0$  et  $a_3 > 0$ ) des axes ; la condition de calotte sphérique (xi. 46) est la même, mais le volume compris dans le premier octant est  $\frac{1}{8} 4\pi r^2 dr$  au lieu de  $4\pi r^2 dr$  ; finalement nous retombons sur la formule (xi. 47), car les facteurs 8 et  $\frac{1}{8}$  se compensent exactement.

Ce fait remarquable mérite d'être souligné : malgré un choix très différent de conditions limites, nous retrouvons le même nombre de vibrations de longueur d'onde comprise entre  $\Lambda$  et  $\Lambda + d\Lambda$ , — pourvu que  $\Lambda$  soit très petit devant les dimensions du volume  $V$ . Il s'agit là d'un fait tout à fait général ; Debye a fait les calculs pour un volume sphérique et H. Weyl <sup>(1)</sup> a généralisé pour un volume de forme quelconque, avec conditions aux limites quelconques. Le résultat (xi. 47) est absolument indépendant de la forme et des conditions limites, pourvu que  $\Lambda$  soit très petit devant toutes les dimensions ; on aurait une anomalie, par exemple, pour un volume  $V$  comportant des recoins de petites dimensions ; songeons au problème acoustique : une salle de forme absolument quelconque possède toujours  $d\mathcal{N}$  modes de vibration propres, formant des ondes stationnaires, de longueurs d'ondes comprises entre  $\Lambda$  et  $\Lambda + d\Lambda$ , pourvu que  $\Lambda$  soit petit, et qu'il n'existe pas des niches, des recoins (ou des loges dans un théâtre) de petites dimensions, susceptibles de résonner séparément sur des fréquences de même ordre.

(<sup>1</sup>) J. H. JEANS. *Phil. Mag.*, t. 40, 1905, p. 91. — P. DEBYE. *Ann. der Physik*, t. 39, 1912, p. 798. — H. WEYL. *Math. Ann.*, t. 71, 1911, p. 1213.

Revenons aux vibrations du corps solide; les ondes longitudinales et transversales ont des vitesses de propagation  $W_l$  et  $W_{tr}$ ; nous passerons des  $\Lambda$  aux fréquences  $\nu$  par les relations :

$$(x. 49) \quad \Lambda = \frac{W}{\nu} \quad d \frac{1}{\Lambda} = d \left( \frac{\nu}{W} \right) = \frac{1}{U} d\nu.$$

Nous voyons réapparaître ici la *vitesse de groupe*  $U$ , conformément à la définition du chapitre IX, § 8.

Entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  nous aurons donc :

$$(xi. 50) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Ondes longitudinales} & dN_l = V \frac{4\pi\nu^2}{U_l W_l^2} d\nu \\ \text{Ondes transversales des deux sortes} & dN_{tr} = V \frac{8\pi\nu^2}{U_{tr} W_{tr}^2} d\nu \end{array} \right.$$

et ces résultats sont indépendants de la forme du volume  $V$  et des conditions aux limites.

### V. — *Etude directe des interférences et ondes stationnaires dans la réflexion sur des miroirs orthogonaux.*

Quelques explications physiques complémentaires seront utiles pour bien faire comprendre ce qui se passe dans la réflexion des ondes sur les diverses parois, suivant les formules (xi. 41 et 42), et illustrer le mécanisme de formation des ondes stationnaires.

Partons d'une onde incidente, se propageant avec la vitesse  $W$  dans un milieu isotrope; soient  $\Psi$  la grandeur oscillante (déplacement ou vitesse) et  $\nu$  la fréquence; l'expression :

$$(xi. 51) \quad \Psi_1 = A_1 e^{2\pi i(ax+by+cz-\nu t)}$$

représente une onde d'amplitude  $A_1$ , et  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont les composantes d'un vecteur de longueur  $\frac{1}{\lambda}$  porté suivant le rayon :

$$(xi. 52) \quad a^2 + b^2 + c^2 = \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \quad c = \frac{1}{\lambda} \cos \theta_z$$

$\lambda$  étant la longueur d'onde <sup>(1)</sup>, et  $\theta_z$  l'angle du rayon (direction de propagation) avec l'axe  $Oz$ . Disposons un miroir suivant le plan  $z=0$  et admettons que la condition à satisfaire sur ce plan soit l'annulation de  $\Psi$ . Nous créerons ainsi une onde réfléchie :

$$\Psi_2 = -A_1 e^{2\pi i(ax+by-cz-\nu t)}$$

et le système résultant sera :

$$(xi. 53) \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A_1 i \sin(2\pi cz) e^{2\pi i(ax+by-\nu t)}.$$

<sup>(1)</sup> Dans ce paragraphe, nous ne parlerons pas des coefficients d'élasticité  $\lambda$ ,  $\mu$ ; nous avons donc repris la notation usuelle  $\lambda$  pour la longueur d'onde.





La première est due à Hopwood <sup>(1)</sup>, et la seconde empruntée à un miroir de Bachem, Hiedemann et Asbach <sup>(2)</sup>.

Revenons à la formule (xi. 53), pour en bien préciser la signification. La grandeur ondulatoire  $\Psi$  est nulle sur le miroir  $z = 0$  et sur tous les plans horizontaux :

$$z = 0 \qquad z = \frac{1}{2c} = \frac{\lambda}{2 \cos \theta_z} \qquad \dots \qquad z = \frac{n}{2c} = \frac{n\lambda}{2 \cos \theta_z} .$$

Nous retrouvons exactement la condition (xi. 40) ; il se produit des « franges noires », sur une série de plans équidistants numérotés  $n = 1, 2, 3 \dots$  Sur ces plans, la grandeur  $\Psi$  est nulle, l'amplitude de l'onde est nulle ; aucune énergie ne traverse ces plans, mais l'énergie vibratoire se propage parallèlement au miroir.

L'onde résultante (xi. 53) est caractérisée par deux faits :

1° une amplitude, variable suivant la direction  $z$  et nulle sur toutes les franges noires :

$$A(z) = 2A_1 i \sin(2\pi c z) ;$$

2° une propagation parallèlement au miroir, caractérisée par l'exponentielle :

$$e^{2\pi i(ax + by - vt)} .$$

Nous y trouvons une fréquence  $\nu$ , comme dans l'onde incidente, avec un vecteur de propagation  $a, b, 0$  ; dans la propagation parallèle au miroir, nous aurons une longueur d'onde apparente  $\Lambda$  donnée par :

$$\frac{1}{\Lambda^2} = a^2 + b^2 .$$

Suivant une formule analogue à (xi. 52), cela nous donne :

$$(xi. 54) \qquad \frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} - c^2 = \frac{1 - \cos^2 \theta_z}{\lambda^2} = \frac{\sin^2 \theta_z}{\lambda^2} \qquad \Lambda = \frac{\lambda}{\sin \theta_z} .$$

La figure xi. 7 montre clairement la signification de cette longueur d'onde apparente  $\Lambda$ . Ces ondes d'interférence se propagent avec une vitesse de phase  $V$  supérieure à la vitesse naturelle  $W$  des ondes libres :

$$W = \lambda \nu$$

$$(xi. 55) \qquad V = \Lambda \nu = \frac{W}{\sin \theta_z} .$$

La construction de la figure xi. 7 fait comprendre pourquoi  $\Lambda$  est supérieur à  $\lambda$ , et par conséquent  $V > W$ .

Sur chacun des plans horizontaux formant les franges noires, la condition  $\Psi = 0$  est satisfaite. Nous pouvons donc, sans rien modifier au système de franges, glisser le long d'un de ces plans un autre miroir  $M'$  parallèle à  $M$ . La figure xi. 10 se rapporte au cas  $n = 3$ . Outre la vitesse de phase, on peut

<sup>(1)</sup> D'après Wood. *Textbook of Sound*. Bell, Londres.

<sup>(2)</sup> *Zeits. f. Phys.*, 1934, t. 87, p. 734.

définir, dans ce système de franges, une vitesse  $U$  de transport de l'énergie, et l'on trouve :

$$(xi. 56) \quad \frac{U}{W} = \frac{W'}{V} = \sin \theta_z$$

de sorte que la vitesse de transport de l'énergie est inférieure à la vitesse  $W$  des ondes libres <sup>(1)</sup>. La vitesse d'énergie  $U$  est liée à la vitesse de phase apparente  $V$  de (xi. 55) par la formule de la vitesse de groupe  $\frac{1}{U} = \frac{d}{d\nu} \left( \frac{\nu}{V} \right)$

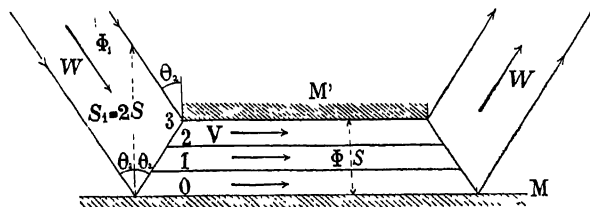


Fig. xi. 10.

pourvu que l'on tienne compte du fait que  $\theta$  dépend de  $\nu$ , parce que l'écart des deux plans réfléchissants est fixé, de sorte que  $c = \lambda^{-1} \cos \theta$  reste constant.

Prenons maintenant un dièdre à angle droit, constitué par deux plans  $y = 0$  et  $z = 0$ , comme l'indique la figure xi. 11, et formons les ondes réflé-

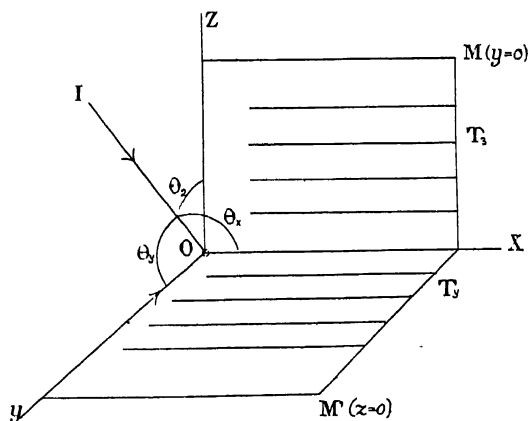


Fig. xi. 11.

chies par ces deux plans. L'onde incidente  $\Psi_1$  de xi. 51 a trois coefficients de propagation  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dont nous rappelons le sens :

$$a = \frac{1}{\lambda} \cos \theta_x \quad b = \frac{1}{\lambda} \cos \theta_y \quad c = \frac{1}{\lambda} \cos \theta_z$$

<sup>(1)</sup> On trouvera le détail de cette discussion dans l'article suivant : L. BRILLOUIN. *Revue générale de l'Electricité*, t. 40, 1936, p. 227.

Sur le plan  $z=0$ , nous avons admis qu'il fallait annuler  $\Psi'$ , ce qui donnait (xi. 53). Quelle condition allons-nous admettre sur le plan  $y=0$ ? Deux cas sont à considérer :

1°  $\Psi=0$ . Nous aurons formation d'une onde réfléchie correspondant à (xi. 53) :

$$\Psi' = -2A_1 i \sin(2\pi c z) e^{2\pi i(ax - by - vt)}$$

et le mouvement résultant sera :

$$(xi. 57) \quad \Psi_1 = \Psi + \Psi' = -4A_1 \sin(2\pi c z) \sin(2\pi b y) e^{2\pi i(ax - vt)}.$$

2°  $\Psi$  maximum  $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$ . Nous aurons alors une onde réfléchie  $-\Psi'$  et un mouvement résultant :

$$(xi. 58) \quad \Psi_2 = \Psi - \Psi' = 4A_1 i \sin(2\pi c z) \cos(2\pi b y) e^{2\pi i(ax - vt)}.$$

Dans les deux cas 1° et 2° nous obtenons des franges d'interférences mobiles, qui glissent le long de la direction  $Ox$  (arête du dièdre) avec une longueur d'onde apparente  $\Lambda'$  :

$$a = \frac{1}{\Lambda'} \quad \Lambda' = \frac{\lambda}{\cos \theta_x}.$$

Les franges noires forment deux systèmes de plans équidistants, parallèles aux deux miroirs. La condition  $\Psi=0$  réalisée sur le miroir  $z=0$  se répète pour :

$$2\pi c z = n_3 \pi \quad z = \frac{n_3}{2c};$$

la condition réalisée sur le plan  $y=0$  (soit  $\Psi$ , soit  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$  nul) se retrouve pour :

$$2\pi b y = n_2 \pi \quad y = \frac{n_2}{2b}.$$

Nous obtenons donc deux conditions du type (xi. 40).

Dans ce système de franges, nous pourrions glisser, sans rien modifier, deux autres miroirs le long de ces plans :

Un miroir parallèle à  $z=0$ , en :

$$(xi. 59) \quad z = l_3 = \frac{n_3}{2c}$$

et un miroir parallèle à  $y=0$ , en :

$$y = l_2 = \frac{n_2}{2b}.$$

Ajoutons maintenant un miroir perpendiculaire aux deux autres, et défini par  $x=0$ . Nous pourrions encore avoir, sur ce miroir, la condition  $\Psi=0$  ou bien la condition  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}=0$ ; prenons un exemple :

$$\Psi = 0 \text{ sur } z=0 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \text{ sur } y=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \text{ sur } x=0.$$

L'onde  $\Psi_2$  va se compléter par une onde  $\Psi_2'$  réfléchie sur  $x = 0$  :

$$\Psi_2' = 4A_1 i \sin(2\pi c x) \cos(2\pi b y) e^{2\pi i(-ax - vt)}$$

ce qui fournira un système de franges :

$$(xi. 60) \quad \Phi = \Psi_2 + \Psi_2' = 8A_1 i \sin(2\pi c x) \cos(2\pi b y) \cos(2\pi a x) e^{-2\pi i vt}.$$

Dans ce système de franges, nous avons des interférences pour :

$$2\pi c n = n_3 \pi \quad 2\pi b y = n_2 \pi \quad 2\pi a x = n_1 \pi$$

et nous pouvons ajouter des miroirs parallèles aux précédents (avec les mêmes conditions aux limites), pour :

$$x = l_3 = \frac{n_3}{2c} \quad y = l_2 = \frac{n_2}{2b} \quad x = l_1 = \frac{n_1}{2a}$$

ce qui nous redonne les conditions que nous avons annoncées en (xi. 44). Suivant que les conditions aux limites seront d'annuler  $\Psi$  ou bien sa dérivée normale, les vibrations résultantes s'écriront avec des cosinus ou des sinus, suivant le schéma général :

$$\Phi = B \frac{\cos}{\sin}(2\pi a x) \frac{\cos}{\sin}(2\pi b y) \frac{\cos}{\sin}(2\pi c x) e^{2\pi i vt}.$$

C'est ce type de solution dont nous allons rechercher maintenant l'utilisation méthodique.

### VI. — Vibrations propres d'un solide, enfermé dans une enceinte parallélépipédique rectangulaire à parois rigides lisses.

Nous allons discuter de plus près les modes de vibration propre d'un solide, enfermé dans une enceinte parallélépipédique rectangulaire, de côtés  $l_1, l_2, l_3$ , et limité par une paroi rigide lisse, sur laquelle nous écrirons les conditions limites (xi. 35), c'est-à-dire déplacements normaux nuls, et dérivées normales nulles pour les composantes tangentielles du déplacement.

Nous satisferons à ces conditions en prenant :

$$(xi. 61) \quad u_h = \sum_{a_1, a_2, a_3} A_{h, a_1, a_2, a_3}(t) \gamma_{h, a_1, a_2, a_3}(x_1, x_2, x_3)$$

avec :

$$\varphi_{1, a_1, a_2, a_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin 2\pi a_1 x_1 \cos 2\pi a_2 x_2 \cos 2\pi a_3 x_3$$

$$(xi. 62) \quad \varphi_{2, a_1, a_2, a_3}(x_1, x_2, x_3) = \cos 2\pi a_1 x_1 \sin 2\pi a_2 x_2 \cos 2\pi a_3 x_3$$

$$\varphi_{3, a_1, a_2, a_3}(x_1, x_2, x_3) = \cos 2\pi a_1 x_1 \cos 2\pi a_2 x_2 \sin 2\pi a_3 x_3$$

et :

$$a_1 = \frac{n_1}{2l_1} \quad a_2 = \frac{n_2}{2l_2} \quad a_3 = \frac{n_3}{2l_3}$$

Les  $a_1, a_2, a_3$  sont bien donnés par les conditions (xi. 44) au paragraphe 4, les  $n_1, n_2, n_3$  étant trois entiers positifs.

Nous prendrons alors trois vecteurs unités,  $\vec{\alpha}_a$ ,  $\vec{\beta}_a$  et  $\vec{\gamma}_a$  comme précédemment, le vecteur  $\vec{\gamma}_a$  étant dans la direction du rayon (vecteur  $\vec{a}$ ) tandis que  $\vec{\alpha}_a$  et  $\vec{\beta}_a$  sont perpendiculaires entre eux et avec  $\vec{\gamma}_a$ ; nous appellerons  $\alpha_{h,a}$ ,  $\beta_{h,a}$ ,  $\gamma_{h,a}$  les composantes de ces vecteurs unités suivant l'axe  $x_h$ ; les  $\alpha_{h,a}$ ,  $\beta_{h,a}$  et  $\gamma_{h,a}$  sont donc les cosinus directeurs des axes  $\vec{\alpha}_a$ ,  $\vec{\beta}_a$ ,  $\vec{\gamma}_a$ .

Nous décomposerons le vecteur  $A_{h,a}(t)$  suivant ces nouveaux axes, et pour simplifier l'écriture nous mettrons un seul indice  $a$  pour représenter le triplet  $a_1, a_2, a_3$ . Nous posons donc :

$$(xi. 63) \quad A_{h,a}(t) = \alpha_{h,a} A_{\alpha,a}(t) + \beta_{h,a} A_{\beta,a}(t) + \gamma_{h,a} A_{\gamma,a}(t).$$

Pour former l'énergie potentielle, il nous faut calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial u_h}{\partial x_k}$ ; posons :

$$(xi. 64) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{33} = \cos 2\pi a_1 x_1 \cos 2\pi a_2 x_2 \cos 2\pi a_3 x_3 \\ \varphi_{12} &= -\sin 2\pi a_1 x_1 \sin 2\pi a_2 x_2 \cos 2\pi a_3 x_3 \\ \varphi_{23} &= -\cos 2\pi a_1 x_1 \sin 2\pi a_2 x_2 \sin 2\pi a_3 x_3 \\ \varphi_{31} &= -\sin 2\pi a_1 x_1 \cos 2\pi a_2 x_2 \sin 2\pi a_3 x_3. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire :

$$(xi. 65) \quad \frac{\partial u_h}{\partial x_k} = \sum_a A_{ha} 2\pi a_k \varphi_{hka}.$$

L'énergie potentielle totale du système s'obtient en intégrant, pour le volume  $V$ , la densité d'énergie (x. 107) d'un solide isotrope, limitée aux termes du second degré par rapport aux dérivées partielles, comme il convient pour obtenir des vibrations sinusoïdales (Cf. xi. 14) :

$$(xi. 66) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} + H &= \mathcal{E}_0 + H_0 + \frac{\lambda_a}{8} I_1^2 + \frac{\mu_a}{4} I_2 \\ I_1 &= 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ I_2 &= 4 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \dots + 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \dots \end{aligned}$$

Les  $\lambda_a$  et  $\mu_a$  sont les coefficients d'élasticité apparents,  $\lambda + p$  et  $\mu - p$  définis au chapitre X (p. 244); pour simplifier l'écriture, nous laisserons maintenant tomber ces indices  $a$  et nous écrirons simplement  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Lorsque nous faisons l'intégration sur le volume  $V = l_1 l_2 l_3$ , nous trouvons en général :

$$(xi. 67) \quad \begin{aligned} \int_V \varphi_{ikh,a}^2 d\tau &= \frac{1}{8} V \\ \int_V \varphi_{ikh,a} \varphi_{i'k',a'} d\tau &= 0 \quad \text{si } i \neq i' \text{ ou } k \neq k' \text{ ou } a \neq a'. \end{aligned}$$

Il y a quelques exceptions, sans grande importance pour le résultat final : si l'un des  $a_1, a_2$  ou  $a_3$  est nul, l'intégrale de  $\varphi^2$  donne  $\frac{1}{4} V$ ; si deux des  $a$

## ONDES ÉLASTIQUES DANS LES

sont nuls, l'intégrale donne  $\frac{1}{2} V$  seulement. En outre, les

provoquent quelques coïncidences, c'est pourquoi nous écr. ...  
de  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{22}$  ou  $\varphi_{33}$  dans (xi. 64). Formons maintenant les invariants  $\alpha$ ,  
la déformation :

$$I_1^2 = 4 \left[ \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]^2 = 4 \left[ \sum_{k,a} 2\pi a_k A_{ka} \varphi_{0a} \right]^2$$

$$(xi. 68) \quad \int_V I_1^2 d\tau = \frac{1}{2} V \sum_a \left[ \sum_k 2\pi a_k A_{ka} \right]^2 = 2\pi^2 V \sum_a |a|^2 A_{\gamma a}^2 \quad \text{car } \sum_k a_k A_{ka} = |a| A_{\gamma a}$$

$$|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

En effet  $\sum_k a_k A_{ka}$  représente le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{A}$ ; seul le terme  $\gamma$  subsiste, car il représente la projection de  $A$  sur la direction  $\vec{a}$ . Pour l'invariant  $I_2$ , nous suivrons une marche analogue; notons tout d'abord que l'intégration sur le volume  $V$  fera disparaître tous les doubles produits de termes en  $a$  et  $a'$ , d'après (xi. 67), de sorte que nous n'avons à garder que des termes ayant mêmes indices  $a$ , dont voici le type :

$$I_{2a} = 4 \sum_k \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2 \sum_{hk} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right)^2$$

$$= 4 \sum_k \left[ 2\pi a_k \varphi_{0a} A_{k,a} \right]^2 + 2 \sum_{hk} 4\pi^2 \varphi_{hk,a}^2 [a_h A_{ka} + a_k A_{ha}]^2.$$

Intégrons sur le volume  $V$ , en tenant compte de (xi. 67) :

$$(xi. 69) \quad \int_V I_{2a} d\tau = 2\pi^2 V \left[ \sum_k (a_k A_{ka})^2 + \frac{1}{2} \sum_{hk} [a_h A_{ka} + a_k A_{ha}]^2 \right]$$

$$= 2\pi^2 V \left[ \sum_k \{a_k A_{ka}\}^2 + \frac{1}{2} \sum_{kh} [a^h A_{ka} - a_k A_{ha}]^2 \right].$$

Nous avons regroupé les termes pour faire apparaître en premier lieu un terme de même structure qu'en (xi. 68) :

$$\sum_k a_k A_{ka} = |a| A_{\gamma a}$$

le produit scalaire de  $\vec{a}$  et  $\vec{A}$  est égal à  $|a|$  multiplié par la composante longitudinale  $A_{\gamma a}$ . Le dernier groupe de termes de (vi. 69) contient le carré du produit vectoriel de  $\vec{a}$  et  $\vec{A}$ , ce qui fait ressortir les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$(xi. 70) \quad \sum [a_h A_{ka} - a_k A_{ha}]^2 = |a \times A|^2 = |a|^2 (A_{\alpha a}^2 + A_{\beta a}^2).$$

Si nous regroupons tous ces résultats, nous arrivons donc à l'expression que voici pour l'énergie potentielle totale dans le volume  $V$  :

$$(xi. 71) \quad E_{\text{pot}} = \sum_a \frac{\pi^2 V}{4} |a|^2 [(\lambda + 2\mu) A_{\gamma a}^2 + \mu (A_{\alpha a}^2 + A_{\beta a}^2)].$$

Chacune des vibrations  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$  nous donnera une oscillation sinusoïdale de fréquence  $\nu_\alpha$ ,  $\nu_\beta$  ou  $\nu_\gamma$  bien définie.

Tenons compte des valeurs des vitesses de propagation et des relations (xi. 26) :

$$\begin{aligned} W_l^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} & |a|^2 W_l^2 &= v_l^2 \\ W_{tr}^2 &= \frac{\mu}{\rho} & |a|^2 W_{tr}^2 &= v_{tr}^2 \end{aligned} \quad |a| = \frac{1}{\Lambda}.$$

Ces formules sont identiques à (xi. 16) puisque nous avons précisé que les  $\lambda$  et  $\mu$  sont en réalité les valeurs apparentes  $\lambda_a$ ,  $\mu_a$  (xi. 66). Nous obtenons alors :

$$(xi. 72) \quad E_{pot} = \frac{\pi^2 M}{4} \sum_a [v_{l,a}^2 A_{\gamma a}^2 + v_{tr,a}^2 (A_{\alpha a}^2 + A_{\beta a}^2)]$$

tandis que l'énergie cinétique, après une intégration analogue, nous donne :

$$(xi. 73) \quad E_{cin} = \frac{M}{16} \sum_a [\dot{A}_{\gamma a}^2 + \dot{A}_{\alpha a}^2 + \dot{A}_{\beta a}^2].$$

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont mises sous forme de sommes de carrés, d'une manière analogue à la décomposition que nous avons obtenue par les conditions cycliques ; il n'y a pas ici les mêmes complications de dégénérescence qu'avec les conditions cycliques : les vibrations longitudinales ont toutes des fréquences distinctes. Entre les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  il y a une dégénérescence : nous pouvons choisir à volonté ces deux directions perpendiculaires au vecteur  $\vec{\gamma}$  (ou  $\vec{a}$ ) ; nous pouvons aussi décomposer une vibrations arbitraire en deux vibrations circulaires inverses, au lieu de la décomposer en deux vibrations rectilignes  $\alpha\beta$  ; ces questions de polarisation des ondes transversales sont bien connues, ainsi que le rôle essentiel qu'y tient la différence de phase des deux vibrations  $\alpha\beta$ .

A chaque jeu de nombres entiers positifs  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  correspond un vecteur  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  qui nous fournit 3 vibrations propres de même longueur d'onde  $|a|^{-1}$  ; une vibration longitudinale  $\gamma$  et deux vibrations transversales  $\alpha\beta$  ; nous avons donné, sur ces bases, le décompte des diverses vibrations de fréquence ou de longueur d'onde données ; le calcul du paragraphe 4 résout cette question.

Il est intéressant de regarder d'un peu plus près la nature des mouvements réalisés dans le système d'ondes stationnaires du type longitudinal ou transversal ; les déplacements sont toujours donnés par les expressions (xi. 61) :

$$(xi. 61) \quad \begin{aligned} u_1 &= A_1 \sin 2\pi a_1 x_1 \cos 2\pi a_2 x_2 \cos 2\pi a_3 x_3 \\ u_2 &= A_2 \cos 2\pi a_1 x_1 \sin 2\pi a_2 x_2 \cos 2\pi a_3 x_3 \\ u_3 &= A_3 \cos 2\pi a_1 x_1 \cos 2\pi a_2 x_2 \sin 2\pi a_3 x_3. \end{aligned}$$

Mais pour les ondes longitudinales  $\gamma$  on a un vecteur  $\vec{A}$  parallèle à  $\vec{a}$  :

$$(xi. 74) \quad A_1 = b a_1 \quad A_2 = b a_2 \quad A_3 = b a_3$$

tandis que pour les ondes transversales  $\alpha$  ou  $\beta$  les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{A}$  sont perpendiculaires :

$$(xi. 75) \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$$



les  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  étant tous positifs, il faut alors qu'une ou deux des composantes de  $A$  soient négatives.

La figure (xi. 12) représente les mouvements longitudinaux et transversaux pour le cas de deux dimensions ( $\alpha_3 = 0$ ). On remarque que les mouvements longitudinaux sont irrotationnels, tandis que les ondes stationnaires créées par des ondes transversales se décomposent en une série de tourbillons voisins. Ces mouvements de tourbillon dans le solide sont limités par la

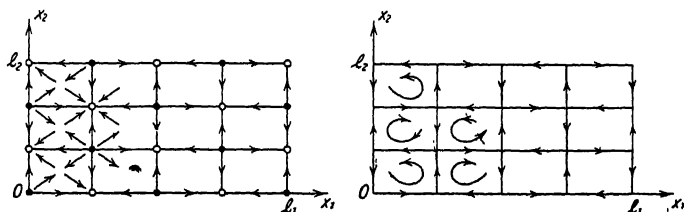


Fig. xi. 12.

réaction élastique du solide et se présentent comme des vibrations. Dans un milieu continu où la rigidité serait nulle ( $\mu = 0$ ), c'est-à-dire dans un fluide, aucune force élastique ne s'opposerait à ces mouvements tourbillonnaires qui se poursuivraient toujours dans le même sens, au lieu de présenter un caractère oscillatoire <sup>(1)</sup>.

La figure (xi. 13) se rapporte aux mouvements transversaux à trois dimensions, dans une cellule élémentaire :

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 &\leq \frac{l_1}{n_1} \\ 0 \leq x_2 &\leq \frac{l_2}{n_2} \\ 0 \leq x_3 &\leq \frac{l_3}{n_3} \end{aligned}$$

En analysant les vibrations propres du solide isotrope, contenu dans une enceinte parallélépipédique rectangle, nous sommes arrivés à trouver des variables  $A_{\alpha,a}$ ,  $A_{\beta,a}$  et  $A_{\gamma,a}$  qui sont particulièrement

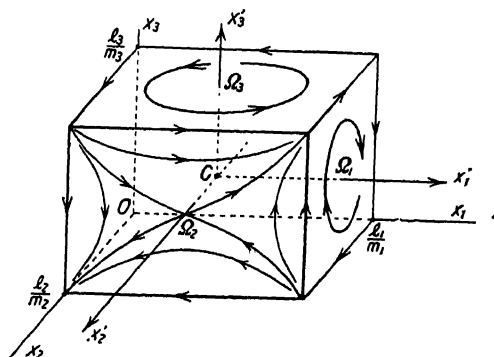


Fig. xi. 13.

commodes pour l'étude des mouvements de ce solide ; ces variables sont, en effet, indépendantes les unes des autres, puisqu'elles permettent une décomposition des énergies cinétique et potentielle en sommes de carrés. On les désigne souvent sous le nom de *variables généralisées* ; en l'absence de toute perturbation, chacune de ces variables subit des oscillations harmoniques simples, d'amplitude bien définie. Le mouvement global du solide est donné par la superposition de toutes ces vibrations élémentaires. Nous utiliserons ces remarques au chapitre XII.

<sup>(1)</sup> L. BRILLOUIN. *Journal de Physique*, t. 7, 1936, p. 153.

**VII. — Influence des termes d'ordre supérieur et perturbations dans la propagation des ondes.**

Pour trouver des ondes élastiques simples, se propageant avec des vitesses constantes et sans se déformer au cours du temps, il nous a fallu négliger toute une série de termes dans l'expression de l'énergie potentielle, nous nous sommes bornés, dans la formule (xi. 1) aux termes du second degré par rapport aux dérivées partielles  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$  des déplacements, et nous avons omis les termes d'ordre supérieur : troisième, quatrième degré, etc.

Il est important de se rendre compte du rôle que peuvent jouer tous ces termes négligés; nous essayerons, sans entrer dans trop de détails, de donner un aperçu général des phénomènes engendrés par ces termes de degrés supérieurs. Nous verrons que si certaines des conséquences sont peu importantes, d'autres présentent un intérêt considérable, et nous insisterons surtout sur le fait qu'il est impossible de traiter un de ces problèmes indépendamment des autres, car tous étant de même origine, réagissent les uns sur les autres d'une manière extrêmement complexe.

Voyons tout d'abord d'où proviennent les termes de degrés 3, 4 ... dans l'énergie potentielle. Nous avons utilisé, au chapitre X, un développement (x. 6g) de l'énergie potentielle, où se trouvaient regroupés les termes de divers degrés par rapport aux déformations  $e_{ik}$  :

$$(xi. 76) \quad \mathcal{E} + H = (\mathcal{E} + H)_0 + (\mathcal{E} + H)_2 + (\mathcal{E} + H)_3 + \dots$$

dans le cas du corps solide isotrope, nous avons explicité ce développement (§§ x. 9 et x. 12, pp. 234 et 242) :

$$(xi. 77) \quad \begin{aligned} (\mathcal{E} + H)_2 &= \frac{\lambda}{8} I_1^2 + \frac{\mu}{4} I_2 \\ (\mathcal{E} + H)_3 &= A I_1 I_2 + B I_1^3 + C I_3 \end{aligned}$$

ou  $I_1, I_2, I_3$  sont les invariants d'ordre 1, 2, 3 que l'on peut former au moyen des déformations;  $\lambda$  et  $\mu$  sont les valeurs apparentes  $\lambda_a, \mu_a$  comme nous l'avons précisé en (xi. 72) et (xi. 66, p. 274).

Par rapport aux déformations, ce sont les termes en A, B, C, qui représentent les effets du 3<sup>e</sup> degré.

Mais notre formule (xi. 1), qui sert de base au présent chapitre sur la propagation des ondes, n'est pas développée par rapport aux déformations; c'est en fonction des dérivées partielles  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$  que ce développement est ordonné, et nous savons que les déformations comportent des termes du second degré par rapport à ces dérivées partielles; pour les calculs des paragraphes 1 à 6, nous avons pu nous contenter de l'expression approchée :

$$(xi. 2) \quad e_{ik} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i};$$

il va falloir maintenant employer la formule rigoureuse (x. 26) :

$$(x. 26) \quad e_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}.$$

Ordonnons l'énergie potentielle par rapport aux dérivées partielles et nous écrirons :

$$(x. 78) \quad \mathcal{E} + H = (\mathcal{E} + H)_0 + E_2 + E_3 + \dots$$

$E_2$  est l'expression de (x. 1); c'est le groupe des termes du second degré en  $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ , dont nous avons tenu compte jusqu'ici. D'où proviennent les termes  $E_3$  du troisième degré? Leur origine est double :

1° termes provenant de  $(\mathcal{E} + H)_2$ , c'est-à-dire des termes du second degré vis-à-vis des déformations, lorsqu'on y introduit les expressions complètes (x. 26) des  $e_{ik}$ ;

2° termes provenant de  $(\mathcal{E} + H)_3$ , et où il suffira de garder le premier ordre dans les  $e_{ik}$ .

Donnons l'indication du calcul pour le solide isotrope; les termes  $(\mathcal{E} + H)_2$  du second degré (x. 77) s'expriment en fonction des invariants  $I_1$  et  $I_2$ ; il va falloir tout d'abord développer ceux-ci complètement, en tenant compte de (x. 26) :

$$(x. 79) \quad I_1 = \sum_i e_{ii} = I'_1 + \sum_{i,l} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2$$

avec :

$$I'_1 = 2 \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

en appelant  $I'$  l'expression de l'invariant  $I_1$ , lorsqu'on emploie les formules simplifiées (x. 2) au lieu de (x. 26).

Décomposons de façon analogue l'invariant  $I_2$  :

$$(x. 80) \quad I_2 = \sum_{i,k} (e_{ik})^2 = I'_2 + 2 \sum_{i,k,l} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \sum_{i,k} \left\{ \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right\}^2$$

avec :

$$I'_2 = \sum_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2;$$

dans ces formules, les sommations sont faites indépendamment sur tous les indices  $i, k, l$ . Au total, on trouve pour le solide isotrope :

$$(x. 81) \quad E_2 = \frac{\lambda}{8} (I'_1)^2 + \frac{\mu}{4} I'_2$$

$$E_3 = \frac{\lambda}{4} I'_1 \left( \sum_{i,l} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2 \right) + \mu \sum_{i,k,l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + A I'_1 I'_2 + B (I'_1)^3 + C I'_2.$$

On reconnaît les termes en  $\lambda$  et  $\mu$ , qui proviennent de  $(\mathcal{E} + H)_2$  et ceux en  $A, B, C$  fournis par  $(\mathcal{E} + H)_3$ ; on a profité de ce que la sommation est faite sur  $i, k$  indépendamment pour simplifier le terme en  $\mu$ .

Que vont nous donner, dans les équations de mouvement, ces termes nouveaux? Les forces  $\mathcal{E}'_k$  de Boussinesq sont les dérivées partielles (x. 4) de l'énergie potentielle par rapport à  $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ . Ces forces étaient linéaires en  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ , avec l'approximation utilisée précédemment; elles vont maintenant contenir toute une série de termes du second degré, fournis par les dérivées de  $E_3$ .

Nous trouvons, en première approximation, des ondes du type (xi. 5), se propageant sans se déformer :

$$u_i = A \varphi \left( t - \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3}{W} \right).$$

La seconde approximation va nous fournir les effets suivants :

- 1° déformation de l'onde au cours de sa propagation ;
- 2° apparition d'un déplacement moyen non nul, et de divers efforts moyens classés sous la dénomination générale de « pressions de radiation ».

### VIII. — Exemples de ces effets secondaires, sur des ondes libres.

Un exemple simple fera saisir le mécanisme. Les effets que nous décrirons sont souvent caractérisés par l'expression de *distorsion non linéaire*, car ils reposent sur le fait que les forces ne sont plus limitées aux termes linéaires mais comportent des termes du second degré ; il y a des écarts à la loi de Hooke.

Supposons que nous imposions au solide, dans tout le plan  $x_1 = 0$ , un mouvement sinusoïdal uniforme, dans la direction  $x_1$  ; la première approximation, d'après nos calculs antérieurs, nous fournit une solution :

$$(xi. 82) \quad u_1 = A_1 \cos 2\pi(\nu t - a_1 x_1) \quad u_2 = u_3 = 0$$

c'est-à-dire une onde plane, longitudinale, se propageant suivant la direction  $Ox_1$  et gardant sa forme sinusoïdale. Les forces  $\mathcal{B}_k^i$  de Boussinesq, définissent les efforts exercés par une tranche du solide sur la suivante ; elles sont sinusoïdales à cette approximation ; à la seconde approximation, ces forces comprennent des termes du 2<sup>e</sup> degré ; ce sera, dans notre exemple, un terme en :

$$(xi. 83) \quad \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 = 4\pi^2 a_1^2 A_1^2 \sin^2 2\pi(\nu t - a_1 x_1) \\ = 2\pi^2 a_1^2 A_1^2 [1 - \cos 4\pi(\nu t - a_1 x_1)].$$

En effet, la seule dérivée partielle non nulle est  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$  et l'expression  $E_3$  de (xi. 81) se réduit à :

$$E_3 = \left( \frac{\lambda}{2} + \mu + 8A + 8B + 8C \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^3$$

lorsqu'on tient compte des facteurs répétés par le jeu des sommations multiples ; nous en tirons :

$$(xi. 84) \quad \mathcal{B}_1^1 = \frac{\partial(E_2 + E_3)}{\partial \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 3 \left( \frac{\lambda}{2} + \mu + 8A + 8B + 8C \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2.$$

Tous les autres  $\mathcal{B}_k^i$  sont nuls, dans notre exemple.

La force  $\mathcal{B}_1^1$  va donc contenir, d'après (xi. 83) :

1° un terme moyen non nul ;

2° un terme oscillatoire de fréquence double.

I. — Le terme moyen non nul a d'ailleurs une valeur constante dans toute la zone occupée par une onde (xi. 82) ; cette tension supplémentaire constante s'équilibrera dans toute cette région du solide, et n'apparaîtra qu'aux limites de cette région, soit à l'endroit où l'onde est émise, soit sur les surfaces où cette onde est réfléchie ou absorbée. Ce terme contribuera donc à nous fournir les *pressions de radiation*, mais le calcul complet de ces pressions exigera de grandes précautions, comme nous l'expliquerons plus loin.

II. — Le terme oscillatoire, de fréquence  $2\nu$ , n'est pas uniforme dans tout le solide, puisqu'il dépend de  $t$  et  $x_1$  ; il y aura donc des forces résultantes  $\frac{\partial \beta^1}{\partial x_1}$ , de fréquence  $2\nu$ , s'exerçant sur chaque élément de volume. Ces forces vont engendrer, progressivement, une onde de fréquence  $2\nu$ , qui se formera aux dépens de l'onde initiale  $\nu$ . Ensuite apparaîtront des ondes  $3\nu$ ,  $4\nu$ , etc. ; ces diverses ondes se produiront peu à peu, au cours de la propagation. Elles auront des relations de phases bien définies avec l'onde initiale. Tout peut être résumé ainsi : *l'onde, primitivement sinusoïdale, se déforme progressivement, en prenant une forme plus anguleuse ; on trouve très souvent une forme stable, qui peut persister ensuite indéfiniment ; pour les ondes de compression dans un liquide la forme stable est en « dents de scie », avec angles vifs.*

Un autre problème important est celui de la *superposition des ondes*. A la première approximation, les ondes se propagent indépendamment les unes des autres, sans s'influencer le moins du monde. La seconde approximation indique une perturbation, qui provoque la création d'ondes secondaires de fréquences différentes. Prenons deux ondes de fréquences  $\nu$  et  $\nu'$ , se propageant suivant la direction  $x_1$  :

$$(xi. 85) \quad u_1 = A_1 \cos 2\pi(\nu t - a_1 x_1) + A'_1 \cos 2\pi(\nu' t - a'_1 x_1)$$

le terme perturbateur en  $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2$  va maintenant se décomposer ainsi :

$$(xi. 86) \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 = 4\pi^2 a_1^2 A_1^2 \sin^2 2\pi(\nu t - a_1 x_1) + 4\pi^2 a_1'^2 A_1'^2 \sin^2 2\pi(\nu' t - a'_1 x_1) \\ + 8\pi^2 a_1 a'_1 A_1 A'_1 \sin 2\pi(\nu t - a_1 x_1) \sin 2\pi(\nu' t - a'_1 x_1).$$

Les deux premiers termes ne nous apprennent rien de nouveau ; ils suivent le schéma (xi. 83) et comportent, pour chacune des deux ondes, les conséquences déjà étudiées. Le troisième terme, avec son produit de deux sinus, se décompose en une somme de deux cosinus portant sur :

$$(\nu \pm \nu')t - (a_1 \pm a'_1)x.$$

Ces forces nouvelles vont faire naître des ondes secondaires, ayant les *fréquences de combinaison*  $\nu \pm \nu'$  ; ensuite, par répétition du même processus, on verra apparaître peu à peu les ondes :

$$(xi. 87) \quad m\nu \pm m'\nu' \quad m, m' \text{ entiers.}$$

Comme pour l'effet de déformation d'une onde unique, nous aurons ici une déformation progressive du système de deux ondes (xi. 85), avec trans-

formation, au cours de la propagation, en une onde résultante de forme compliquée.

Dans tous ces exemples d'ondes se propageant librement, sans rencontrer d'obstacles, le système d'ondes émis dans une certaine région du solide (sur le plan  $x_1 = 0$ , dans nos hypothèses), se propage d'abord presque sans déformation; si l'amplitude  $A_1$  des oscillations est petite, nous observerons, au voisinage de la « source d'ondes », et sur une assez longue distance, une propagation non perturbée; ce n'est qu'à grande distance de la source que les perturbations se feront sentir.

En restant au voisinage de la source, nous pourrions donc étudier les propriétés d'ondes sinusoïdales non perturbées.

### IX. — Cas des ondes stationnaires.

Les circonstances sont très différentes, si l'on observe des *ondes stationnaires*, telles que celles qui se produisent à l'intérieur d'une enceinte réfléchissante (§ 6). Les réflexions successives superposent, dans l'enceinte, des ondes récemment émises et d'autres qui ont effectué un trajet prolongé et ont eu le temps de se déformer très notablement. Il est impossible, dans ce cas, de garder la forme sinusoïdale pour les déplacements et toutes les formules du paragraphe 6 doivent être révisées.

Prenons, par exemple, des ondes stationnaires longitudinales, entre deux miroirs parallèles (incidence normale); en première approximation (<sup>1</sup>), les déplacements seront :

$$(x1. 88) \quad u_1 = D_1 \sin 2\pi a_1 x_1 \cos 2\pi \nu t \quad u_2 = u_3 = 0 \quad 2a_1 l_1 = n_1 \text{ entier.}$$

$u_1$  est nul sur le miroir  $x_1 = 0$  et sur le miroir  $x_1 = l_1$ . La composante  $\mathcal{B}_1^1$  des efforts de Boussinesq (x1. 84) comprend un terme en  $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2$  qui donne :

$$(x1. 89) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 &= 4\pi^2 a_1^2 D_1^2 \cos^2 2\pi a_1 x_1 \cos^2 2\pi \nu t \\ &= 2\pi^2 a_1^2 D_1^2 \cos^2 2\pi a_1 x_1 [1 + \cos 4\pi \nu t]. \end{aligned}$$

Nous retrouvons des termes dont la moyenne (dans le temps) n'est pas nulle et d'autres de fréquence  $2\nu$ ; les faits ressemblent à ceux que nous montraient les formules (x1. 83 et 84).

Mais ici, prenons garde : le terme moyen n'est pas constant au travers du solide :

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} = 2\pi^2 a_1^2 D_1^2 \cos^2 2\pi a_1 x_1 = \pi^2 a_1^2 D_1^2 [1 + \cos 4\pi a_1 x_1].$$

L'effort  $\mathcal{B}_1^1$  n'est pas uniforme dans le solide; l'équilibre moyen n'est pas

(<sup>1</sup>) C'est un cas particulier de la solution générale (x1. 61), pour  $a_1 = \frac{n_1}{2l_1}$ ,  $a_2 = a_3 = 0$ .

possible. Il va se produire de petits déplacements moyens  $u'_1$ , en plu vibrations  $u_1$  (xi. 88); nous aurons un déplacement total  $u_1 + u'_1$ , avec :

$$(xi. 90) \quad u'_1 = K \sin 4\pi a_1 x_1$$

ces déplacements moyens sont nuls sur les miroirs  $x_1 = 0$  et  $l_1$ , puisque nous nous sommes imposés cette condition aux limites. Le coefficient  $K$  s'obtiendra en écrivant que la valeur moyenne  $\overline{\mathcal{B}_1^4}$  est constante dans tout le solide;  $K$  sera de l'ordre de grandeur de  $D_1^2$ ; prenons  $\mathcal{B}_1^4$  dans (xi. 84) et formons sa moyenne dans le temps :

$$(xi. 91) \quad \begin{aligned} \overline{\mathcal{B}_1^4}^t &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + 3 \left[ \frac{\lambda}{2} + \mu + 8A + 8B + 8C \right] \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \\ &= (\lambda + 2\mu) K 4\pi a_1 \cos 4\pi a_1 x_1 \\ &\quad + 3 \left[ \frac{\lambda}{2} + \mu + 8A + 8B + 8C \right] \pi^2 a_1^2 D_1^2 \left[ 1 + \cos 4\pi a_1 x_1 \right]. \end{aligned}$$

Cet effort  $\overline{\mathcal{B}_1^4}^t$  est constant si les termes en  $\cos 4\pi a_1 x_1$  se compensent, ce qui détermine  $K$  et donne :

$$(xi. 92) \quad \overline{\mathcal{B}_1^4}^t = 3\pi^2 a_1^2 D_1^2 \left[ \frac{\lambda}{2} + \mu + 8A + 8B + 8C \right].$$

Ce résultat mérite d'être souligné; plusieurs auteurs, cherchant à calculer ces pressions de radiation (ou des effets analogues) ont simplement admis des oscillations sinusoïdales (xi. 88) et calculé la valeur de  $\overline{\mathcal{B}_1^4}^t$  sur le miroir  $x_1 = 0$ , ce qui revient à prendre  $K = 0$  et  $x_1 = 0$  dans (xi. 91); un tel calcul donne un résultat double du résultat correct (xi. 92). Il est donc tout à fait impossible d'arriver à un résultat juste, dans le cas des ondes stationnaires, si l'on ne tient pas compte des petites variations de densité locales, causées par les petits déplacements moyens (xi. 90).

Ce premier exemple suffit d'ailleurs à illustrer un résultat qui est général : l'effort exercé sur le miroir ( $x_1 = 0$ ) est donné par la valeur moyenne d'es-

pace et de temps  $\overline{\mathcal{B}_1^4}^t$ , et non pas par la valeur prise sur le miroir, sans autre précaution. Les petits déplacements (xi. 90) ont toujours pour résultat d'égaliser les efforts moyens et de réaliser physiquement la moyenne d'espace.

Introduisons la *densité d'énergie moyenne*  $\overline{E'}_{osc.}$  des oscillations élastiques; son expression est :

$$\overline{E'}_{osc.} = \overline{T} + \overline{E_2} = 2\overline{E_2} = (\lambda + 2\mu) D_1^2 \frac{4\pi^2 a_1^2}{4}$$

où  $T$  et  $E_2$  sont les densités d'énergie cinétique et d'énergie potentielle (réduite aux termes du second degré xi. 81); les moyennes sont prises sur le temps et la coordonnée  $x_1$ ; chaque  $\cos^2$  donne  $\frac{1}{2}$ , d'où le facteur  $\frac{1}{4}$ . L'expression (xi. 92) se transcrit alors ainsi :

$$(xi. 93) \quad \mathcal{B}_1^4 = \frac{\overline{E'}_{osc.}}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{3\lambda}{2} + 3\mu + 24A + 24B + 24C \right].$$

X. — *Pression de radiation, pour les ondes stationnaires.*

Nous avons précisé les difficultés et la nature des précautions à prendre, en étudiant au paragraphe précédent un exemple particulièrement simple. Nous pourrions maintenant attaquer un problème plus difficile : nous prendrions un des systèmes d'ondes stationnaires définis au paragraphe 6 ; ce système est caractérisé par trois valeurs  $a_1, a_2$  et  $a_3$  et par une certaine direction de vibration, longitudinale ou transversale ; rappelons que le vecteur  $a_1, a_2, a_3$  a pour longueur  $\frac{1}{\Lambda}$  (l'inverse de la longueur d'onde élastique  $\Lambda$ ) et qu'il est dirigé suivant le « rayon » incident :

$$(xi. 94) \quad |a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{\Lambda^2}$$

$$\frac{a_1}{|a|} = q_1 = \cos \theta_1,$$

$q_1$  est le cosinus de l'angle  $\theta_1$  que fait le rayon incident avec l'axe  $Ox_1$ . Nous chercherons l'effort moyen exercé par ces vibrations élastiques sur le plan  $x_1 = 0$ , qui constitue un miroir rigide lisse (chap. XI, § 6). Quelques mots d'explication seront utiles ; prenons un élément de surface  $S$  perpendiculaire

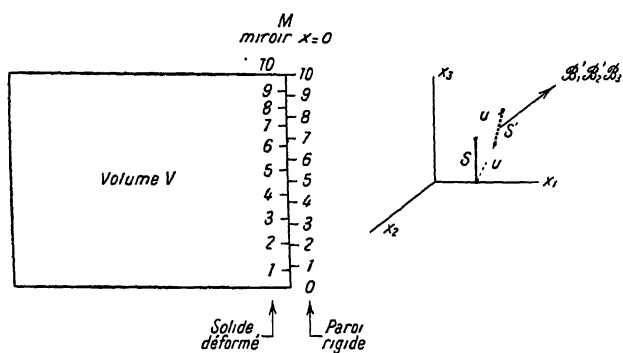


Fig. xi. 14.

à  $x_1$ , lorsque le solide est au repos ; dans le solide déformé la surface  $S$  vient en  $S'$  ; elle a changé de dimensions et d'orientation ; les forces qui s'exercent, dans le solide, au travers de  $S'$  sont données par les composantes  $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$  de Boussinesq (chap. X, § 13, éq. x. 116). La surface réelle, au travers de laquelle s'exercent ces efforts est donc une surface déformée, entraînée par le solide dans son mouvement. Sur le miroir  $M$ , les circonstances sont particulières ; les mouvements du solide sont seulement des glissements parallèlement au miroir, supposé rigide immobile ; traçons (à droite) une échelle fixe, liée au miroir ; les divisions 1, 2 ... 10 représentent des éléments de surface égaux ; lorsque le solide se déforme, certains de ces éléments de surface se contractent, d'autres se dilatent ; une échelle tracée sur la surface du solide



présentera, à un certain moment, des divisions inégales (échelle de gauche) ; mais tous ces éléments de surface déformés restent appliqués exactement sur la paroi rigide  $M$  et la recouvrent entièrement ; c'est ce que nous avons supposé par nos conditions aux limites du paragraphe 6 de ce chapitre. Si nous prenons la somme des composantes  $\beta_i^1$  pour tous les éléments du solide en contact avec ce miroir  $M(x_1 = 0)$  cette somme représente aussi la composante  $f_i$  de la force s'exerçant sur le miroir. L'absence de mouvement normal au miroir et l'absence de variation de la surface totale nous garantissent ce résultat.

Par suite de nos conditions aux limites, la seule composante non nulle est la composante normale  $\beta_1^1$  ; les composantes tangentielles  $\beta_2^1$  et  $\beta_3^1$  sont nulles. Nous calculerons donc la valeur moyenne de  $\beta_1^1$  sur la surface  $x_1 = 0$ .

Pour éviter des complications, nous supposons que les composantes  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont toutes trois différentes de zéro, et nous indiquerons ensuite, à la fin du paragraphe, ce qui se passe si l'une ou plusieurs de ces composantes sont nulles. Nous allons donc étudier la pression de radiation exercée, sur le miroir  $x_1 = 0$ , par des ondes réfléchies sous l'incidence arbitraire  $\theta_1$ , les incidences exactement normale ou rasante étant provisoirement exclues ; nous devons formuler les résultats pour les trois types d'ondes :

1° longitudinale ;

2° transversale, polarisée perpendiculairement au plan d'incidence ;

3° transversale, polarisée dans le plan d'incidence.

Partons des formules (XI. 79, 80 et 81) et formons la dérivée par rapport à  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$  ; nous obtenons l'expression complète de  $\beta_1^1$ , avec les termes linéaires dont nous nous sommes déjà servis, et tout un ensemble de termes nouveaux, du second degré :

$$\begin{aligned}
 \text{(XI. 95)} \quad \beta_1^1 &= \frac{\partial(E_2 + E_3)}{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)} = \frac{\lambda}{2} I_1' + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\lambda}{2} \left[ \sum_{i,l} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2 + I_1' \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \\
 &+ \mu \sum_k \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right] \\
 &+ 2A \left[ I_2' + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} I_1' \right] + 6B(I_1')^2 \\
 &+ 6C \left[ 4 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Prenons alors un système d'ondes stationnaires (XI. 61), dans lequel nous mettrons en évidence le caractère sinusoïdal des oscillations en posant :

$$\text{(XI. 96)} \quad A_h(t) = D_h \cos 2\pi\nu t.$$

La formule (XI. 65) nous donne alors :

$$\text{(XI. 97)} \quad \frac{\partial u_h}{\partial x_k} = D_h 2\pi\nu \varphi_{hk} \cos 2\pi\nu t.$$

Nous porterons ces valeurs dans (XI. 95), et nous examinerons le groupe des termes nouveaux, du second degré ; chacun de ces termes comporte un facteur :

$$\text{(XI. 98)} \quad \varphi_{hk}^2 \cos^2 2\pi\nu t.$$

D'après les indications du paragraphe précédent, nous avons à calculer la valeur moyenne de  $\mathcal{B}_1^1$ , prise dans le temps d'une part et dans tout le volume  $V$ , d'autre part. En effet, le piston formé par le miroir  $x_1 = 0$  est attaqué sur toute sa surface, ce qui nous oblige à prendre une moyenne sur les coordonnées  $x_2, x_3$ , dans le plan du miroir.

Ensuite intervient le mécanisme des petites déformations moyennes, dans tout le solide, suivant les remarques du paragraphe 9. Cet équilibrage des inégalités locales de  $\mathcal{B}_1^1$  nous conduit à prendre une moyenne sur la coordonnée  $x_1$  normale au miroir. Or, la moyenne dans le temps est  $\frac{1}{2}$ , pour tous les termes (xi. 98) et la moyenne d'espace est  $\frac{1}{8}$ , tant qu'aucun des trois nombres  $a_1, a_2, a_3$  n'est nul (équ. xi. 67). Nous avons déjà dit que nous exceptons provisoirement ces cas spéciaux.

La valeur moyenne de (xi. 98) est donc  $\frac{1}{16}$ .

Ecrivons alors la moyenne double de  $\mathcal{B}_1^1$  en tenant compte de ces simplifications :

$$(xi. 99) \quad \overline{\mathcal{B}_1^1}^{x_1 x_2 x_3} = \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{\lambda}{2} \left[ \sum_{i,l} (D_i a_l)^2 + 2 D_i a_l L |a| \right] + \mu \sum_k \left[ (D_1 a_k)^2 + (D_k a_1)^2 + D_1 D_k a_1 a_k \right] \right. \\ \left. + 4A \left[ \sum_{i,l} (D_i a_l)^2 + \sum_{i,l} D_i D_l a_i a_l + 4 D_i a_l L |a| \right] \right. \\ \left. + 24 B L^2 |a|^2 + 6C \left[ 4(D_1 a_1)^2 + (D_1 a_2 + D_2 a_1)^2 + (D_1 a_3 + D_3 a_1)^2 \right] \right]$$

Nous posons :

$$D^2 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 \qquad L |a| = D_1 a_1 + D_2 a_2 + D_3 a_3 = \frac{1}{2} \bar{I}_1$$

de sorte que  $L$  est la composante longitudinale (suivant le rayon  $\vec{a}$ ) du vecteur déplacement  $D$ . En regroupant les termes, et tenant compte de (xi. 94), on peut simplifier la formule :

$$(xi. 100) \quad \overline{\mathcal{B}_1^1} = \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{\lambda}{2} (D^2 |a|^2 + 2 D_1 L a_1 |a|) + \mu (D_1^2 |a|^2 + D^2 a_1^2 + D_1 L a_1 |a|) \right. \\ \left. + 4A (D^2 |a_1|^2 + L^2 |a|^2 + 4 D_1 L a_1 |a|) + 24 B L^2 |a|^2 \right. \\ \left. + 6C (D_1^2 |a|^2 + D^2 a_1^2 + 2 D_1 L a_1 |a|) \right]$$

Voyons maintenant ce que donne cette formule générale, lorsqu'on l'applique aux divers types d'ondes élastiques.

**I. — Vibration longitudinale.** — Le vecteur  $D$  est alors parallèle au vecteur  $\vec{a}$  dirigé suivant le rayon incident :

$$D = L \qquad D_i = D \frac{a_i}{|a|} = D q_i$$

d'après (xi. 94) ; la formule générale (xi. 100) se réduit à :

$$(xi. 101) \quad \overline{\mathcal{B}_1^1} = \frac{D^2 |a|^2 \pi^2}{4} \left[ \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B + q_1^2 (\lambda + 3\mu + 16A + 24C) \right].$$

Nous pouvons, ici comme à la fin du paragraphe précédent, introduire la densité d'énergie moyenne  $\overline{E}_{osc.}$  dans les oscillations élastiques stationnaires :

$$\overline{E}_{osc.} = T + E_2 = \frac{1}{4} (\lambda + 2\mu) D^2 \pi^2 |a|^2.$$

Là encore s'introduisent, lorsqu'on prend les moyennes, des expressions dont la moyenne vaut  $\frac{1}{8}$  si aucun des  $a_1, a_2, a_3$  n'est nul, mais se r $\frac{1}{4}$  ou  $\frac{1}{2}$  si un ou deux de ces nombres est nul ; nous avons indiqué le calcul très en détail au paragraphe 6, éq. (xi. 66 à 73). Il suffit de se rappeler que, pour les ondes longitudinales :

$$|A_{\gamma a}|^2 = \frac{1}{2} D^2.$$

La formule (xi. 101) se transcrit alors ainsi :

$$(xi. 102) \quad \overline{\beta_1} = \frac{\overline{E}_{osc.}}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B + q_1^2 (\lambda + 3\mu + 16A + 24C) \right].$$

Notre calcul supposait qu'aucun des nombres  $a$  n'était nul. Si l'on reprend le calcul pour les divers cas où l'un des  $a$  est nul, on constate que la formule (xi. 101) est fautive par un facteur  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{4}$  ; mais ce même facteur se retrouve dans le calcul de la densité d'énergie oscillante  $\overline{E}_{osc.}$ , de sorte que finalement la formule (xi. 102) reste toujours valable.

Sans entrer dans le détail de ces divers cas spéciaux, nous prendrons un exemple, celui de l'incidence normale :

$$q_1 = 1 \quad q_2 = q_3 = 0.$$

Nous avons traité cet exemple au paragraphe précédent, et le calcul nous a donné l'expression (xi. 93) ; faisons  $q_1 = 1$  dans la formule générale (xi. 102) et nous retrouvons bien le même résultat.

**II. — Vibration transversale, polarisée parallèlement au miroir, c'est-à-dire perpendiculairement au plan d'incidence..**

Nous devons écrire que  $L$  est nul (vibration transversale) ainsi que la composante  $D_1$  suivant la normale  $Ox_1$  au miroir :

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 & L &= D_2 a_2 + D_3 a_3 = 0 \\ D_2 &= \frac{D \cdot a_3}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} & D_3 &= - \frac{D \cdot a_2}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} \end{aligned}$$

La formule (xi. 100) se ramène à la forme suivante :

$$(xi. 103) \quad \overline{\beta_1} = \frac{D^2 |a|^2 \pi^2}{4} \left[ \frac{\lambda}{2} + 4A + q_1^2 (\mu + 6C) \right].$$

Introduisons, ici encore, la densité d'énergie des oscillations  $\overline{E}_{osc.}$  et la formule devient :

$$(xi. 104) \quad \overline{\beta_1} = \frac{\overline{E}_{osc.}}{\mu} \left[ \frac{\lambda}{2} + 4A + q_1^2 (\mu + 6C) \right]$$

car :

$$\overline{E}_{osc.} = \frac{1}{2} \mu D^2 |\alpha|^2 \pi^2$$

pour les ondes transversales.

III. — **Vibration transversale, polarisée dans le plan d'incidence.** — Nous devons poser :

$$L = 0 \quad D_3 \alpha_2 - D_2 \alpha_3 = 0 ;$$

la seconde condition indique bien que cette nouvelle direction de vibration est perpendiculaire à celle que nous venons d'étudier précédemment. On posera :

$$D_1 = -D \sqrt{1 - q_1^2} \quad D_2 = D \frac{q_1 q_2}{\sqrt{1 - q_1^2}} \quad D_3 = D \frac{q_1 q_3}{\sqrt{1 - q_1^2}}$$

La formule (xi. 95) se simplifie considérablement :

$$\begin{aligned} \text{(xi. 108)} \quad \overline{\beta}_1 &= \frac{D^2 |\alpha|^2 \pi^2}{4} \left( \frac{\lambda}{2} + \mu + 4A + 6C \right) \\ &= \frac{\overline{E}_{osc.}}{\mu} \left( \frac{\lambda}{2} + \mu + 4A + 6C \right). \end{aligned}$$

On remarquera que les formules (xi. 105) et (xi. 104) donnent bien le même résultat pour l'incidence normale ( $q_1 = 1$ ) ce qui est raisonnable, car rien ne différencie plus, dans ce cas, les deux types de polarisation transversale.

### ***XI. — Le calcul des pressions de radiation par la formule de Boltzmann-Ehrenfest.***

La méthode que nous avons suivie, pour trouver les tensions moyennes exercées par des ondes élastiques, est la plus directe et la plus rapide ; mais

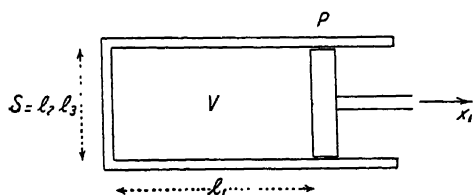


Fig. xi. 15.

les mêmes résultats peuvent se retrouver par d'autres voies. Ainsi, nous avons donné des exemples de calculs analogues, à la fin du chapitre VIII, en nous appuyant sur la formule des invariants adiabatiques de Boltzmann-Ehrenfest. Voyons ce que donne, dans le cas présent, cette méthode très générale.

Nous considérerons un volume  $V$  du solide élastique, enfermé dans une enceinte rigide lisse (fig. xi. 15), constituant un cylindre de section  $S$  fermé par un piston  $P$  ; la profondeur du cylindre est  $l_1$ , de sorte que :

$$V = S \cdot l_1.$$

Nous prendrons un certain système d'ondes stationnaires, dans ce volume  $V$ , et nous effectuerons ensuite une petite dilatation  $dl_1$  du volume,

par déplacement du piston P. Nous obtiendrons alors la force totale moyenne exercée, sur le piston, par ces vibrations élastiques, en nous reportant à la formule (VIII. 170) :

$$(VIII. 170) \quad F = \frac{E}{\tau} \frac{d\tau}{dl_1} = \frac{E}{l_1} \left( 1 - \frac{l_1}{W} \frac{dW}{dl_1} \right)$$

E énergie totale des vibrations, c'est-à-dire énergie cinétique et énergie potentielle, dans tout le volume V,

$\tau$  période de vibration,

W vitesse de propagation.

Nous passons de là à la pression de radiation  $P_r$ , [en divisant par la surface S du piston :

$$(XI. 106) \quad P_r = \overline{E}_{osc} \left( 1 - \frac{l_1}{W} \frac{dW}{dl_1} \right) = -\overline{\mathcal{B}}_1^1.$$

$\overline{E}_{osc}$  est, en effet, d'après nos notations du paragraphe précédent, la densité moyenne d'énergie vibratoire, c'est-à-dire  $\frac{E}{V}$ . Les efforts  $\mathcal{B}_1^1$  de Boussinesq sont des tractions, suivant les conventions usuelles de l'élasticité ;  $P_r$  est une pression s'exerçant de l'intérieur vers l'extérieur ; de là le changement de signe dans (XI. 106).

Cette formule, très séduisante, est en réalité fort difficile à appliquer au cas des vibrations dans un solide : le corps peut bien être isotrope initialement, mais après une dilatation unilatérale  $dl_1$ , il devient anisotrope ; il faut donc, pour utiliser la formule (XI. 106) calculer les vitesses de propagation des diverses ondes élastiques, dans ce corps solide rendu anisotrope par une traction latérale ; c'est un problème assez délicat. Lorsqu'on fait ce calcul (1), on retombe exactement sur les formules du paragraphe 10.

(1) L. BAILLOUIN Sur les tensions de radiation. *Annales de Physique*, X, t. 4, 1925, pp. 528-586.

Les notations sont presque les mêmes que dans ce livre, mais  $a_1, a_2, a_3$  dans l'article des *Annales*, représentent les cosinus directeurs de l'onde, que nous avons appelés  $q_1, q_2, q_3$  dans ce chapitre. L'article cité contient pour la première fois une analyse du rôle de la pression extérieure sur la propagation des ondes, mais cette étude n'y est pas faite d'une façon tout à fait générale. La discussion que nous avons donnée au chapitre X, §§ 8 et 12 est beaucoup plus correcte. Le point de vue adopté implicitement, dans l'article des *Annales*, consistait en ce que l'énergie potentielle H des forces extérieures (Chap. X, § 8, éq. x. 66) comprendrait juste les termes du premier ordre vis-à-vis des dérivées partielles :

$$H = p \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

de manière à ne compenser, dans l'énergie potentielle totale  $\mathcal{E} + H$ , que ces termes linéaires, et à ne jouer aucun rôle dans les termes d'ordre supérieur  $E_2$  ou  $E_3$  de l'éq. XI. 1. Or, diverses compensations de termes permettent d'écrire :

$$H = p \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = p \left[ \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{8} I_1^2 - \frac{1}{4} I_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \dots \right]$$

ce développement est correct jusqu'aux termes du 3<sup>e</sup> ordre exclus. Il reproduit presque exactement le développement (x. 68), que nous avons utilisé, sauf le groupe des termes  $\sum_{i,k} (\dots)$ , et ces termes accessoires sont nuls pour tous les cas d'ondes planes ou d'ondes stationnaires, car alors  $u_i$  et  $u_k$  dépendent de la même manière des  $x_i, x_k$ . L'hypothèse assez particulière de l'article des *Annales* conduit donc, en pratique, aux mêmes résultats que notre méthode actuelle. On se rappellera seulement que les coefficients d'élasticité  $\lambda, \mu$  dans ce chapitre sont en fait les coefficients apparents  $\lambda_a, \mu_a$  (Chap. XI, éq. 66), c'est-à-dire  $\lambda + p$  et  $\mu - p$ . Avec ces précautions, on constate que les formules 85 à 87 (p. 582) des *Annales* concordent avec XI. 102 à 105.

**XII. — Le tenseur des tensions de radiation  
dans une onde libre.**

Une autre méthode, tout à fait différente, consiste à rechercher les valeurs moyennes des tensions élastiques dans un corps parcouru par une onde plane ; nous supprimerons donc toutes les parois limites qui provoquent des réflexions des ondes, et des vibrations stationnaires. Nous considérerons un solide élastique isotrope illimité, dans lequel se propage une onde élastique plane, de polarisation donnée (longitudinale ou transversale) et nous chercherons les valeurs moyennes des tensions élastiques dans la région parcourue par cette onde. L'avantage de la méthode, c'est qu'elle s'étend sans difficulté sérieuse au cas des solides anisotropes (cristaux) ; au contraire, les méthodes basées sur des calculs d'ondes stationnaires sont très difficiles à appliquer aux cristaux. Nous avons insisté déjà sur ce point, en comparant les conditions cycliques de Born (chap. XI, § 2) avec des conditions limites donnant réflexion (chap. XI, §§ 3 à 6).

Nous pourrions tout d'abord calculer les valeurs moyennes des efforts  $\mathcal{B}_i^k$  de Boussinesq, au travers du solide parcouru par une onde élastique plane ; c'est ainsi que procède M. Born, dans l'évaluation de ces termes, au sujet du problème de la dilatation thermique des solides (voir chap. XII, § 10). Le défaut de cette méthode, c'est de nous donner un tableau de composantes  $\mathcal{B}_i^k$  qui ne forment pas un tenseur (chap. X, § 13). Ces  $\mathcal{B}_i^k$  représentent les composantes, suivant les axes fixes, des efforts qui s'exercent au travers d'éléments de surface entraînés par le solide dans son mouvement (chap. XI, § 10), de sorte que ces éléments de surface se déplacent, se déforment et changent d'orientation, au cours des vibrations provoquées par l'onde élastique. Les efforts  $\mathcal{B}_i^k$  moyens correspondent donc à des grandeurs difficilement observables.

Une autre méthode consiste à tracer, au travers du milieu solide en vibration, une surface idéale fixe, non déformée, et qui ne soit pas entraînée par le solide dans son mouvement. Nous chercherons ensuite les tensions exercées, au travers de cette surface immobile indéformable. C'est le problème traité au chapitre X, § 11, sur l'emploi des coordonnées d'Euler ; ces tensions sont représentées par le tenseur suivant (équ. x. 97) :

$$(xi. 107) \quad \Theta'_{rk} = \begin{pmatrix} \Theta_{11} - \rho v_1^2 & \Theta_{12} - \rho v_1 v_2 & \Theta_{13} - \rho v_1 v_3 \\ \Theta_{21} - \rho v_2 v_1 & \Theta_{22} - \rho v_2^2 & \Theta_{23} - \rho v_2 v_3 \\ \Theta_{31} - \rho v_3 v_1 & \Theta_{32} - \rho v_3 v_2 & \Theta_{33} - \rho v_3^2 \end{pmatrix}$$

Il est indispensable de faire figurer, à côté des efforts élastiques  $\Theta_{rk}$ , le tenseur  $\rho v_r v_k$  du flux de quantité de mouvement. En effet, au travers de notre surface idéale fixe, il s'écoule de la matière (densité  $\rho$ , vitesse  $v$ ) ; cela correspond à un transport de quantité de mouvement, grandeur qui est en tous points équivalente à une force. Les forces  $\Theta_{rk}$  et les flux de quantité de mouvement  $\rho v_r v_k$  ont des valeurs moyennes non nulles, dans la région parcourue par une onde. Au contraire, la densité de quantité de mouvement  $\rho v_k$  est une grandeur oscillante, de moyenne nulle : malgré ses vibrations, le

corps ne se transporte pas, et reste en moyenne au repos. Lord Rayleigh avait essayé, par un raisonnement erroné, d'établir une relation entre les pressions de radiation et la densité de quantité de mouvement ; cette remarque incorrecte a beaucoup obscurci les discussions ultérieures sur ce sujet.

Nous ne reprendrons pas ici le détail des calculs, qui ont été publiés <sup>(1)</sup> autre part ; nous verrons d'ailleurs un peu plus loin (chap. XI, § 15) un exemple simple, sur le cas des ondes dans un liquide ; cette application suffira pour montrer comment on peut conduire le calcul. Un fait curieux doit être signalé : les efforts de Boussinesq  $\overline{\alpha}_{rk}$  et les composantes  $\overline{\theta}'_{rk}$  d'après (xi. 107) fournissent des valeurs numériquement identiques : dans le calcul faisant passer des unes aux autres, une première correction est due au passage des éléments de surface mobiles aux surfaces fixes ; elle est exactement compensée par les termes  $\rho v_i v_k$  du flux de quantité de mouvement qui constituent la seconde correction (*Ann. de phys.*, X, t. 4, 1925, pp. 564 et 568) :

$$(xi. 107 \text{ bis}) \quad \overline{\alpha}_{rk} = \overline{\theta}'_{rk}.$$

Nous indiquerons rapidement comment on évalue les composantes de Boussinesq  $\overline{\alpha}_{rk}$ .

Nous supposons que le milieu isotrope peut être soumis, dans son état initial, à une pression extérieure  $p$  ; c'est dire qu'en l'absence de toute vibration, les tensions sont données par le tableau :

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Ce terme constant, nous n'en parlerons plus par la suite ; ce qui nous intéresse, c'est la valeur moyenne des efforts supplémentaires provoqués par le passage d'une onde.

Étudions une onde plane, qui se propage dans la direction  $Ox_1$  et dont la densité d'énergie vibratoire (cinétique et potentielle) est  $E$ . L'onde pourra être longitudinale ou transversale. Pour calculer les  $\overline{\alpha}_{11}$ ,  $\overline{\alpha}_{22}$  et  $\overline{\alpha}_{33}$  nous n'aurons qu'à appliquer la formule (xi. 95) et celles qu'on en déduit par permutation des indices ; quant aux composantes mixtes  $\overline{\alpha}_{12}$ ,  $\overline{\alpha}_{13}$ ,  $\overline{\alpha}_{32}$  ... elles sont toujours nulles en moyenne.

Les calculs des  $\overline{\alpha}_{rk}$  ne sont pas difficiles ; ceux des  $\overline{\theta}'_{rk}$  sont plus délicats ; et l'on arrive aux résultats suivants :

Onde longitudinale, se propageant suivant  $Ox_1$  :

$$(xi. 108) \quad \overline{\alpha} = \overline{\theta}' = \begin{bmatrix} \frac{E}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{3\lambda}{2} + 3\mu + 24(A+B+C) \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B \right) \end{bmatrix}$$

<sup>(1)</sup> L. BRILLOUIN. Sur les tensions de radiation. *Annales de physique*, X, t. 4, 1925, p. 528, déjà cité. — Les tensions de radiation. *Journ. de Phys.*, VI, t. 6, 1925, p. 337. — Les pressions et tensions de radiation. *Revue d'acoustique*, t. 5, 1936, p. 99.

Onde transversale vibrant suivant  $Ox_2$ , et se propageant suivant  $Ox_1$  :

$$(xi. 109) \quad \bar{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{C}} = \begin{bmatrix} \frac{E}{\mu} \left( \frac{\lambda}{2} + \mu + 4A + 6C \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{\mu} \left( \frac{\lambda}{2} + \mu + 4A + 6C \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{\mu} \left( \frac{\lambda}{2} + 4A \right) \end{bmatrix}$$

Ces expressions tensorielles permettent de répondre à toutes les questions relatives aux pressions moyennes exercées par des ondes élastiques sur des surfaces planes émettant, absorbant ou réfléchissant ces ondes. Nous verrons sur quelques exemples comment s'effectue le raccord entre ces formules et celles du paragraphe précédent.

### XIII. — Exemples d'application de ces tenseurs.

Les quelques problèmes que nous allons traiter ici seront des exemples de calcul tensoriel élémentaire, illustrant très directement les formules fondamentales de définition des tenseurs (chap. II, § 12).

Nous prenons un premier système d'axes  $x^i$ , par rapport auxquels un tenseur avait des composantes  $t^{ik}$ ; puis nous choisissons d'autres axes  $X^r$ , et nous définissons les coefficients :

$$\beta_i^r = \frac{\partial X^r}{\partial x^i}.$$

Nous trouvons alors les nouvelles composantes  $T^{rs}$  du même tenseur par les formules :

$$(xi. 110) \quad T^{rs} = \sum_{ik} \beta_i^r \beta_k^s t^{ik}.$$

Dans le cas qui nous occupe, nous nous contenterons de systèmes d'axes toujours orthogonaux; en outre, nous partirons des tenseurs (xi. 108 ou 109) qui ne comprennent que des termes diagonaux  $t^{ii}$ ; la formule générale (xi. 110) se simplifie :

$$(xi. 111) \quad T^{rs} = \sum_i \beta_i^r \beta_i^s t^{ii}$$

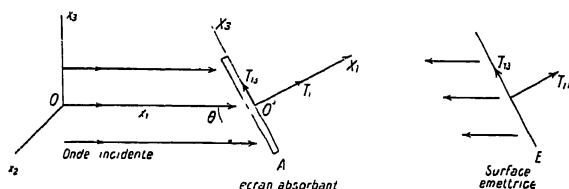


Fig. xi. 16.

et nous pourrions ne pas faire attention à la position des indices (en haut ou en bas) puisqu'en axes euclidiens orthogonaux la distinction entre covariance



et contravariance ne joue plus. Considérons une onde incidente, se propageant suivant  $Ox_1$ , et tombant sur une surface absorbante oblique  $A$ ; l'angle d'incidence est  $\theta$  (fig. xi. 16); nous choisirons des axes  $X_1X_2X_3$ , dont  $X_1$  est normal à  $A$ ;  $X_3$  dans le plan  $A$  et  $X_2$  dans ce même plan, parallèle à  $Ox_2$ ; les  $\beta_r^r$  sont les cosinus directeurs des axes  $X^r$ :

$$\begin{array}{lll} \beta_1^1 = \cos \theta & \beta_2^1 = 0 & \beta_3^1 = \sin \theta \\ \beta_1^2 = 0 & \beta_2^2 = 1 & \beta_3^2 = 0 \\ \beta_1^3 = -\sin \theta & \beta_2^3 = 0 & \beta_3^3 = \cos \theta. \end{array}$$

On en tire le tableau des composantes du tenseur  $T$ :

$$(xi. 112) \quad \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}\cos^2\theta + t_{33}\sin^2\theta & 0 & (-t_{11} + t_{33})\cos\theta\sin\theta \\ 0 & t_{22} & 0 \\ (-t_{11} + t_{33})\cos\theta\sin\theta & 0 & t_{11}\sin^2\theta + t_{33}\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Les composantes  $T_{11}T_{12}T_{13}$  de la première ligne nous donnent les composantes  $F_1F_2F_3$  de la force qui s'exerce sur la surface  $A$  (par unité de surface), ces composantes  $F_1F_2F_3$  étant projetées sur les axes  $X_1X_2X_3$ . Donc  $T_{11}$  est la force normale (suivant  $X_1$ ) et  $T_{33}$  la composante tangentielle.

Voyons ce que donnent ces formules pour une onde longitudinale, à l'intérieur de laquelle les tensions moyennes sont données par (xi. 108); les composantes  $t_{11}$  et  $t_{33}$  sont inégales et nous avons:

$$(xi. 113) \quad \begin{aligned} T_{11} &= \frac{E}{\lambda + 2\mu} \left[ \cos^2\theta \left( \frac{3\lambda}{2} + 3\mu + 24(A+B+C) \right) + \sin^2\theta \left( \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B \right) \right] \\ &= \frac{E}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B + \cos^2\theta(\lambda + 3\mu + 16A + 24C) \right] \\ T_{13} &= -\frac{E}{\lambda + 2\mu} \cos\theta\sin\theta(\lambda + 3\mu + 16A + 24C) \quad T_{12} = 0. \end{aligned}$$

La figure (xi. 16) représente la disposition de ces forces agissant (par unité de surface) sur le plan absorbant  $A$ . Les résultats sont identiques pour le cas d'un plan  $E$  émettant une radiation qui se propage en sens inverse, de droite à gauche.

En effet, les composantes de notre tenseur des « tensions de radiation » sont insensibles à un renversement du sens de propagation. Ce tenseur nous a été fourni par un groupe de termes du second degré, qu'un changement de signe n'affecte aucunement. Dans les expressions (xi. 108 et 109) nous avons en facteur la densité d'énergie  $E$  de l'onde, mais rien ne rappelle le sens de propagation. Nous avons seulement précisé que la propagation se faisait suivant l'axe  $x_1$  et donné la direction de vibration.

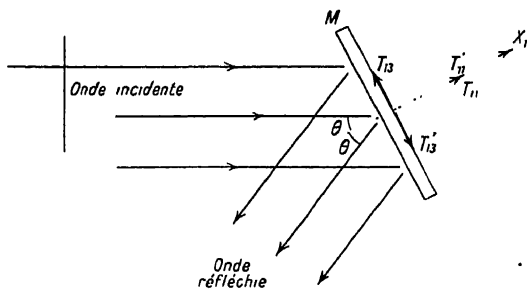


Fig. xi. 17.

Passons au cas d'une surface  $M$  réfléchissante (fig. xi. 17). Tout se passe

de la même manière que si cette surface M était à la fois absorbante et émettrice ; nous superposerons donc simplement les forces  $T_{11}T_{13}$  dues à l'onde incidente (comme si cette onde incidente était absorbée) et les forces  $T'_{11}T'_{13}$  dues à l'onde réfléchie (comme si elle était émise). Nous voyons que les composantes tangentielles  $T_{13}$  et  $T'_{13}$  se compensent, et qu'il reste seulement une *force normale au miroir* :

$$(xi. 114) \quad T_{11} + T'_{11} = \frac{2E}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B + \cos^2 \theta (\lambda + 3\mu + 16A + 24C) \right].$$

D'autre part, la superposition des deux ondes, incidente et réfléchie, donne auprès du miroir des interférences, dans lesquelles l'énergie oscillatoire moyenne, par unité de volume, est :

$$\overline{E}_{osc} = 2E.$$

Nous retombons donc exactement sur la formule (xi. 102) calculée par une autre voie ; la connaissance du tenseur moyen nous permet de résoudre tous les problèmes des efforts de radiation sur des surfaces absorbantes ou émettrices ou sur des miroirs plans.

Insistons sur le fait que le terme de « *pression de radiation* », usuellement adopté, est incorrect. On dit qu'un système de tensions se réduit à une pression, si le tenseur est *diagonal* avec ses *trois composantes égales* :

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Nous avons rappelé ce point à plusieurs reprises. Cette propriété mathématique se traduit par un fait physique : si l'on trace dans le milieu une surface unité d'orientation quelconque, l'effort qui s'exerce au travers de cette surface est toujours normal à la surface et égal à  $p$  ; il suffit d'appliquer au tenseur ci-dessus les formules (xi. 111) pour vérifier ce point.

Or que trouvons-nous pour les efforts moyens exercés par les ondes ? Les tenseurs (xi. 108 et 109) sont diagonaux, avec des *composantes inégales* ; il s'ensuit que la propriété physique ci-dessus n'est pas remplie ; ces forces ne se réduisent pas à une pression. Si nous traçons une surface absorbante A d'orientation quelconque (fig. xi. 16) les efforts ne sont pas normaux ni constants. Si nous prenons un plan réfléchissant M (fig. xi. 17) les efforts sont normaux au miroir, mais dépendent de l'incidence  $\theta$ , c'est-à-dire de l'orientation du miroir. Il est donc tout à fait incorrect de parler de pression de radiation.

Passons aux ondes transversales, et supposons tout d'abord une onde polarisée suivant  $Ox_2$ , se propageant suivant  $Ox_1$ , et tombant sur un écran absorbant A, dont la normale est dans le plan  $x_3Ox_1$  (fig. xi. 16) ; le calcul (xi. 112) est toujours valable et nous devons seulement prendre  $t_{11}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{33}$  dans le tableau (xi. 109) ; nous trouvons :

$$T_{11} = \frac{E}{\mu} \left[ \frac{\lambda}{2} + 4A + \cos^2 \theta (\mu + 6C) \right]$$

$$(xi. 115) \quad T_{13} = -\frac{E}{\mu} \cos \theta \sin \theta (\mu + 6C)$$

$$T_{12} = 0.$$

Pour un miroir plan (fig. xi. 17) cet exemple nous conduit au cas de réflexion, avec vibration suivant  $x_2$ , parallèlement au miroir, et nous obtenons un effort normal au miroir :

$$(xi. 116) \quad T_{11} + T'_{11} = \frac{\bar{E}'_{osc}}{\mu} \left( \frac{\lambda}{2} + 4A + \cos^2 \theta (\mu + 6C) \right) \quad \bar{E}'_{osc} = 2E$$

ce qui correspond exactement à notre formule (xi. 104).

Nous pouvons maintenant supposer une onde transversale vibrant suivant  $Ox_3$ ; cela reviendra à échanger les termes  $t_{22}$  et  $t_{33}$  dans le tenseur (xi. 109); dans les formules (xi. 112), nous remplacerons donc  $t_{33}$  par  $t_{22}$ , mais il se trouve que  $t_{22}$  est égal à  $t_{11}$ ; il en résulte que les efforts sont toujours normaux et constants :

vibration dans le plan d'incidence, plan absorbant

$$(xi. 117) \quad T_{11} = \frac{E}{\mu} \left( \frac{\lambda}{2} + \mu + 4A + 6C \right) \quad T_{12} = T_{13} = 0.$$

Pour un plan réfléchissant, le résultat est le même; il suffit de remplacer la densité d'énergie vibratoire  $E$  d'une onde par la densité d'énergie  $\bar{E}'_{osc}$  des deux ondes incidente et réfléchie; nous retrouvons ainsi la formule (xi. 105).

#### XIV. — Valeurs moyennes, pour ondes élastiques complètement diffusées.

Nous avons indiqué, au début du paragraphe 11, les difficultés particulières que présente l'application des formules de Boltzmann-Ehrenfest au cas du corps solide. Une traction latérale provoque une anisotropie du solide et produit des effets très complexes. Nous pouvons alors voir ce que nous fournit l'étude d'une *dilatation isotrope du solide*. Supposons que nous produisions une égale dilatation suivant les 3 directions :

$$(xi. 118) \quad \frac{dl_1}{l_1} = \frac{dl_2}{l_2} = \frac{dl_3}{l_3} = d\alpha$$

$$\frac{dV}{V} \approx 3d\alpha.$$

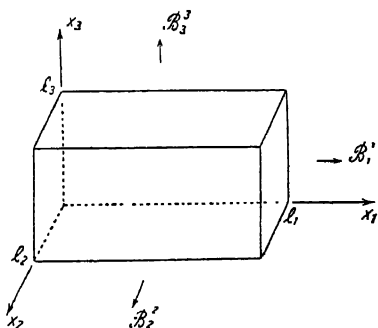


Fig. xi. 18.

Nous avons des efforts moyens normaux  $B_1^1$ ,  $B_2^2$  et  $B_3^3$  qui sont des *tractions* s'exerçant sur les trois faces, par unité de surface, de sorte que le *travail recueilli* à l'extérieur (fourni *par* le corps solide) au cours de la dilatation sera :

$$(xi. 119) \quad d\mathcal{C} = - (B_1^1 l_2 l_3 dl_1 + B_2^2 l_1 l_3 dl_2 + B_3^3 l_1 l_2 dl_3) = -V d\alpha (B_1^1 + B_2^2 + B_3^3).$$

La formule de Boltzmann-Ehrenfest (VIII. 164) nous permet d'évaluer directement ce travail :

$$(VIII. 164) \quad d\mathcal{E} = \bar{E}_{osc.} V \frac{d\tau}{\tau} = -\bar{E}_{osc.} V \frac{d\nu}{\nu}$$

où  $\bar{E}_{osc.}$  est la densité d'énergie oscillatoire qui, multipliée par le volume  $V$ , donne l'énergie totale des vibrations ;  $\tau$ , période et  $\nu$ , fréquence ; la variation  $d\nu$  est provoquée par la dilatation  $d\alpha$ .

Nous avons étudié, aux paragraphes 4, 5, 6 les vibrations propres d'un volume solide  $V$  en forme de parallélépipède rectangle, et nous avons obtenu la relation (XI. 42) :

$$(XI. 42) \quad \frac{1}{\Lambda^2} = \frac{\nu^2}{W^2} = \left( \frac{n_1}{2l_1} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{2l_2} \right)^2 + \left( \frac{n_3}{2l_3} \right)^2.$$

Les  $n_1, n_2, n_3$  sont trois entiers, qui représentent les nombres de nœuds de vibration suivant les trois arêtes. Lorsque nous effectuons les dilatations (XI. 118), les longueurs  $l_1, l_2, l_3$  sont modifiées, ainsi que la vitesse  $W$  des ondes. Prenons la dérivée logarithmique :

$$\frac{1}{2\nu^2} \frac{d(\nu^2)}{d\alpha} = \frac{1}{2W^2} \frac{d(W^2)}{d\alpha} - \frac{\left( \frac{n_1}{2l_1} \right)^2 \frac{dl_1}{l_1 d\alpha} + \left( \frac{n_2}{2l_2} \right)^2 \frac{dl_2}{l_2 d\alpha} + \left( \frac{n_3}{2l_3} \right)^2 \frac{dl_3}{l_3 d\alpha}}{\left( \frac{n_1}{2l_1} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{2l_2} \right)^2 + \left( \frac{n_3}{2l_3} \right)^2}$$

en vertu des relations (XI. 118) la dernière fraction donne 1 :

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{d\alpha} = \frac{1}{W} \frac{dW}{d\alpha} - 1.$$

Portant cette expression dans (XI. 119) et (VIII. 164) nous en tirons :

$$(XI. 120) \quad \mathcal{B}_1^1 + \mathcal{B}_2^2 + \mathcal{B}_3^3 = \bar{E}_{osc} \left( -1 + \frac{1}{W} \frac{dW}{d\alpha} \right) = \bar{E}_{osc} \left( -1 + \frac{3V}{W} \frac{dW}{dV} \right).$$

Tout se réduit à la variation de la vitesse  $W$  en fonction du volume  $V$ , parce que nous avons étudié une dilatation isotrope. Ce résultat est extrêmement général ; nous n'avons eu à faire usage que de la formule (XI. 42), qui sera toujours valable pour un système d'ondes stationnaires en milieu isotrope, quel que soit le milieu et quelles que soient les ondes ; le résultat (XI. 120) est donc applicable aux ondes élastiques ou aux ondes électromagnétiques, en milieu solide isotrope ou liquide ou gazeux.

Nous allons vérifier, pour les ondes élastiques en milieu solide, comment nos calculs antérieurs satisfont à cette relation (XI. 120). Il faut calculer la somme des efforts  $\mathcal{B}$  exercés sur les trois faces du parallélépipède rectangle ; les cosinus  $q_1, q_2, q_3$  des angles d'incidence sont liés par la condition :

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Prenons donc des ondes longitudinales, pour lesquelles  $\mathcal{B}_1^1$  est donné par (XI. 102) ; des formules semblables valent pour  $\mathcal{B}_2^2$  et  $\mathcal{B}_3^3$  ; nous en tirons :

$$(XI. 121) \quad \mathcal{B}_1^1 + \mathcal{B}_2^2 + \mathcal{B}_3^3 = \frac{E'_{osc}}{\lambda + 2\mu} \left[ 3 \left( \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B \right) + \lambda + 3\mu + 16A + 24C \right].$$

De même, pour les *ondes transversales*, nous partirons des formules (xi. 104 et 105); une onde polarisée d'une certaine manière, pour un des miroirs, l'est différemment sur un autre. Pour éviter des complications nous prendrons la moyenne des efforts  $\beta$  pour les deux polarisations, ce qui correspond à la valeur pour un rayonnement « naturel » non polarisé; la moyenne de (xi. 104 et 105) donne :

$$(xi. 122) \quad \overline{\beta}_1 = \frac{\overline{E}_{osc}}{\mu} \left[ \frac{\lambda}{2} + 4A + \frac{\mu}{2} + 3C + q_1^2 \left( \frac{\mu}{2} + 3C \right) \right]$$

formons la somme  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$  en tenant compte de la relation entre les  $q$ .

$$(xi. 123) \quad \overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 + \overline{\beta}_3 = \frac{\overline{E}_{osc}}{\mu} \left[ 3 \left( \frac{\lambda}{2} + 4A + \frac{\mu}{2} + 3C \right) + \frac{\mu}{2} + 3C \right].$$

Nous avons calculé au chapitre X, § 12, p. 243, les coefficients d'élasticité dans un solide soumis à une dilatation isotrope uniforme. Les équations (x. 106) donnaient les résultats, dont nous garderons seulement les termes du premier degré en  $\alpha$ ; nous supposons la pression initiale  $p$  nulle, ce qui ne diminue en rien la généralité des résultats, car si  $p$  n'est pas nul, nous aurons à tenir compte de l'énergie  $H$  des forces extérieures :

$$(xi. 124) \quad \begin{aligned} p' &= -(\lambda + 2\mu)\alpha \\ \lambda' &= \lambda(1 + \alpha) + 16\alpha(2A + 9B) \\ \mu' &= \mu(1 + \alpha) + 24\alpha(A + C) \\ \rho' &= \rho(1 - 3\alpha). \end{aligned}$$

Avec ces données, nous calculons les vitesses de propagation des *ondes longitudinales*, dans le solide dilaté :

$$(xi. 125) \quad W_l'^2 = \frac{\lambda' + 2\mu' - p'}{\rho'} = W_l^2 + \frac{6\alpha}{\rho} \left[ \frac{7}{6}\lambda + \frac{5}{3}\mu + \frac{40}{3}A + 24B + 8C \right]$$

il est indispensable de tenir compte ici explicitement du rôle de la pression  $p'$  dans la vitesse de propagation (éq. xi, 16, p. 255).

Pour les *ondes transversales* :

$$(xi. 126) \quad W_{tr}'^2 = \frac{\mu' - p'}{\rho'} = W_{tr}^2 + \frac{6\alpha}{\rho} \left[ \mu + \frac{\lambda}{2} + 4A + 4C \right].$$

Prenons le cas des *ondes longitudinales*; la parenthèse de la formule (xi. 125) représente :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{V}{W_l} \frac{\partial W_l}{\partial V} \quad \text{car} \quad 3d\alpha = \frac{dV}{V}.$$

La formule (xi. 120) se transcrit donc ainsi :

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{\overline{E}_{osc}}{\lambda + 2\mu} \left[ -(\lambda + 2\mu) + \left( \frac{7}{2}\lambda + 5\mu + 40A + 72B + 24C \right) \right]$$

ce qui correspond exactement à (xi. 121).

De même, pour les *ondes transversales* la parenthèse de (xi. 126) représente  $\mu \frac{V}{W_{tr}} \frac{\partial W_{tr}}{\partial V}$  qu'il suffit d'introduire dans (xi. 120) pour trouver :

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{\overline{E}_{osc}}{\mu} \left[ -\mu + \left( 3\mu + \frac{3\lambda}{2} + 12A + 12C \right) \right]$$

ce qui correspond à (xi. 123).

La formule (xi. 120) se raccorde donc exactement à nos calculs détaillés et donne immédiatement la valeur de l'effort moyen exercé par les ondes sur les trois faces du volume. Nous en tirerons maintenant très directement la valeur moyenne des efforts exercés par des radiations complètement diffusées et non polarisées.

Dans ce cas, nous pourrions avec juste raison parler d'une *pression de radiation* puisque les trois composantes moyennes  $\mathcal{B}_1^1$ ,  $\mathcal{B}_2^2$  et  $\mathcal{B}_3^3$  seront égales, ce qui indique une pression moyenne indépendante de l'orientation de la surface limitant le solide. Les composantes  $\mathcal{B}$  sont des tensions (tractions); si nous voulons parler de pression, nous devons changer de signe, suivant les remarques générales du chapitre X. Nous allons donc chercher la valeur de la pression interne moyenne exercée par les ondes, de l'intérieur vers l'extérieur. Soit  $\overline{E}_l$  la densité d'énergie totale des ondes longitudinales, complètement diffusées; appellons  $\overline{E}_{tr}$  la densité d'énergie totale des ondes transversales, complètement dépolarisées et diffusées; la pression de radiation sera pour les *ondes longitudinales* :

$$(xi. 127) \quad P_l = -\mathcal{B}_1^1 = -\frac{1}{3} (\mathcal{B}_1^1 + \mathcal{B}_2^2 + \mathcal{B}_3^3) = \overline{E}_l \left( \frac{1}{3} - \frac{VdW_l}{Wdv} \right)$$

d'après (xi. 120). Pour les *ondes transversales*, on trouve de même :

$$(xi. 127 \text{ bis}) \quad P_{tr} = \overline{E}_{tr} \left( \frac{1}{3} - \frac{VdW_{tr}}{W_{tr}dv} \right) = \overline{E}_{tr} \left( \frac{1}{3} + \frac{\rho}{W_{tr}} \frac{dW_{tr}}{d\rho} \right).$$

Ce résultat moyen est donc extrêmement simple comme aspect, et rappelle beaucoup les formules que nous avons déjà trouvées, à la fin du chapitre VIII, sur les pressions de radiation dans les fluides.

#### XV. — Ondes élastiques dans un fluide; le liquide considéré comme cas particulier des solides.

L'exemple d'un milieu fluide est, à bien des égards, plus simple que celui du corps solide et mérite qu'on s'y arrête un instant. Une manière d'attaquer le problème consiste à utiliser toutes les formules établies pour un solide isotrope, en annulant les termes de rigidité, pour ne garder que la propriété de compressibilité. Nous écrirons donc que la densité d'énergie potentielle ne dépend que du volume spécifique  $v$  et nous développerons cette expression de la manière suivante :

$$(xi. 128) \quad \mathcal{E} + H = F(v) = \mathcal{E}_0 + H_0 + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\partial v}{v} \right)^2 + K \left( \frac{\partial v}{v} \right)^3 \dots$$

La formule (x. 59) nous permet d'exprimer avec toute la précision désirable, l'expression  $\frac{\partial v}{v}$  en fonction des invariants I :

$$(x. 59) \quad \frac{\partial v}{v} = \frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{4} + \frac{I_1^2}{8} + \dots$$

D'où, en gardant les termes jusqu'au troisième degré :

$$\begin{aligned}
 \text{(xi. 129)} \quad \mathcal{E} + H &= \mathcal{E}_0 + H_0 + \frac{\lambda}{8} I_1^2 + \frac{\lambda}{8} I_1 \left( -I_2 + \frac{I_1^2}{2} \right) + \frac{K}{8} I_1^3 \dots \\
 &= \mathcal{E}_0 + H_0 + \frac{\lambda}{8} I_1^2 - \frac{\lambda}{8} I_1 I_2 + B I_1^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$B = \frac{\lambda}{16} + \frac{K}{8}.$$

Comparons ce résultat avec la forme générale (xi. 76), nous voyons que le *liquide* est caractérisé par les valeurs suivantes de ses coefficients d'élasticité :

$$\text{(xi. 130)} \quad \mu = 0 \quad C = 0 \quad A = -\frac{\lambda}{8} \quad \lambda \text{ et } B \text{ arbitraires.}$$

Il sera souvent commode de considérer les liquides comme des exemples particuliers de la théorie des solides, en tenant compte des relations (xi. 130).

Les liquides n'ont aucune rigidité ; sous pression nulle, ils ne peuvent propager d'ondes transversales, car :

$$W_{tr}^2 = \frac{\mu}{\rho} = 0$$

la vitesse des ondes transversales est nulle ; si on dilate ou contracte le liquide par l'action d'une pression extérieure  $p'$ , la vitesse  $W'_{tr}$  des ondes transversales reste nulle, comme on le voit sur la formule (xi. 126) en tenant compte de (xi. 130).

Les ondes longitudinales se propagent avec la vitesse  $W_l$ , et exercent sur une paroi réfléchissante une pression de radiation :

$$\text{(xi. 131)} \quad -\mathcal{B}_1 = p_l = \frac{\bar{\mathcal{E}}_l}{\lambda} \left[ 1 + \frac{\lambda}{2} - 24B + \lambda \cos^2 \theta \right] = \bar{\mathcal{E}}_l \left( \cos^2 \theta + \frac{1}{2} - 24 \frac{B}{\lambda} \right)$$

formule que l'on déduit directement de (xi. 102) en tenant compte de (xi. 130). D'autre part la formule (xi. 125) donne :

$$\text{(xi. 132)} \quad \frac{1}{6W^2} \frac{dW^2}{d\alpha} = \frac{V}{2W_l^2} \frac{dW_l^2}{dV} = \frac{V dW_l}{W_l dV} = \frac{1}{\lambda} \left[ -\frac{1}{2} \lambda + 24B \right]$$

de sorte que la pression de radiation (xi. 131) prend la forme simple :

$$\text{(xi. 133)} \quad p_l = \bar{\mathcal{E}}_l \left( \cos^2 \theta - \frac{V dW_l}{W_l dV} \right).$$

Expression dont la moyenne, pour toutes les incidences, redonne (xi. 127), car :

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{3}.$$

Nous venons d'obtenir la formule (xi. 132) par une voie assez détournée, mais nous voulons reprendre ce calcul directement, en appliquant la formule générale de Boltzmann-Ehrenfest. Nous prouverons ainsi la généralité de la formule (xi. 132) qui s'applique aux ondes électromagnétiques

aussi bien qu'aux ondes élastiques en milieu fluide. Comme au paragraphe 13, nous partons de la formule de Boltzmann :

$$(viii. 164) \quad d\mathcal{E} = -EV \frac{d\nu}{\nu}$$

et de la relation définissant un système d'ondes stationnaires :

$$(xi. 42) \quad \frac{\nu^2}{W^2} = \left(\frac{n_1}{2l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{2l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{2l_3}\right)^2.$$

Imposons une dilatation  $dl_1$  de l'arête  $l_1$ , sans modifier  $l_2, l_3$  :

$$(xi. 134) \quad \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dl_1} = \frac{1}{2\nu^2} \frac{d(\nu^2)}{dl_1} = \frac{1}{2W^2} \frac{d(W^2)}{dl_1} - \frac{\left(\frac{n_1}{2l_1}\right)^2 \frac{1}{l_1}}{\left(\frac{n_1}{2l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{2l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{2l_3}\right)^2}.$$

D'autre part, nous avons remarqué, en (xi. 41), la relation :

$$\cos^2 \theta_1 = \Lambda^2 \left(\frac{n_1}{2l_1}\right)^2 = \frac{\left(\frac{n_1}{2l_1}\right)^2}{\left(\frac{n_1}{2l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{2l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{2l_3}\right)^2}$$

de sorte que (xi. 134) s'écrit :

$$(xi. 135) \quad \frac{l_1}{\nu} \frac{d\nu}{dl_1} = \frac{l_1}{W} \frac{dW}{dl_1} - \cos^2 \theta_1.$$

Il nous suffit alors de tenir compte de :

$$(xi. 136) \quad d\mathcal{E} = \rho l_2 l_3 dl_1 = \rho V \frac{dl_1}{l_1}$$

formule qui exprime le travail fourni par le système, au moyen de la pression  $\rho$  des ondes ; en comparant (viii. 164), (xi. 135) et (xi. 136), nous obtenons :

$$\rho = \bar{E} \left( \cos^2 \theta - \frac{l_1}{W} \frac{dW}{dl_1} \right).$$

Pour un liquide, il est évident que  $\frac{dl_1}{l_1}$  est égal à  $\frac{dV}{V}$ , dans la dilatation unilatérale que nous avons produite ; le milieu liquide reste toujours isotrope dans cette dilatation, et nous sommes ainsi ramenés à la formule (xi. 132). Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature des ondes, de sorte que le résultat s'applique aux ondes électromagnétiques aussi bien qu'aux ondes élastiques ; nous avons déjà fait une remarque analogue à propos de la formule (xi. 120).

Nous avons décrit, au paragraphe 11, un troisième raisonnement qui permet de retrouver les tensions de radiation dans une onde libre, en partant du tenseur (xi. 107). Nous allons reprendre ce calcul pour le cas du fluide, car il est instructif à suivre dans le détail. Prenons une onde sinusoïdale se propageant dans la direction  $Ox_1$  ; le point matériel situé initialement en  $x_i$  se trouve déplacé, à un instant donné, et occupe la position  $x_i + u_i$  :

$$(xi. 137) \quad u_1 = D \cos \omega \left( t - \frac{x_1}{W} \right) \quad u_2 = u_3 = 0.$$



A cet endroit, le volume spécifique est modifié, sa valeur devient :

$$v + \delta v = v \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad \frac{\delta v}{v} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

Nous allons évaluer la pression locale, au point  $x_1 + u_1$  ; ce sera donc la pression qu'observerait un appareil très léger, entraîné par la particule liquide dans son mouvement ; une bulle d'air, entraînée par le liquide constituerait un manomètre de ce genre ; les variations de son volume décèleraient les variations de pression locale. Nous avons appelé  $F(v)$  la densité d'énergie potentielle (xi. 128), et nous en tirons la pression :

$$(xi. 138) \quad p = - \frac{\partial F}{\partial v} = - \lambda \frac{\delta v}{v} - 3K \left( \frac{\delta v}{v} \right)^2$$

dont la valeur moyenne est :

$$\bar{p} = - 3K \overline{\left( \frac{\delta v}{v} \right)^2} = - 3K \overline{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2}.$$

D'autre part, la densité d'énergie potentielle moyenne  $\bar{F}$  est égale à la moitié de la densité d'énergie oscillatoire totale dans l'onde E :

$$\bar{F} = \frac{1}{2} E = \frac{\lambda}{2} \overline{\left( \frac{\partial v}{v} \right)^2} = \frac{\lambda}{2} \overline{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Comparons ces deux formules ; nous en tirons :

$$(xi. 139) \quad \bar{p} = - \frac{3K}{\lambda} \bar{E} = \bar{E} \left( -\frac{3}{2} - 24 \frac{B}{\lambda} \right) = \bar{E} \left( 1 - \frac{v}{W} \frac{dW}{dV} \right)$$

en tenant compte de (xi. 129) et (xi. 132).

Si l'on ne dispose pas d'un manomètre extrêmement léger, la pression moyenne (xi. 138) est absolument impossible à observer ; nous ne pourrions placer que des appareils immobiles et mesurer la pression moyenne en un point fixe. Nous discuterons un peu plus loin le détail de la technique d'observation ; pour le moment, calculons la pression moyenne en un point  $x_1$  fixe, et non plus au point  $x_1 + u_1$  mobile :

$$(xi. 140) \quad p(x_1) = p(x_1 + u_1) - u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

reportons-nous à (xi. 138) :

$$p(x_1 + u_1) = - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 3K \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2$$

donc :

$$p(x_1) = - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 3K \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \lambda u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 6K u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \dots$$

Le dernier terme, du 3<sup>e</sup> degré, ne nous intéresse pas ; prenons la moyenne, au point fixe  $x_1$  :

$$\overline{p(x_1)} = - 3K \overline{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2} + \lambda \overline{\left( u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)} = \overline{p(x_1 + u_1)} - \lambda \frac{\omega^2}{W^2} \frac{D^2}{2}.$$

La moyenne  $p(x_1 + u_1)$  est celle de la formule (xi. 139), et le dernier terme

en  $\lambda$  donne l'énergie vibratoire  $\bar{E}$ ; nous trouvons donc, pour la *moyenne en un point fixe* :

$$(xi. 141) \quad \overline{p(x_1)} = \overline{p(x_1 + u_1)} - \bar{E} = -\bar{E} \frac{v}{w} \frac{dW}{dv}.$$

Ceci fait, nous formerons aisément le tenseur (xi. 107) des tensions et flux de quantité de mouvement :

$$(xi. 142) \quad \begin{pmatrix} -p - \rho v_1^2 & -\rho v_1 v_2 & -\rho v_1 v_3 \\ -\rho v_1 v_2 & -p - \rho v_2^2 & -\rho v_2 v_3 \\ -\rho v_1 v_3 & -\rho v_2 v_3 & -p - \rho v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{p(x_1)} - \bar{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{p(x_1)} & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{p(x_1)} \end{pmatrix}$$

en effet, la composante  $v_1$  de la vitesse est seule différente de zéro, et  $\rho \overline{v_1^2}$  représente le double de l'énergie cinétique moyenne, donc l'énergie totale  $\bar{E}$  <sup>(1)</sup>. Explicitons ce résultat; le tenseur des *tensions de radiation* sera :

$$(xi. 143) \quad \begin{vmatrix} -\bar{E} \left( 1 - \frac{v}{w} \frac{dW}{dV} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E} \frac{v}{w} \frac{dW}{dV} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{E} \frac{v}{w} \frac{dW}{dV} \end{vmatrix}$$

Examinons maintenant les conséquences de ce résultat, et les dispositifs permettant d'observer les diverses composantes de ce tenseur.

#### XVI. — Les conditions de mesure des pressions de radiation; pression sur une palette immergée.

Je n'insisterai pas sur le fait que la formule (xi. 143) du tenseur redonne exactement les valeurs des pressions sur les miroirs inclinés (xi. 133); nous avons fait cette vérification tout au long, dans le cas général du corps solide (Chap. XI, § 12); il n'est pas utile d'y revenir; le tenseur (xi. 143) correspond en effet exactement au tenseur général (xi. 108) relatif aux ondes longitudinales dans un solide, lorsqu'on tient compte des conditions (xi. 130 et 132) définissant un liquide.

<sup>(1)</sup> Nous avons indiqué (p. 291) une coïncidence curieuse, grâce à laquelle les valeurs moyennes des efforts  $\mathcal{B}$  de Boussinesq et des tensions  $\theta'$  sont les mêmes. Ce résultat tient à une compensation exacte entre deux corrections distinctes :

1° passage des observateurs entraînés aux observateurs fixes;

2° rôle des flux de quantité de mouvement  $\rho v_i v_k$ .

Nous voyons ici la première correction en (xi. 140 et 141); sa valeur est  $+E$ ; la seconde correction est  $\rho v_1^2$  dans le tableau (xi. 142) et vaut  $-E$ ; comme résultat :

$$\begin{array}{ccc} \text{axes fixes} & \overline{p(x_1)} - \rho v_1^2 = \overline{p(x_1 + u_1)} & \text{axes entraînés} \\ & \theta'_{11} = \overline{\mathcal{B}_{11}}. & \end{array}$$

C'est bien un exemple de la coïncidence générale, signalée plus haut. Pour les composantes 22 et 33, la correction se fait un peu autrement, car la valeur (xi. 139) correspond à une surface unité après déformation et  $\mathcal{B}$  se calcule pour une surface initialement unité; finalement, le tableau complet des  $\mathcal{B}$  est identique à (xi. 143).

Nous avons calculé en (xi. 141) la pression moyenne en un point fixe, et la valeur ainsi obtenue ne se retrouve, sur notre tenseur, que pour les composantes 22 et 33, c'est-à-dire les tensions normales observées sur des surfaces perpendiculaires aux axes 2 et 3. Étudions ce point : pour mesurer une tension ou une pression, il faut introduire dans le liquide une capsule manométrique reliée par un tuyau étroit à un manomètre extérieur (fig. xi. 19). La capsule est une petite boîte plate, mince, dont une paroi est très légère et se déforme sous l'action des pressions appliquées. Si nous ne voulons pas perturber la propagation des ondes, nous glissons cette capsule dans le liquide, en la maintenant parallèle aux filets liquides ; les positions 2 et 3, perpendiculaires aux axes  $Ox_2$  et  $Ox_3$  satisfont bien à cette condition. C'est seulement lorsque la capsule garde cette orientation, parallèle à  $Ox_1$ , que nous pouvons observer la pression moyenne  $\bar{p}(x_1)$  en un point fixe, sans troubler l'onde.

Si nous disposons la capsule en travers de l'onde, perpendiculairement à  $Ox_1$ , nous produisons une perturbation, qui se traduit par l'apparition d'une onde réfléchie, et nous observons la pression de radiation (xi. 133), qui

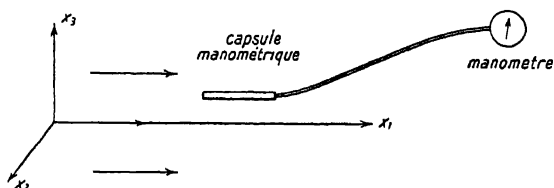


Fig. xi. 19.

peut s'interpréter grâce au rôle spécial joué par la première composante du tenseur (xi. 143).

Revenons un peu sur les conditions expérimentales que supposent nos formules. Nous avons admis que la *densité moyenne* du liquide restait *constante*, lorsqu'on produisait des vibrations ; en effet, nous supposons que les positions moyennes des particules n'étaient pas modifiées ; l'onde (xi. 137) produit seulement des déplacements sinusoïdaux, symétriques autour d'une position moyenne qui coïncide avec la position initiale de la particule au repos.

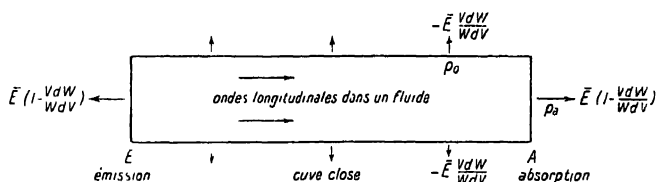


Fig. xi. 20

Si donc, dans un récipient clos contenant un liquide, nous produisons des ondes longitudinales, nous verrons apparaître, sur les parois du récipient clos des efforts supplémentaires, dont les valeurs sont données par les composantes du tenseur (xi. 143). La figure (xi. 20) représente un exemple

typique : une surface plane E émet des ondes, qui sont absorbées par A ; sur les parois latérales du récipient clos, on observe un excès de pression  $-\bar{E} \frac{VdW}{WdV}$ , tandis que sur les faces terminales E et A s'exercent des excès de pression  $\bar{E} \left(1 - \frac{VdW}{WdV}\right)$ .

En fait, ce n'est pas de cette manière que l'on observe en général les pressions de radiation. On procède, ordinairement, suivant le schéma de la figure XI. 21 ; une surface EE' émet un faisceau d'ondes élastiques, par exemple un faisceau sonore, qui tombe sur une surface absorbante AA', immergée dans le fluide ; le cas de la surface absorbante est le plus simple

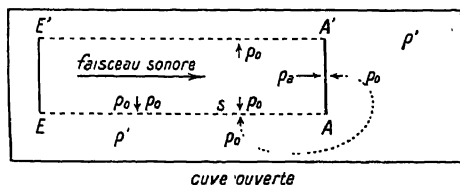


Fig. XI. 21.

à traiter, mais pour une surface réfléchissante les résultats sont analogues. Il faut alors faire attention à ce qui se passe, pour évaluer correctement la pression sur la palette immergée AA'. La densité moyenne du fluide n'est pas la même, dans les régions où le liquide est au repos (densité  $\rho'$ ) ou

dans la zone traversée par l'onde sonore (densité moyenne  $\rho_0$ ). Ce fait est facile à comprendre. Considérons un élément S de la surface qui limite le faisceau sonore ; cet élément S est soumis, de l'intérieur, à une pression (XI. 141) :

$$\overline{p_0(x_1)} = -\bar{E} \frac{VdW}{WdV}.$$

L'équilibre exige qu'une pression égale s'exerce de l'extérieur ; c'est ce qui nous oblige à admettre une différence entre les densités  $\rho_0$  et  $\rho'$  : en deux mots, la pression  $\bar{p}_0$  provoque une compression de tout le liquide au repos à l'extérieur. Cette pression  $p_0$  uniforme se transmet en tous sens, et en particulier derrière la palette AA'.

Nous observerons donc, sur cette palette, la différence entre les pressions :

$$p_a = \bar{E} + p_0 \quad \begin{array}{l} \text{de gauche à droite} \\ \text{de droite à gauche.} \end{array}$$

Il reste donc, sur la palette absorbante immergée, une pression :

$$(XI. 144) \quad p'_a = p_a - p_0 = \bar{E},$$

$\bar{E}$  étant la densité d'énergie de l'onde incidente ; pour une palette réfléchissante immergée, il faut tenir compte des deux ondes incidente et réfléchie ; sous l'incidence normale on observera :

$$(XI. 145) \quad p' = 2\bar{E}$$

et sous l'incidence oblique  $\theta$  on aurait  $2\bar{E} \cos^2 \theta$ . Ce résultat est très important par sa simplicité ; on en fait un usage constant dans les mesures d'intensité des sons ou des ultrasons.

**XVII. — Que peut-on dire sur les coefficients d'élasticité A, B, C de la seconde approximation ?**

En élasticité, la première approximation est constituée par la loi de Hooke : proportionnalité des forces aux déformations. La seconde approximation comporte, pour le cas du solide isotrope, la recherche des trois coefficients A, B, C qui figurent dans les termes du 3<sup>e</sup> ordre de l'énergie potentielle. Toutes les expériences où l'on observera des écarts à la loi de Hooke, réversibles, sans déformations permanentes, pourront nous permettre de déterminer certaines combinaisons des A, B et C. On pourra recourir, par exemple, à des expériences analogues à celles que nous avons discutées : prendre une pièce de métal, la soumettre à des vibrations entretenues, et mesurer les efforts moyens, ou bien les variations moyennes des dimensions du solide si celui-ci n'est soumis à aucun effort extérieur moyen.

Le problème est un peu plus compliqué, pour une tige ou une barre de section limitée, que pour un corps solide de grandes dimensions : la barre, soumise à des vibrations, va s'allonger, et en même temps sa section changera de diamètre. Les vibrations imposées à la tige pourront être des vibrations longitudinales, ou transversales ou des vibrations de rotation ; autant de problèmes à traiter complètement pour interpréter les résultats.

Des mesures statiques ont été faites par Poynting (*Proceedings Royal Soc.*, t. 36, 1912, p. 534) pour les déformations de torsion ; la mesure de l'allongement et du changement de diamètre donnent deux relations entre les coefficients A et C ; elles ne suffisent pas à déterminer le troisième coefficient B ; cela se conçoit aisément, car dans ces expériences de torsion la variation de volume est du 2<sup>e</sup> ordre ;  $I_1$  étant du 2<sup>e</sup> ordre,  $BI_1^2$  est tout à fait négligeable.

Dans un grand nombre d'applications, on n'aura pas besoin des trois coefficients, mais seulement de deux de leurs combinaisons. Reportons-nous aux formules (xi. 124), qui donnent les coefficients d'élasticité  $\lambda, \mu$  d'un solide isotrope dilaté uniformément par une traction isotrope. Nous remarquons que  $\lambda'$  et  $\mu'$  s'expriment au moyen des combinaisons :

$$(xi\ 146) \quad 2A + 9B \quad \text{et} \quad A + C.$$

Les vitesses des ondes longitudinales et transversales (xi. 125 et 126), ne feront, elles aussi, usage que de ces deux combinaisons :

$$(xi\ 147) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{6} \frac{dW_l^2}{d\alpha} = \mu \frac{V dW_l}{W_l dV} = \frac{\lambda}{2} + \mu + 4(A + C) \\ \frac{\rho}{6} \frac{dW_t^2}{d\alpha} = (\lambda + 2\mu) \frac{V dW_t}{W_t dV} = \frac{7}{6} \lambda + \frac{5}{3} \mu + \frac{8}{3} (2A + 9B) + 8(A + C). \end{array} \right.$$

Nous remarquons ensuite que la pression de radiation moyenne d'ondes élastiques complètement diffusées (§ 13, éq. xi. 127) s'exprime encore au moyen de ces mêmes grandeurs.

Dans tous ces problèmes, ce seront donc seulement les expressions (xi. 146) qui joueront un rôle effectif, et deux mesures convenablement combinées devront permettre de les déterminer.

Nous avons indiqué les relations particulières (xi. 130) pour les milieux *fluides* ( $\mu = 0$ ) :

$$(xi. 130) \quad A = -\frac{\lambda}{8} \quad B \text{ arbitraire} \quad C = 0.$$

Dans un *solide*, nous pouvons essayer de voir ce que donnent diverses hypothèses assez générales ; supposons, par exemple, que les *pressions de radiation* des ondes élastiques, sur un miroir réfléchissant, soient *toujours positives*, dirigées de l'intérieur vers l'extérieur ; un solide en vibration tendrait toujours à se dilater. Il nous faut alors admettre que les tractions  $\mathcal{B}$  des formules (xi. 102, 104 et 105), sont toujours négatives, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} + 8A + 24B &\leq 0 & \lambda + 3\mu + 16A + 24C &\leq 0 \\ \frac{\lambda}{2} + 4A &\leq 0 & \mu + 6C &\leq 0. \end{aligned}$$

Ces conditions sont satisfaites si l'on prend :

$$(xi. 148) \quad A \leq -\frac{\lambda}{8} \quad B \leq \frac{\lambda}{48} \quad C \leq -\frac{\mu}{6}.$$

Il est curieux de voir réapparaître ici, sur A et C, des conditions qui sont remplies par les coefficients des liquides (xi. 130). Ces relations ne suffisent pas à assurer une autre propriété, à laquelle on peut songer, à savoir que toute compression devrait augmenter les vitesses de propagation des ondes ; une telle affirmation conduit à supposer que les deux expressions (xi. 147) seraient négatives ; on arrive à ce résultat en posant :

$$(xi. 149) \quad A + C \leq -\frac{\lambda}{8} - \frac{\mu}{4} \quad 2A + 9B \leq -\frac{\lambda}{16} + \frac{\mu}{8}.$$

Dans un cas comme dans l'autre, nous aboutissons à des résultats très voisins, A et C seraient négatifs, B pouvant être positif (et assez petit) ou négatif.

Nous avons indiqué au chapitre X, § 9, les fameuses relations de Cauchy, qui se traduisent par l'égalité d'un certain nombre de coefficients d'élasticité, lorsqu'on étudie des cristaux de structure simple (réseaux de Bravais), ne comportant que des forces centrales entre les atomes constituants. Ces relations de Cauchy se traduisent, dans le cas du solide isotrope par la condition (x. 78 et 81) :

$$\lambda = \mu.$$

Les mêmes relations de Cauchy peuvent être valables à la fois pour le corps non déformé et pour le solide soumis à une pression uniforme, de sorte qu'on devrait écrire aussi :

$$\lambda' = \mu'$$

entre les coefficients donnés par les équations (xi. 124). Cette relation conduirait à poser :

$$\begin{aligned} 2A + 9B &= \frac{3}{2} (A + C) \\ \text{(xi. 150)} \\ \frac{1}{2} A + 9B - \frac{3}{2} C &= 0. \end{aligned}$$

Dans les cas où cette relation sera applicable, par suite de la structure du cristal, elle permettra de réduire la recherche des coefficients à deux seulement ; si l'on veut satisfaire à la fois à (xi. 148) et (xi. 150) il faut prendre :

$$A \leq -\frac{\lambda}{8} \qquad B \leq -\frac{\lambda}{48} \qquad C \leq -\frac{\lambda}{6} \qquad \lambda = \mu$$

ce qui conduit à prévoir pour les trois coefficients des valeurs négatives.

Nous reviendrons plus loin (Ch. xii, p. 337) sur l'évaluation des coefficients A, B, C.

LA THÉORIE DES SOLIDES  
ET LES QUANTA*I. — Introduction ; analyse de l'agitation thermique  
des solides.*

Les théories développées au chapitre précédent trouvent une importante application dans l'étude des propriétés thermiques des corps solides, en raison des conditions très particulières de l'agitation thermique des solides, et du rôle qu'y jouent les quanta. Avant d'exposer ces conceptions plus en détail, nous en indiquerons les grandes lignes et les idées générales.

Les belles recherches de Born et Debye ont montré que la théorie des quanta donnait une interprétation très simple de la chaleur spécifique des corps solides. Pour arriver à ce résultat, il faut se former une image correcte de l'agitation thermique des molécules constituant un solide ; dans un gaz, la théorie cinétique nous a appris à nous représenter les molécules comme pratiquement libres ; elles se meuvent à l'intérieur du récipient contenant le gaz, et subissent de temps à autre des chocs, soit entre elles, soit sur les parois ; ces chocs sont assez rares, pour qu'on puisse au premier abord négliger les énergies d'interaction des molécules et dire qu'à une température donnée, le contenu d'énergie du gaz est presque entièrement représenté par l'énergie cinétique de translation des molécules ; les chocs contre les parois donnent la pression exercée par le gaz.

Dans un corps solide, au contraire, les molécules sont entassées les unes sur les autres ; elles sont en état de choc perpétuel ; et les essais d'extension de la théorie des gaz, au cas des corps solides, se sont de ce fait heurtées à des difficultés insurmontables ; aucune molécule ne peut alors se mouvoir librement. Si nous tentons de déplacer l'une d'entre elles, et de l'écartier de sa position d'équilibre, elle y sera ramenée par les forces dues aux molécules voisines, et oscillera autour de cette position stable ; ces oscillations donneront naissance à des ondes élastiques se propageant à travers tout le corps solide ; et voici que nous découvrons l'élément simple, sur lequel nous pourrions raisonner commodément : ce sera l'onde élastique ; ces ondes se propagent librement, transportant l'énergie vibratoire au travers du solide ; ce sont elles qui constituent le phénomène fondamental ; pour analyser l'agitation thermique du solide, il faudra renoncer à suivre chaque molécule isolément,



## LA THÉORIE DES SOLIDES ET LES QUANTA

mais au contraire décomposer cette agitation en ondes élastiques. demander quelle énergie possèdent, à une certaine température, des ondes de fréquence donnée. Ce problème, la théorie quantique en donne heureusement une solution simple, et c'est ce qui fait le succès de son application aux solides. Il s'introduit d'ailleurs, dans cette étude, une limitation curieuse : des ondes très courtes ne peuvent se propager dans un solide, puisque celui-ci, loin d'être un milieu continu, possède une structure discrète ; on ne peut se représenter une onde dont la demi-longueur d'onde est inférieure à la distance de deux molécules voisines, et ceci interrompt à une certaine longueur d'onde le spectre des vibrations possibles dans le solide ; cette remarque de Born et Debye est essentielle pour la théorie.

Lorsque nous avons ainsi obtenu l'énergie totale du corps, à une température définie, il est aisé de voir de combien s'augmente cette énergie si l'on élève la température, et de calculer ainsi la *chaleur spécifique* du solide.

Comment peut-on essayer de pousser plus loin les applications de ces remarques générales ? Le but à atteindre est l'obtention d'une *équation d'état* des corps solides, équation qui nous donne, en fonction des coefficients d'élasticité mécaniques, tous les renseignements sur l'influence de la température, c'est-à-dire les variations de volume du corps, lorsqu'il est soumis à une pression et à une température définies ; il faudrait aussi obtenir les variations des propriétés élastiques en fonction de la température.

L'idéal serait évidemment de partir des lois d'action entre les molécules voisines, et d'en déduire toutes les propriétés du solide ; c'est ce qu'a tenté Born, mais une telle théorie est vite arrêtée ; nous ne connaissons que très imparfaitement les lois d'interaction entre molécules, et les données expérimentales sont tout à fait insuffisantes pour permettre de les déterminer. En outre, une telle théorie atteint très vite une complication élevée. Cette théorie atomique et moléculaire complète permettrait de prévoir dans le détail toutes les propriétés des solides cristallisés ou amorphes, et M. Born a poussé très loin les calculs et les applications.

Pour une première étude, où l'on désire seulement retrouver certaines propriétés générales des corps solides, et se former une première idée de la question, il semble raisonnable de commencer par économiser les hypothèses arbitraires, et d'essayer ce que l'on pourra déduire de raisonnements analogues à celui de Debye résumé plus haut : renonçant à chercher une interprétation microscopique des propriétés d'un solide, on définira celui-ci par ses propriétés élastiques macroscopiques, et sa longueur d'onde limite ; et l'on cherchera à en tirer toutes les conséquences possibles ; ce sera, en somme, la théorie d'un *solide parfait*, dont nous attendrons les mêmes services que de la fiction du gaz parfait. Les écarts entre la théorie et les faits empiriques devront nous renseigner sur les perfectionnements à introduire.

### II. — *Interprétation de la dilatation thermique des solides.*

Debye avait indiqué, dès 1913, le principe de la dilatation thermique des solides ; son raisonnement était à peu près le suivant : considérons, tout d'abord, une particule P oscillant autour d'un point fixe O, et ramenée vers

ce point fixe par une force proportionnelle à la distance ; les oscillations de la particule P seront sinusoïdales, et centrées sur le point O. Admettons maintenant qu'en plus de la force de rappel ci-dessus, il se produise de petites forces supplémentaires obéissant à une loi différente, par exemple des forces proportionnelles au carré de la distance. Ces forces supplémentaires vont changer un peu la forme des oscillations, mais surtout elles vont provoquer un déplacement moyen du point P ; au lieu d'être centrées sur le point fixe O, les oscillations seront presque symétriques autour d'un point O' situé à une petite distance du point O ; le déplacement moyen OO' sera proportionnel à la valeur moyenne de la force de seconde approximation, c'est-à-dire au carré de l'amplitude des oscillations. Nous observerons donc un déplacement moyen de la particule vibrante (fig. XII. 1).

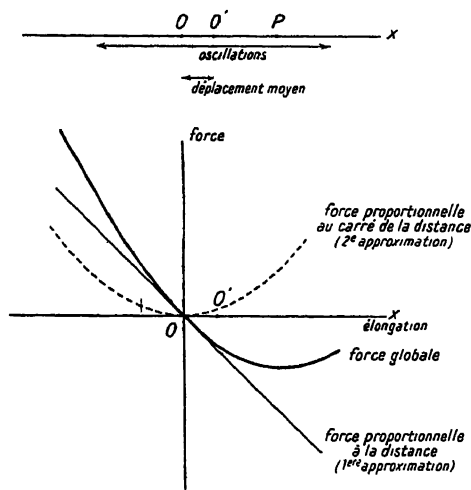


Fig. XII. 1.

Dans les solides, le problème est un peu plus compliqué ; chaque atome (ou molécule) n'oscille pas autour d'un point O fixe dans l'espace, mais autour d'une position d'équilibre définie par les positions des particules voisines. Si notre particule P subit un déplacement moyen OO', la particule voisine sera repoussée un peu plus loin, et ainsi de suite. Nous observerons une augmentation de l'écart moyen entre les particules, c'est-à-dire une dilatation d'ensemble du corps solide.

La dilatation thermique sera donc, par ce mécanisme, rattachée aux termes de 2<sup>e</sup> approximation dans la loi de forces ; le déplacement (et la dilatation) seront proportionnels à l'énergie vibratoire du corps solide ; or cette énergie vibratoire est, à haute température, proportionnelle à la température absolue ; nous prévoyons donc la proportionnalité entre l'allongement et la température ; c'est bien ce qui caractérise la dilatation thermique.

Cette théorie peut être exposée sous une forme, différente en apparence, mais exactement équivalente pour le fond.

Debye rattache la dilatation thermique au fait que les forces élastiques ne sont pas exactement proportionnelles aux déformations ; ce sont les écarts à la loi de Hooke qui jouent le rôle essentiel ; or ces écarts ont une autre conséquence ; ils provoquent l'apparition des pressions de radiation, que nous avons étudiées au chapitre précédent ; nous pouvons donc présenter, sous la forme suivante, notre interprétation de la dilatation thermique : nous décomposons l'agitation thermique du solide en ondes élastiques, qui se propagent librement au travers du corps. Ces ondes, en se réfléchissant sur les parois qui limitent le solide, y exercent une pression de radiation ; cette pression, dirigée de l'intérieur vers l'extérieur, sera d'autant plus forte que

l'agitation thermique (c'est-à-dire l'intensité des ondes élastiques) est plus grande. Si l'on élève la température du solide, on augmente l'intensité des ondes élastiques thermiques et, par cela même, la grandeur de la pression interne. Cette pression provoquera donc une dilatation du solide; c'est l'interprétation de la *dilatation thermique*.

Cette image, pour être appliquée correctement, nécessite un calcul précis et complet des *pressions de radiation*. Les études fondamentales de Lord Rayleigh, Lorentz et bien d'autres, avaient laissé dans l'ombre un grand nombre de difficultés; j'ai repris ces théories dans le détail, et obtenu des résultats sûrs <sup>(1)</sup>; l'exposé du chapitre précédent contient l'essentiel des faits, et nous pourrions nous appuyer sur les conclusions qui y sont présentées.

Cette manière de voir conduit à se représenter un corps solide, à température  $T$ , comme soumis à une pression interne importante, puisque c'est cette pression qui provoque la dilatation thermique. Or, toutes les théories classiques de l'élasticité ont été développées en supposant explicitement que le corps étudié n'était, dans son état naturel, soumis à aucune pression ou force quelconque. L'introduction de la pression de radiation (due à l'agitation thermique) oblige à adopter un point de vue plus général. C'est pour prévoir cette extension de la théorie que nous avons tout de suite supposé, au chapitre X, que le solide pouvait se trouver, dans son état initial, soumis à un système de forces extérieures régies par une fonction potentielle  $H$ .

La connaissance du mécanisme d'agitation thermique des corps solides permet de traiter un grand nombre de problèmes importants; citons la *diffusion de la lumière* par un corps solide transparent. Si les molécules d'un solide sont au repos, le corps se présente comme un cristal parfaitement homogène, absolument régulier, et au travers duquel une onde lumineuse devra se propager sans aucune déformation ni diffusion (je suppose les molécules non absorbantes pour la radiation considérée). Mais il en sera tout autrement si le solide est en état d'agitation thermique. Les vibrations élastiques qui le parcourent provoquent d'incessantes inégalités locales de densité. Chacune de ces irrégularités passagères viendra perturber la propagation de l'onde lumineuse; elle provoquera une diffusion de la lumière, tout comme le ferait une poussière ou une petite impureté locale. Connaissant l'agitation thermique du solide, par les études précédentes, on peut calculer complètement la nature et l'intensité de la lumière diffusée.

On peut aussi prévoir les obstacles rencontrés par le passage d'un courant électrique dans un corps conducteur, et établir une théorie de la conductibilité électrique. Le champ des applications est extrêmement étendu.

Nous nous bornerons, dans ce chapitre, à une discussion sommaire de la théorie des chaleurs spécifiques et de la dilatation thermique des solides.

(1) Dans mes exposés antérieurs, j'avais critiqué à tort la conception initiale de Debye sur la dilatation thermique; je n'avais pu, en effet, raccorder complètement son point de vue et le mien; cela tenait à une discussion incomplète des résultats; nous avons vu, au chapitre précédent, que les pressions de radiation disparaissent complètement si les écarts à la loi de Hooke s'annulent, ce qui assure l'identité de la théorie de Debye avec celle basée sur les pressions de radiation.

### III. — Vibrations d'une corde à structure discontinue; fréquence limite.

Un point essentiel, dans la théorie de Born et Debye, c'est le fait qu'un corps solide, à structure atomique discontinue, présente un nombre limité de vibrations propres, de telle sorte que les longueurs d'ondes admissibles sont comprises entre l'infini et une longueur d'onde minima  $\lambda_m$ , tandis que les fréquences propres s'échelonnent entre zéro et une fréquence maxima  $\gamma_m$ . Nous constaterons ce fait sur un exemple particulièrement simple, celui d'une corde vibrante à structure discontinue. Considérons une file de points matériels  $P_1, P_2, \dots$  identiques et distants les uns des autres d'une longueur  $d$  (fig. XII. 2). Ces points matériels ont tous la même masse  $m$  et agissent les uns sur les autres suivant une certaine loi dépendant de leurs écartements réciproques; nous suivrons un raisonnement très général, qui nous permettra

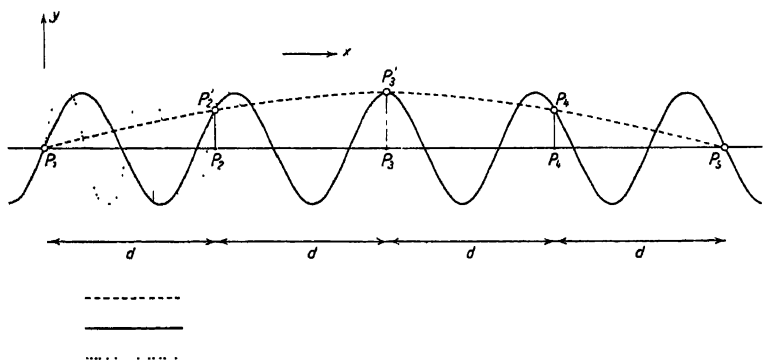


Fig. XII. 2.

d'éviter de préciser la forme particulière de cette loi d'action à distance.

Étudions les vibrations transversales de cette corde discontinue. Une vibration sinusoïdale sera caractérisée par des déplacements :

$$(XII. 1) \quad y = A \sin 2\pi ax \quad |a| = \frac{1}{\lambda}.$$

Nous devons noter immédiatement un point essentiel, c'est que les déplacements  $y$  ne sont observables qu'aux points :

$$(XII. 2) \quad x_n = nd \quad n \text{ entier}$$

où se trouvent des points matériels; lorsque nous écrivons une loi continue (XII. 1), nous interpolons, entre les points réels, d'une manière quelque peu arbitraire; plusieurs lois distinctes, du type (XII. 1) donnent en effet les mêmes déplacements des points matériels et ne diffèrent que par la manière arbitraire dont nous joignons ces points au moyen d'une courbe continue.

Les déplacements (seules quantités observables) des points (XII. 2) sont :

$$(XII. 3) \quad y_n = A \sin 2\pi and.$$

Au lieu de  $a$ , prenons une autre valeur :

$$(xii. 4) \quad a_1 = a + \frac{m}{d} \quad m \text{ entier.}$$

Nous retrouverons exactement les mêmes déplacements observables :

$$y_n = A \sin 2\pi a_1 n d = A \sin 2\pi [a n d + n m] = A \sin 2\pi a n d.$$

Le paramètre  $a$  n'est donc défini qu'au module  $\frac{1}{d}$  près. La figure xii. 2 montre comment on peut ainsi faire passer toute une série de courbes sinusoïdales par les points  $P'_1 P'_2 P'_3 \dots$  représentant les positions déplacées des atomes.

Toutes les valeurs (xii. 4) du paramètre  $a$  redonnent exactement les mêmes déplacements des atomes, donc le même mouvement et la même fréquence  $\nu$  d'oscillation. Traçons alors la courbe qui représente la fréquence  $\nu$  comme fonc-

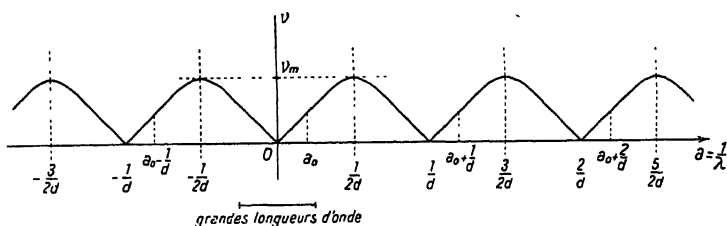


Fig. xii. 3.

tion du « nombre d'ondes »  $a$  (fig. xii. 3). D'après les remarques précédentes, cette courbe doit être périodique en  $a$ , avec la période  $\frac{1}{d}$ . Pour préciser la forme de cette courbe, nous pourrions procéder de la manière suivante : considérons un mouvement à très grande longueur d'onde  $\lambda_0$ , donc caractérisé par un nombre d'onde  $a_0$  très petit. La longueur d'onde  $\lambda_0$  comprendra un très grand nombre d'atomes, et la structure discontinue de la corde ne jouera pas un rôle important. La corde oscillera presque comme une corde continue et présentera une vitesse de propagation  $W$  presque constante, de sorte qu'on pourra écrire :

$$\lambda_0 = W\tau = \frac{W}{\nu} \quad \begin{array}{l} \tau, \text{ période} \\ \nu, \text{ fréquence.} \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$(xii. 5) \quad \nu = W |a_0| \quad |a_0| = \frac{1}{\lambda_0}$$

Dans cette région des grandes longueurs d'onde, au voisinage de l'origine  $O$ , la relation entre  $\nu$  et  $a_0$  est représentée par deux demi-droites, de pentes  $\pm W$ , comme l'indique la figure xii. 3 ; en vertu de la périodicité, le même aspect doit se retrouver au voisinage des points :

$$a = \pm \frac{1}{d} \quad a = \pm \frac{2}{d} \quad a = \pm \frac{3}{d} \quad \text{etc.}$$

D'autre part, ces branches de courbe doivent se raccorder d'une manière continue pour les valeurs intermédiaires :

$$a = \pm \frac{1}{2d} \qquad a = \pm \frac{2}{2d} \qquad a = \pm \frac{3}{2d} \text{ etc.}$$

Le tracé de la courbe doit donc être celui de la figure.

On vérifie bien ce résultat, lorsqu'on prend des formes particulières de lois d'action à distance entre les atomes constituants, mais il est important de voir que le fait est tout à fait général ; les vibrations de la corde discontinue ne peuvent dépasser la fréquence  $\nu_m$  définie par les sommets de courbe. Les fréquences inférieures à  $\nu_m$  correspondent à des mouvements vibratoires capables de se propager sur la corde, tandis que des fréquences supérieures à  $\nu_m$  ne peuvent se propager. Si l'on impose à une extrémité de la corde un mouvement de fréquence  $\nu > \nu_m$ , ce mouvement se transmet seulement aux atomes les plus voisins de l'extrémité, les amplitudes décroissant exponentiellement en fonction de la distance, et devenant négligeables pour les atomes éloignés.

Il n'est pas commode, ni utile, de garder le choix complet des valeurs du paramètre  $a$ , avec les complications qu'il entraîne. Il vaut mieux limiter les valeurs de  $a$ , de manière à ne garder qu'une seule branche de la courbe ; c'est ce que l'on obtient en adoptant la règle :

(XII. 6)

$$-\frac{1}{2d} \leq a \leq \frac{1}{2d} \\ \lambda \geq 2d.$$

Cette définition est la plus avantageuse, puisqu'elle nous redonne les conventions usuelles, dans le cas limite des basses fréquences (grandes longueurs d'onde), qui correspondent aux vibrations acoustiques. La courbe est alors interrompue comme l'indique la figure XII. 4, et l'on pourra parler de la fréquence maxima  $\nu_m$  et de la longueur d'onde minima  $\lambda_m$  égale à  $2d$ .

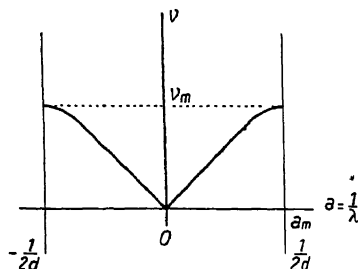


Fig. XII. 4.

Notons enfin que le raisonnement, présenté pour le cas d'une vibration transversale de la corde, s'applique exactement dans les mêmes termes pour une vibration longitudinale ; les  $\eta$  représen-

teraient alors des déplacements le long de la direction  $x$  ; les relations (XII. 6) seraient les mêmes ; les longueurs d'onde limites sont toujours égales à  $2d$ , pour ondes longitudinales ou transversales, mais les fréquences limites sont différentes.

**IV. — Diverses extensions possibles.  
Exemple de vibrations d'une file d'atomes.**

Le raisonnement général donné au paragraphe précédent est très important, en ce qu'il s'adapte aisément à de très nombreux problèmes du même genre ; nous ne voulons pas discuter en détail ces extensions ; nous indiquerons seulement qu'on passe facilement au cas où chaque section de longueur  $d$  contient plusieurs particules distinctes ; on obtient alors plusieurs branches de courbes différentes, sur le schéma de la figure XII. 5. Le nombre des branches de courbes est égal au nombre de particules dans la « maille » de longueur  $d$  ; on peut même passer au cas d'une structure continue périodique, de période  $d$  ; cet exemple se présente comme cas limite du précédent, pour un nombre infini de particules constitutives, et fournit par conséquent un nombre infini de branches successives, dans le schéma (XII. 5).

Nous avons discuté le cas d'une structure discontinue à une seule dimension, mais on peut passer sans peine aux réseaux à deux et trois dimensions, et le raisonnement s'étend facilement à ces problèmes ; nous indiquerons rapidement quelques résultats à ce sujet, lorsque nous parlerons, un peu plus loin, des études de M. Born sur les vibrations des réseaux cristallins.

Pour le moment, nous prendrons un exemple particulier très simple, afin de montrer comment se calcule la forme exacte de la courbe  $\nu$ ,  $a$ , et bien convaincre le lecteur que cette courbe présente l'aspect figuré sur les dessins XII. 3 et 4. Considérons une file d'atomes, à l'équidistance  $d$ , et étudions des vibrations longitudinales ; soit  $y_n$  le déplacement du  $n$  ième atome, dont l'abscisse est :

$$x_n = nd + y_n$$

et admettons entre les atomes une énergie potentielle dépendant de leur distance :

$$(XII. 7) \quad U(r) = U(|x_n - x_{n+l}|) ;$$

telle sera l'énergie d'interaction entre les atomes de numéros  $n$  et  $n + l$ .

La distance  $r$  des deux atomes, quantité positive, est égale à :

$$\begin{aligned} r &= x_n - x_{n+l} & \text{si } l < 0 \\ r &= x_{n+l} - x_n & \text{si } l > 0 \end{aligned}$$

et la force résultante sur l'atome de rang  $n$  s'écrit :

$$(XII. 8) \quad F_n = \sum_{l < 0} \frac{\partial}{\partial r} U(x_n - x_{n+l}) - \sum_{l > 0} \frac{\partial}{\partial r} U(x_{n+l} - x_n) ;$$

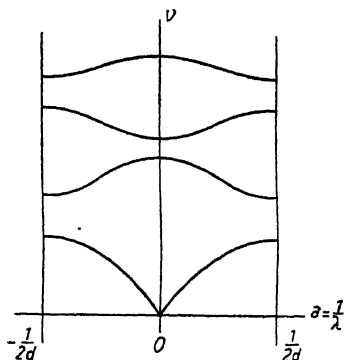


Fig. XII. 5.

cette force est en effet donnée par la dérivée  $\frac{\partial}{\partial x_n}$  de l'énergie potentielle qui se présente comme une somme de termes (xii. 7); lorsqu'on prend cette dérivée on est obligé de distinguer les termes en  $l < 0$  et  $l > 0$ , c'est-à-dire les atomes situés à gauche ou à droite de l'atome étudié, à cause des différences de signe dans la relation entre  $r$  et  $x_n - x_{n+l}$ .

Supposons les déplacements  $y_n$  très petits, nous pourrions développer  $U$  en série de Taylor :

$$U(x_n - x_{n+l}) = U(ld) + (y_n - y_{n+l}) \frac{\partial U}{\partial r} + \dots$$

Dans l'état d'équilibre (tous les déplacements  $y$  étant nuls) les forces d'interaction se compensent, et  $F_n$  est nul; les termes en  $\frac{\partial}{\partial r} U(ld)$  se neutralisent donc, et il reste :

$$(xii. 9) \quad F_n = \sum_{l < 0} (y_n - y_{n+l}) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \sum_{l > 0} (y_{n+l} - y_n) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \sum_l (y_n - y_{n+l}) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

les changements de signe disparaissent de cette formule; il n'y reste que les dérivées  $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$  prises pour les distances  $d, 2d, \dots ld$ ; posons :

$$U_l = \frac{\partial^2 U(ld)}{\partial r^2}$$

et nous obtenons, en regroupant les termes  $\pm l$  :

$$(xii. 10) \quad F_n = \sum_{l > 0} |2y_n - y_{n+l} - y_{n-l}| U_l = m \frac{d^2 y_n}{dt^2}.$$

La force  $F_n$  est en effet équilibrée par le terme d'inertie  $m \frac{d^2 y_n}{dt^2}$ . Admettons maintenant que les déplacements  $y_n$  soient représentés par une formule du type général correspondant à une propagation d'onde :

$$(xii. 11) \quad \begin{aligned} y_n &= A e^{2\pi i(\nu t - ax)} = A e^{2\pi i(\nu t - and)} \\ 2y_n - y_{n+l} - y_{n-l} &= A e^{2\pi i(\nu t - and)} [2 - e^{2\pi i ald} - e^{-2\pi i ald}] \\ &= -4y_n \sin^2 \pi ald. \end{aligned}$$

Nous obtenons, pour la fréquence  $\nu$ , l'équation suivante :

$$(xii. 12) \quad m\pi^2 \nu^2 = \sum_{l > 0} U_l \sin^2 \pi ald.$$

On voit bien apparaître, sur cette formule, l'équivalence des valeurs  $a$  et  $a + \frac{m}{d}$ , comme en (xii. 3 et 4). La courbe représentant  $\nu$  en fonction de  $a$  doit donc être périodique, comme nous l'avions indiqué sur la figure xii. 3.

Les actions à distance diminueront très vite avec l'écartement des atomes, de sorte que les coefficients  $U_l$  seront bientôt négligeables lorsque  $l$  dépassera quelques unités; considérons alors une *longueur d'onde*  $\lambda$  *grande* devant l'équidistance  $d$  :

$$a = \frac{1}{\lambda} \ll \frac{1}{d};$$



dans ces conditions nous pourrions remplacer les sinus par les angles et poser :

$$(xii. 13) \quad v^2 = W_\infty^2 a^2$$

avec une vitesse de propagation  $W_\infty$  définie par :

$$(xii. 14) \quad W_\infty^2 = \frac{d^2}{m} \sum_{l>0} U_l^2.$$

Aux grandes longueurs d'onde, la corde discontinue vibre comme une corde continue, avec la vitesse de propagation  $W_\infty$  constante, indépendante de la fréquence ; lorsque la longueur d'onde devient plus courte, de l'ordre de quelques distances  $d$ , cette règle simple cesse d'être valable ; la formule rigoureuse (xii. 12) donne une fréquence  $v$  plus faible que la règle (xii. 13) ne l'indiquerait ; la *fréquence limite*  $v_m$  est obtenue pour :

$$(xii. 15) \quad ad = \frac{1}{2} \quad \lambda_m = 2d$$

$$v_m^2 = \frac{1}{m\pi^2} \sum_{l>0} U_l. \quad l, \text{ impair.}$$

La formule (xii. 12) fournit bien, pour la relation entre  $v$  et  $a$ , les types de courbes tracés sur les figures (xii. 3 et 4).

Un cas tout à fait typique est celui où les *interactions* ne s'exercent qu'*entre atomes immédiatement voisins* ; il ne reste que le terme en  $U_1$  et les formules (xii. 12. 14 et 15) se réduisent à :

$$(xii. 16) \quad v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{U_1}{m}} |\sin \pi ad| \quad v_m = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{U_1}{m}}$$

$$W_\infty = d \sqrt{\frac{U_1}{m}}$$

La courbe de la figure (xii. 3) est alors formée de branches de sinusoides. Pour une fréquence  $v$  quelconque, nous pouvons définir (assez arbitrairement) une vitesse de phase en posant :

$$(xii. 17) \quad W_\lambda = \frac{v}{a} = W_\infty \frac{|\sin \pi ad|}{\pi ad}.$$

Entre les très grandes longueurs d'onde et la longueur d'onde limite ( $\lambda_m = 2d$ ) la vitesse des ondes décroît de  $W_\infty$  à  $\frac{2}{\pi} W_\infty = 0,635 W_\infty$  (fig. xii. 6).

Tant qu'on prend des fréquences  $v$  inférieures à la fréquence limite  $v_m$ , on obtient pour  $a$  des solutions réelles, et qu'on peut choisir entre les limites  $\pm \frac{1}{2d}$ , comme nous l'avions indiqué sur la figure (xii. 14) à la suite de la discussion du paragraphe précédent. Si l'on impose à la corde des vibrations de fréquence  $v$  supérieure à la limite  $v_m$ , il devient impossible de satisfaire à la relation (xii. 16) en choisissant  $a$  réel ; il faut prendre  $a$  imaginaire, ce qui conduit à prévoir l'impossibilité de la propagation, qui se trouve remplacée par une décroissance exponentielle en fonction de la distance :

$$a = -i\alpha \quad y_n = Ae^{2\pi i(vt - and)} = Ae^{2\pi i(vt - \alpha nd)};$$

c'est bien ce que nous annonçons à la fin du paragraphe précédent.

Toute notre discussion suppose que la courbe  $\nu$ ,  $a$  présente l'aspect représenté sur la figure (xii. 4), comme c'est le cas pour les actions entre voisins immédiats; en fait, il peut se présenter des exemples où la courbe prenne une forme plus compliquée, telle que celle tracée sur la figure (xii. 7); le lecteur verra facilement quelles sont les petites modifications qu'entraînerait un problème de ce genre; la longueur d'onde limite est toujours  $2d$ ; la fréquence

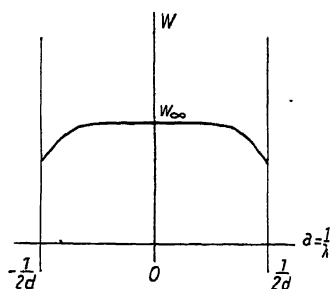


Fig. xii. 6.

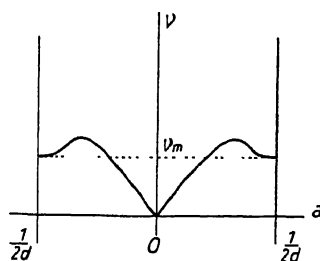


Fig. xii. 7.

limite est encore donnée par la formule (xii. 15) ainsi que la vitesse  $W_\infty$  par (xii. 14) mais il peut y avoir une fréquence maxima qui diffère de la fréquence limite. Cette complication n'offre d'ailleurs pas beaucoup d'intérêt pratique.

On peut étudier, par des méthodes analogues, le cas où chaque maille  $d$  renferme plusieurs particules différentes, et obtenir les courbes de la figure (xii. 5); nous ne ferons pas cette discussion, car nous voulons, dans ce chapitre, donner seulement un aperçu de la théorie moderne des corps solides, sans entrer dans le détail des problèmes fort intéressants que soulève cette théorie.

### V. — *Dénombrement des vibrations propres; passage au réseau à deux dimensions.*

Considérons une corde de longueur finie  $l$ , fixée à ses deux extrémités :

$$x=0 \quad \text{et} \quad x=l=(N+1)d.$$

Elle est constituée de  $N$  atomes équidistants mobiles, entre les atomes extrêmes qui sont fixes. Sur cette corde, nous pourrions trouver toutes les vibrations propres, qui seront données par des mouvements du type (xii. 3) pour lesquels les deux extrémités ( $x=0$  et  $x=l$ ) resteront immobiles; ces vibrations sont donc déterminées par la condition :

$$y_N = 0 \qquad 2\pi a(N+1)d = 2\pi al = \pi k \qquad k, \text{ entier}$$

de sorte que nous retrouvons la condition classique :

$$(xii. 18) \qquad a = \frac{k}{2l} \qquad \lambda = \frac{l}{a} = \frac{2l}{k}.$$

Reprenons le schéma qui nous a déjà servi, avec la courbe représentant  $\nu$  comme fonction de  $a$  (fig. XII. 8). Les valeurs admissibles de  $a$  ne forment plus une suite continue mais une suite discontinue :

$$(XII. 19) \quad a = \frac{k}{2(N+1)d} \quad k \text{ entier.}$$

Nous prendrons  $k$  positif, puisque  $+k$  et  $-k$  représentent en réalité la même vibration stationnaire ; ces deux valeurs  $\pm k$  donnent, en effet, sur (XII. 3) des valeurs des  $y$  égales et de signes contraires, mais il y a un facteur en  $\sin 2\pi\nu t$  à ne pas oublier, et cela redonne exactement le même mouvement.

Entre les limites  $0 < a < \frac{1}{2d}$ , nous trouvons par (XII. 19)  $N$  valeurs possibles du paramètre  $a$ , donc  $N$  vibrations propres. Les valeurs limites 0 et  $\frac{1}{2d}$  sont exclues car elles laissent tous les atomes au repos.

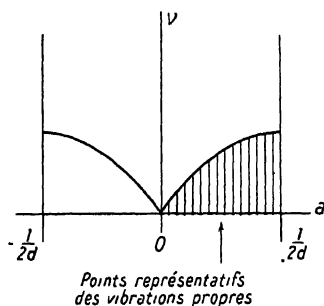


Fig. XII. 8

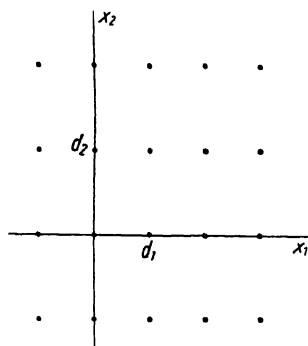


Fig. XII. 9.

Les ondes longitudinales fournissent  $N$  vibrations propres, et les deux vibrations transversales en donnent chacune  $N$ , de sorte qu'il y a bien  $3N$  vibrations propres, pour ce système à  $3N$  degrés de liberté.

Passons maintenant au cas du réseau à deux dimensions : des particules identiques sont juxtaposées, sur un plan, de manière à former un réseau rectangulaire ; les équidistances sont  $d_1$  suivant l'axe  $x_1$  et  $d_2$  pour  $x_2$  ; la « maille » du réseau a une surface  $d_1 d_2$ . Les raisonnements des paragraphes 3 et 4 se transcrivent sans peine, et jouent séparément sur les deux dimensions (fig. XII. 9) :

une onde plane libre se propagera suivant une loi :

$$y = A e^{2\pi i[\nu t - a_1 x_1 - a_2 x_2]}$$

et les ondes stationnaires prendront la forme :

$$(XII. 20) \quad y = A \sin 2\pi\nu t \sin 2\pi a_1 x_1 \sin 2\pi a_2 x_2.$$

Dans les deux cas, nous ne pouvons observer le déplacement  $y$  qu'aux points du réseau, c'est-à-dire pour :

$$(XII. 21) \quad x_1 = n_1 d_1 \quad x_2 = n_2 d_2 \quad n_1, n_2 \text{ entiers ;}$$

il en résulte, comme en (xii. 4), que  $a_1$  et  $a_2$  ne sont définis qu'à un certain module près :

$$\begin{aligned} a_1 & \text{ module } \frac{1}{d_1} \\ a_2 & \text{ module } \frac{1}{d_2} . \end{aligned}$$

Pour lever cette incertitude, nous limiterons le choix des valeurs de  $a_1$  (et  $a_2$ ) comme nous l'avons fait aux paragraphes 3 et 4, en ne gardant que les valeurs :

$$(xii. 22) \quad -\frac{1}{2d_1} \leq a_1 \leq \frac{1}{2d_1} \quad -\frac{1}{2d_2} \leq a_2 \leq \frac{1}{2d_2}$$

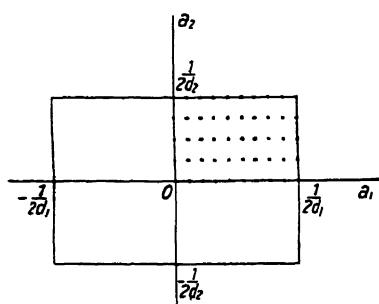


Fig. XII. 10.

ce qui oblige le point représentatif, de coordonnées  $a_1 a_2$ , à rester à l'intérieur d'une zone rectangulaire dont la surface est  $\frac{1}{d_1 d_2}$ . Supposons une membrane de ce genre, de forme rectangulaire, fixée sur son contour :

$$x_1 = 0 \quad x_1 = l_1 = (N_1 + 1)d_1$$

et

$$x_2 = 0 \quad x_2 = l_2 = (N_2 + 1)d_2.$$

Cette surface rectangulaire contient  $N = N_1 N_2$  points mobiles et possède  $3N$  degrés de liberté.

Pour chacune des deux dimensions, le raisonnement de (xii. 18 et 19) se répète et nous aurons une collection de points représentatifs :

$$(xii. 23) \quad a_1 = \frac{k_1}{2(N_1 + 1)d_1} = \frac{k_1}{2l_1} \quad a_2 = \frac{k_2}{2(N_2 + 1)d_2} = \frac{k_2}{2l_2} \quad k_1 k_2 \text{ entiers.}$$

Ces points forment, sur le plan  $a_1, a_2$ , un réseau régulier, représenté sur la figure (xii. 10) ; ils remplissent le premier quadrant ( $a_1 > 0, a_2 > 0$ ) avec une densité de  $4/l_1 l_2$  points par unité de surface, ce qui donne un nombre total de points <sup>(1)</sup> :

$$(xii. 24) \quad N = 4l_1 l_2 \frac{1}{4d_1 d_2} = \frac{l_1 l_2}{d_1 d_2} = N_1 N_2$$

égal au nombre d'atomes de la membrane. Pour chaque type de vibrations (longitudinales ou transversales) nous trouvons donc  $N$  modes distincts de vibration ; au total, cela donne un nombre de modes vibratoires égal au nombre  $3N$  des degrés de liberté.

<sup>(1)</sup> Comme précédemment, les points représentatifs  $a_1 = 0$  ou  $a_1 = \frac{1}{2d_1}$  et  $a_2 = 0$  ou  $a_2 = \frac{1}{2d_2}$  sont à exclure, car ils donnent  $y = 0$  dans les expressions (xii. 20 et 21) et ne correspondent à aucun déplacement.

# VI. — Réseau cristallin à trois dimensions ; ses vibrations propres.

Passons au réseau à trois dimensions (fig. XII. 11), dont la maille rectangulaire aurait les longueurs  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  suivant les trois axes ; le volume de la maille est :

$$(XII. 25) \quad v = d_1 d_2 d_3$$

et représente le volume occupé par un atome du réseau. Une onde sera caractérisée par trois paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , qui ne seront définis qu'avec les

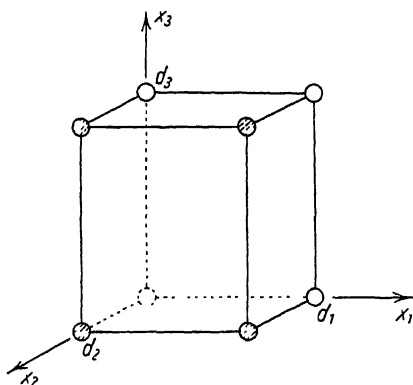


Fig. XII. 11.

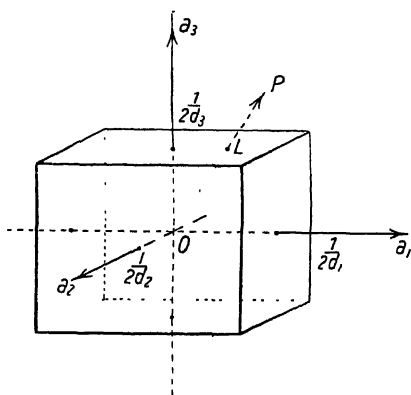


Fig. XII. 12.

modules  $\frac{1}{d_1}$ ,  $\frac{1}{d_2}$  et  $\frac{1}{d_3}$ . Nous délimiterons <sup>(1)</sup> alors une « première zone », dans l'espace  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et ce sera un parallélépipède rectangle, centré sur l'origine définie par :

$$|a_1| \leq \frac{1}{2d_1} \quad |a_2| \leq \frac{1}{2d_2} \quad |a_3| \leq \frac{1}{2d_3}$$

de sorte que son volume intérieur est (fig. XII. 12) :

$$(XII. 26) \quad u = \frac{1}{d_1 d_2 d_3} = \frac{1}{v}.$$

Considérons maintenant un réseau limité, dont les dimensions suivant les arêtes sont  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  ; les vibrations stationnaires, dans ce parallélépipède rectangle, seront définies par :

$$(XII. 27) \quad a_1 = \frac{k_1}{2l_1} \quad a_2 = \frac{k_2}{2l_2} \quad a_3 = \frac{k_3}{2l_3} \quad k_1, k_2, k_3 \text{ entiers positifs.}$$

<sup>(1)</sup> Le terme de « première zone » tient au fait que, dans d'autres problèmes, on est conduit à construire, autour de ce parallélépipède central, toute une série de formes géométriques, emboîtées les unes dans les autres, et constituant les deuxième, troisième... zones.

Ce résultat découle de (xii. 18 et 23) et correspond exactement à ce que nous avons établi au chapitre XI, §§ 4, 5 et 6 (équ. xi. 44 et xi. 62) pour un solide élastique continu. Nous obtenons donc un ensemble de points représentatifs formant, dans l'espace  $a_1, a_2, a_3$ , un réseau régulier, avec  $8l_1l_2l_3$  points par unité de volume; ces points se trouvent uniquement dans le premier octant ( $a_1, a_2$  et  $a_3$  positifs) et à l'intérieur de la « première zone », ce qui fait un volume  $\frac{u}{8}$ ; au total il y a donc un nombre de points égal à :

$$(xii. 28) \quad 8l_1l_2l_3 \cdot \frac{u}{8} = \frac{l_1l_2l_3}{a_1a_2a_3} = N$$

$N$  étant le nombre des atomes du réseau. Nous trouvons, pour chaque point représentatif, trois modes de vibration, donc au total  $3N$  modes de vibration, en nombre égal au nombre des degrés de liberté du système.

Rappelons le résultat des discussions du chapitre XI (§§ 2, 6); lorsqu'on se donne les trois nombres  $a_1, a_2, a_3$  on définit une direction de propagation d'ondes et une longueur d'onde ( $|a| = \lambda^{-1}$ ); pour chaque type de cristal, on trouve alors trois directions de vibration perpendiculaires entre elles correspondant à des ondes capables de se propager sans déformation; pour le cas limite des corps isotropes, ces directions de vibration sont l'une, dans la direction de propagation, et les deux autres à angle droit, ce qui donne une vibration longitudinale et deux vibrations transversales.

Ce qu'il faut souligner, c'est que la délimitation des ondes, vers les courtes longueurs d'onde, se fait toujours de telle sorte que les ondes correspondant à divers modes de vibration présentent *la même longueur d'onde limite*; les *fréquences limites sont donc différentes*; la limitation se fait, pour les trois modes de vibration, sur la même surface limitant la première zone, comme nous l'avons figuré sur le schéma (xii. 12); lorsqu'on prend une direction de propagation  $OP$ , et des longueurs d'onde de plus en plus courtes, le vecteur  $\vec{a}$  s'allonge le long de  $OP$ , et à un certain moment, il perce la surface limite en  $L$ ;  $OL$  représente l'inverse de la longueur d'onde limite, pour la direction  $OP$  et pour les trois modes de vibration. Les trois fréquences limites sont différentes. En conséquence, nous avons toujours  $N$  modes de vibration de chacun des trois types.

Nous avons parlé, dans l'exposé ci-dessus, des vibrations d'un réseau cristallin limité, de volume  $l_1l_2l_3$ , fixé rigidement sur son pourtour; cela correspondait exactement aux conditions discutées, pour un milieu élastique continu, au chapitre XI, § 6. Nous pouvons aussi adopter d'autres conditions aux limites, les *conditions cycliques* de Born (chap. XI, § 2), qui sont beaucoup plus souples pour les applications, car elles admettent comme solution les ondes exponentielles à propagation libre (xi. 19); ces conditions conduisent à choisir ainsi les valeurs  $a_1, a_2, a_3$  :

$$(xii. 29) \quad a_1 = \frac{m_1}{l_1} \quad a_2 = \frac{m_2}{l_2} \quad a_3 = \frac{m_3}{l_3} \quad m_1, m_2, m_3 \text{ entiers}$$

les entiers  $m$  peuvent ici être positifs ou négatifs (cf. xi. 19 et 20) et remplissent donc toute la première zone; le volume qui leur est offert est donc  $u$

(au lieu de  $\frac{n}{8}$ ) mais la densité des points représentatifs est seulement  $l_1 l_2 l_3$ , 8 fois plus faible qu'en (xii. 28) et le nombre total de points est encore :

$$(xii. 29) \quad l_1 l_2 l_3 \cdot u = \frac{l_1 l_2 l_3}{d_1 d_2 d_3} = N.$$

La décomposition en modes de vibration caractéristiques est donc différente, lorsqu'on change la nature des conditions aux limites, mais le nombre des vibrations propres n'est pas changé; les longueurs d'onde limites ne sont pas modifiées.

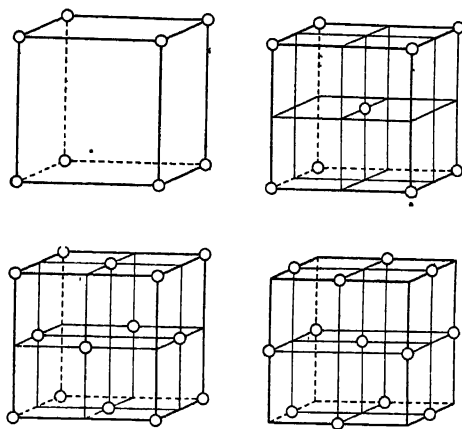


Fig. XII. 13.

Nous ne voulons pas, dans cet exposé sommaire, discuter le cas des réseaux obliques, mais nous indiquerons pourtant quelques résultats généraux. Le mode de discussion se généralise sans grande difficulté, et aboutit aussi à délimiter, dans l'espace  $a_1 a_2 a_3$ , une « première zone » à l'intérieur de laquelle doit rester le point représentatif. Si nous considérons un cristal monoatomique, constitué par des atomes tous identiques entre eux, la première zone présente un volume interne  $u = v^{-1}$ , en appelant  $v$  le volume occupé par un atome dans le réseau cristallin, et l'on retrouve les mêmes faits essentiels : les longueurs d'onde limites sont les mêmes pour les trois modes de vibration, mais les fréquences limites sont différentes; pour chaque mode de vibration on obtient  $N$  vibrations propres distinctes, si  $N$  est le nombre d'atomes du réseau limité. Les figures xii. 14 et 15 montrent, à titre d'exemples, la forme des surfaces

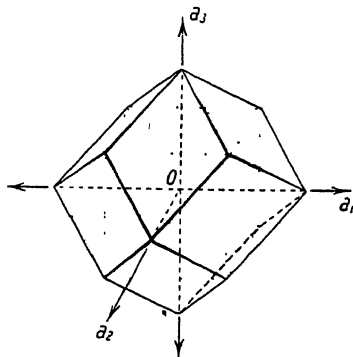


Fig. XII. 14.

limitant la première zone, pour un réseau cubique centré ou cubique à faces centrées.

Ce fut l'œuvre de M. Born, que d'étudier en détail les lois de propagation d'ondes élastiques dans divers types de réseaux et d'en déduire les conséquences pour la théorie des chaleurs spécifiques. Nous connaissons maintenant un raisonnement direct, donnant très rapidement la forme de ces « premières zones » pour tous les types de cristaux, sans qu'on ait besoin de suivre tout le mécanisme des ondes élastiques. Les mêmes raisonnements s'appliquent aux ondes représentant les électrons libres <sup>(1)</sup> dans un métal, et les diverses zones sont alors appelées zones de Brillouin.

### VII. — Hypothèses simplificatrices pour un solide isotrope ; méthode de Debye.

Pour calculer l'énergie totale d'agitation thermique d'un solide, on a besoin de connaître la répartition des fréquences des diverses vibrations propres ; la théorie des quanta conduit, en effet, à attribuer à chaque degré de liberté une énergie qui dépend de sa fréquence. Une étude rigoureuse exigerait donc l'analyse complète des divers modes de vibration du réseau cristallin. Debye a montré qu'on pouvait obtenir une solution approchée du problème, au moyen d'un certain nombre de simplifications que nous voulons présenter maintenant.

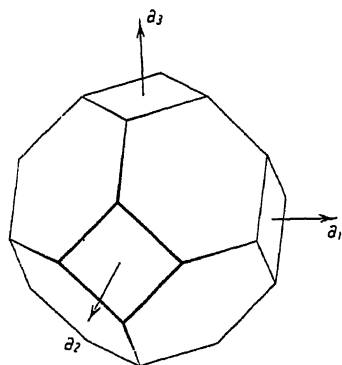


Fig. XII. 15.

Tout d'abord, on *néglige la dispersion*. Nous avons indiqué, sur la figure XII. 6 l'allure de la loi de variation de la vitesse  $W$  de propagation d'ondes, en fonction de  $a$ . Pour toutes les grandes longueurs d'ondes (faibles valeurs de  $a$ ) la vitesse  $W$  des ondes est constante, mais elle diminue assez notablement lorsque  $a$  approche de sa valeur limite. L'approximation de Debye consiste à négliger cette variation et à calculer comme si la vitesse  $W$  restait constante jusqu'à la valeur limite de  $a$ , c'est-à-dire jusqu'à la longueur d'onde minima.

Une seconde hypothèse simplificatrice consiste à ne pas tenir compte des détails de forme de la *surface qui limite la première zone*, et à remplacer cette surface polyédrique par une *sphère*. Pour un milieu isotrope, il semble en effet raisonnable d'admettre une valeur fixe de la longueur d'onde maxima, quelle que soit la direction de propagation des ondes. Cette hypothèse, comme la précédente, est assez arbitraire, mais présente l'avantage de simplifier beaucoup les calculs.

Nous pourrions prendre une *première zone sphérique*, tout en respectant

<sup>(1)</sup> MOTT et JONES. *Theory of the properties of metals and alloys*. Oxford, Clarendon Press, 1936.



l'essentiel des résultats généraux obtenus précédemment. Si  $v$  est le volume occupé par un atome, dans le solide :

$$v = \frac{V}{N} = \frac{\text{volume total}}{\text{nombre total d'atomes}}$$

nous prendrons une première zone sphérique de volume  $u$  (fig. XII. 16) :

$$(XII. 30) \quad u = \frac{1}{n}$$

ce qui nous conduit à choisir un rayon  $r$  :

$$(XII. 34) \quad u = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{n} \quad r = \left( \frac{3}{4\pi n} \right)^{\frac{1}{3}} \\ r = \lambda_m^{-1}$$

Cette hypothèse conserve les faits essentiels que nous avons soulignés au paragraphe précédent, et continue à attribuer  $N$  degrés de liberté aux ondes longitudinales et  $2N$  aux ondes transversales.

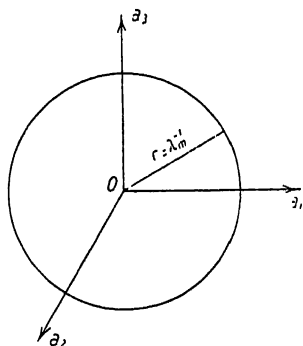


Fig. XII. 16.

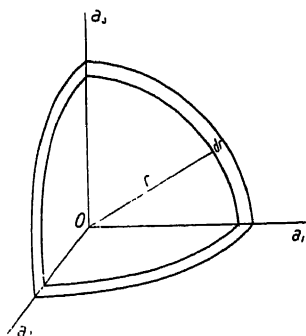


Fig. XII. 17.

En fait, ce n'est pas exactement sous cette forme que Debye a formulé son hypothèse ; il n'a pas tenu compte du partage rigoureux, toujours réalisé entre les divers types d'ondes ; nous avons choisi une seule longueur d'onde limite  $\lambda_m$ , ce qui fournit deux fréquences limites :

$$(XII. 32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Ondes longitudinales} & \nu_{l,m} = W_l \lambda_m^{-1} = W_l \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{Ondes transversales} & \nu_{tr,m} = W_{tr} \lambda_m^{-1} = W_{tr} \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right.$$

en appelant  $W_l$  et  $W_{tr}$  les vitesses des ondes longitudinales et transversales. Debye, au contraire, prend une seule fréquence limite  $\nu_m$ , ce qui le conduit à admettre deux longueurs d'onde limites différentes, pour les ondes longitudinales et transversales. La fréquence  $\nu_m$  de Debye est choisie de manière à respecter le nombre total  $3N$  des degrés de liberté, mais elle ne conserve pas la répartition rigoureuse ( $N$  et  $2N$ ) entre ondes longitudinales et transversales. C'est un défaut assez grave, qu'il convient de souligner.

Pour expliquer le calcul de Debye, reportons-nous aux expressions (xii. 27) qui donnent les valeurs, positives, des coordonnées  $a_1, a_2, a_3$  des points représentatifs de vibrations propres; ces points forment, dans l'espace  $a$ , un réseau régulier, avec une densité moyenne  $\sigma$  :

$$\sigma = 8l_1 l_2 l_3 = 8V \quad V \text{ volume du solide.}$$

Considérons alors une couche sphérique, de rayons compris entre deux limites voisines  $r$  et  $r + dr$ ; le volume de cette couche (fig. xii. 17) est, pour le premier octant des axes :

$$du = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr$$

et la couche contient, en moyenne :

$$(xii. 33) \quad d\mathfrak{N} = \sigma du = V 4\pi r^2 dr$$

points représentatifs de vibrations; cela nous fournit, pour les ondes longitudinales, des fréquences comprises entre  $\nu_l$  et  $\nu_l + d\nu_l$ , avec :

$$\nu_l = W_l r \quad d\nu_l = W_l dr$$

de même, pour les ondes transversales :

$$\nu_{lr} = W_{lr} r \quad d\nu_{lr} = W_{lr} dr.$$

L'hypothèse de la constance des vitesses  $W$  simplifie les relations entre  $d\nu$  et  $dr$ ; le calcul que nous faisons ici est semblable à celui du chapitre XI, § 4 (éq. xi. 45 à 50), mais la vitesse de phase  $W$  est constante, et la vitesse de groupe  $U$  lui est égale.

Donnons nous les fréquences  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ ; entre ces limites, nous trouvons :

$$(xii. 34) \quad dN_l = V \frac{4\pi\nu^2}{W_l^3} d\nu \quad \text{vibrations longitudinales}$$

et :

$$dN_{lr} = 2V \frac{4\pi\nu^2}{W_{lr}^3} d\nu \quad \text{vibrations transversales}$$

en tenant compte des deux polarisations des ondes transversales.

Nous pouvons maintenant voir à quoi conduit l'hypothèse de Debye; nous chercherons une fréquence limite unique  $\nu_D$ , de telle sorte que le nombre total des degrés de liberté soit  $3N$ . Nous poserons donc :

$$3N = \int_0^{\nu_D} (dN_l + dN_{lr}) = 4\pi V \left( \frac{1}{W_l^3} + \frac{2}{W_{lr}^3} \right) \int_0^{\nu_D} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi V}{3} \nu_D^3 \left( \frac{1}{W_l^3} + \frac{2}{W_{lr}^3} \right)$$

ce qui nous donne :

$$(xii. 35) \quad \nu_D = (W_l^{-3} + 2W_{lr}^{-3})^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{9N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}}$$

La valeur  $\nu_D$  de Debye est intermédiaire entre les deux valeurs correctes  $\nu_l$  et  $\nu_{lr}$  de (xii. 32). L'erreur ne sera pas très grande, si les vitesses  $W_l$  et  $W_{lr}$ , des ondes longitudinales et transversales ne diffèrent pas trop; mais si ces vitesses sont franchement différentes, l'évaluation de Debye devient fort inexacte.

VIII. — *Les quanta et l'énergie d'agitation thermique d'un solide* <sup>(1)</sup>.

Si l'on s'en tient à la théorie cinétique classique, il est facile de calculer l'énergie d'agitation thermique d'un solide ; on admet, en effet, dans la thermodynamique statistique classique, que chaque degré de liberté prend, à température  $T$ , une énergie cinétique moyenne  $\frac{1}{2} kT$ , en vertu de la règle d'équipartition de l'énergie cinétique. Les vibrations du corps solide constituent un système de  $3N$  degrés de liberté, et les oscillations sinusoïdales qui leur correspondent sont caractérisées par le fait que l'énergie potentielle moyenne est égale à l'énergie cinétique moyenne :

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\text{pot}} &= \bar{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2} kT \\ E &= \bar{E}_{\text{pot}} + \bar{E}_{\text{cin}} = kT.\end{aligned}$$

L'énergie d'agitation thermique sera donc  $kT$  par degré de liberté, et au total :

$$(xii. 36) \quad U = 3NkT = 3RT$$

$R$ , constante des gaz parfaits.

On obtiendra la chaleur spécifique  $c_v$  à volume constant en prenant la dérivée de  $U$  :

$$(xii. 37) \quad c_v = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R.$$

Cette formule constitue l'expression de la loi de Dulong et Petit. On sait que cette loi fournit une approximation très convenable aux températures moyennes, mais elle cesse tout à fait de s'appliquer aux basses températures. C'est la recherche d'une loi valable à basse température qui a suscité les recherches de Einstein, Born et Debye.

La théorie des quanta conduit à réviser la règle d'équipartition de l'énergie cinétique, et à la remplacer par une formule différente. Tous les degrés de liberté ne sont pas équivalents ; l'énergie qu'ils prennent, à température  $T$ , dépend de leur *fréquence*  $\nu$  ; un oscillateur de fréquence  $\nu$  reçoit une énergie définie par la formule de Planck :

$$(xii. 38) \quad u_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{h\nu}{2}$$

$h$ , constante de Planck ;  $k$ , constante de Boltzmann. Notre étude précédente nous a permis de classer les degrés de liberté du corps solide, suivant leurs fréquences propres ; appliquons les formules (xii. 34) et nous trouvons l'expression suivante pour l'énergie totale d'agitation thermique :

$$(xii. 39) \quad U = \int u_\nu (dN_l + dN_{lr}) = 4 \frac{\pi}{3} V k T \left[ \left( \frac{\nu_l}{W_l} \right)^3 D \left( \frac{h\nu_l}{kT} \right) + 2 \left( \frac{\nu_{lr}}{W_{lr}} \right)^3 D \left( \frac{h\nu_{lr}}{kT} \right) \right]$$

(1) G. БРУХАТ. *Thermodynamique*, chap. XIV, § 188 et chap. XVII, §§ 230-232.

avec :

$$\xi = \frac{h\nu}{kT}$$

et :

$$(xii. 40) \quad D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \left[ \frac{1}{e^{\xi} - 1} + \frac{1}{2} \right] \xi^3 d\xi = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} + \frac{3}{8} x.$$

$D(x)$  est la fonction de Debye ; cette fonction porte sur les variables  $x_l, x_{tr}$  que l'on écrit aussi :

$$(xii. 41) \quad \begin{aligned} x_l &= \frac{h\nu_l}{kT} = \frac{\Theta_l}{T} & \Theta_l &= \frac{h\nu_l}{k} = \frac{hW_l}{k} \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \\ x_{tr} &= \frac{h\nu_{tr}}{kT} = \frac{\Theta_{tr}}{T} & \Theta_{tr} &= \frac{h\nu_{tr}}{k} = \frac{hW_{tr}}{k} \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$\Theta_l$  et  $\Theta_{tr}$  sont deux températures caractéristiques du solide étudié. L'expression (xii. 39) se transforme encore, si l'on tient compte des relations (xii. 32) fixant les fréquences limites :

$$(xii. 42) \quad U = NkT \left[ D\left(\frac{\Theta_l}{T}\right) + 2D\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right) \right].$$

Cette formule, avec ses deux températures critiques distinctes, pour les vibrations longitudinales et transversales, constitue l'approximation la plus correcte. On a pris l'habitude, à la suite de Debye, de lui substituer une formule à un seul terme :

$$(xii. 43) \quad U = 3NkTD \left( \frac{\Theta_D}{T} \right) \quad \Theta_D = \frac{h\nu_D}{k}$$

en définissant la température caractéristique  $\Theta_D$  par la fréquence unique de Debye  $\nu_D$  tirée de (xii. 35). Une telle approximation sera nécessairement plus grossière que celle de la formule à deux termes (xii. 42).

Voyons maintenant ce que donne cette formule à basse et à haute température. A *haute température*, la formule de Planck (xii. 38) se réduit pratiquement à  $kT$  ; le rapport  $\xi$  tend vers zéro et nous pouvons développer :

$$(xii. 44) \quad \begin{aligned} u_\nu &= kT \left[ \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} + \frac{1}{2} \xi \right] = kT \left[ \frac{\xi}{\xi + \frac{\xi^2}{2} + \dots} + \frac{1}{2} \xi \right] \\ &= kT \left[ 1 - \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} + \dots \right] = kT. \end{aligned}$$

Chaque degré de liberté prend l'énergie  $kT$ , comme nous l'avons supposé dans le raisonnement classique (xii. 36), de sorte que l'on retrouve la loi de Dulong et Petit (xii. 37). Nous pourrions parler d'une température élevée, lorsque tous les termes  $h\nu$  seront très petits devant  $kT$ , c'est-à-dire lorsque la température  $T$  sera très supérieure aux températures caractéristiques :

$$T \gg \Theta_l \text{ et } \Theta_{tr}.$$

On peut obtenir une expression plus détaillée en partant de la série :

$$\frac{1}{e^{\xi} - 1} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2} + \sum (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \xi^{2n-1}$$

où les  $B_n$  sont les *nombre de Bernoulli* (Cf. Serret. *Calcul différentiel et intégral*. Gauthier-Villars, 1880, t. 2, p. 213) :

$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	...
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	..

En portant ce développement dans la fonction de Debye (xii. 40) on trouve :

$$(xii. 45) \quad D(x) = 1 + 3 \sum (-1)^{n-1} \frac{B_n x^{2n}}{(2n)! 2n + 3}$$

et l'on en déduit la chaleur spécifique à volume constant par dérivation.

Les *basses températures* seront, au contraire, celles qui se placent très au-dessous des températures caractéristiques :

$$(xii. 46) \quad T \ll \Theta.$$

Que pouvons-nous dire en ce cas ? La fonction de Debye (xii. 40) avait, aux hautes températures, une limite  $x$  très petite, ce qui permettait l'emploi du développement (xii. 44). Aux basses températures, au contraire, la limite supérieure d'intégration  $x$  est très grande ; elle se trouve d'un ordre de grandeur telle que l'exponentielle  $e^{\xi}$  soit énorme, de sorte que le premier terme disparaisse ; nous poserons donc :

$$(xii. 47) \quad D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\xi} - 1} \xi^3 d\xi + \frac{3}{8} x ;$$

nous ne pouvons pas intégrer le second terme jusqu'à l'infini, car sa contribution serait infinie. La première intégrale a une valeur numérique bien définie, et vaut :

$$(xii. 48) \quad J_3 = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\xi} - 1} \xi^3 d\xi = \frac{\pi^4}{15}$$

cette expression se retrouve dans la théorie du corps noir et dans un grand nombre de problèmes de statistiques quantiques. Nous obtenons donc :

$$(xii. 49) \quad D(x) = \frac{\pi^4}{15x^3} + \frac{3}{8} x$$

ce qui nous donne l'énergie  $U$  d'agitation thermique, d'après (xii. 42) :

$$(xii. 50) \quad U = NkT^4 \frac{\pi^4}{5} \left[ \frac{1}{\Theta_l^3} + \frac{2}{\Theta_{lr}^3} \right] + \frac{3}{8} Nk(\Theta_l + 2\Theta_{lr}).$$

On vérifie facilement que la formule usuelle de Debye (xii. 43) conduit pratiquement au même résultat ; le premier terme de (xii. 50) est le même, en vertu de la relation :

$$\frac{1}{\Theta_l^3} + \frac{2}{\Theta_{lr}^3} = \frac{3}{\Theta_n^3}$$

seul le dernier terme constant serait différent, mais il importe assez peu.

La chaleur spécifique à volume constant suivra, à basse température, une loi en  $T^3$  :

$$(xii. 51) \quad c_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{4\pi^4}{5} RT^3 \left[ \frac{1}{\Theta_v^3} + \frac{2}{\Theta_{lr}^3} \right].$$

Pour obtenir une meilleure approximation on a recours au développement suivant :

$$\frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} = \xi^3 e^{-\xi} \left[ 1 + e^{-\xi} + e^{-2\xi} + \dots \right] = \sum_{p=1}^{\infty} \xi^3 e^{-p\xi}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} D &= \frac{3}{8} x + \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} d\xi = \frac{3}{8} x + \frac{3}{x^3} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^x \xi^3 e^{-p\xi} d\xi \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{3}{x^3} \sum_p \left[ \frac{6}{p^4} - x^4 e^{-px} \left[ \frac{1}{px} + \frac{3}{p^2 x^2} + \frac{6}{p^3 x^3} + \frac{6}{p^4 x^4} \right] \right] \end{aligned}$$

on décompose l'intégrale, en prenant la somme de 0 à  $\infty$  (qui fournit  $\frac{6}{p^4}$ ) moins la somme de  $x$  à l'infini, qui s'intègre par parties et donne les quatre termes entre crochets.

Le calcul complet des chaleurs spécifiques, au moyen de ces diverses formules, aboutit, pour une *fonction de Debye unique* avec une seule température critique  $\Theta$ , au tableau suivant :

$\frac{\Theta}{T}$	$\frac{T}{\Theta}$	$\frac{C}{C_{\infty}}$ Debye
0,25	4	0,997
0,333	3	0,9945
0,5	2	0,988
0,667	1,5	0,978
1	1	0,952
1,111	0,9	0,941
1,25	0,8	0,926
1,429	0,7	0,9045
1,667	0,6	0,8725
2	0,5	0,825
2,5	0,4	0,745
3,333	0,3	0,6075
4	0,25	0,503
4,021	0,2488	0,5
5	0,2	0,369
6,667	0,15	0,213
10	0,1	0,0758
13,33	0,075	0,0328
20	0,05	0,00974
40	0,025	0,00122
$\infty$	0	0

Cette formule se vérifie très bien expérimentalement, et la courbe entière de variation de la chaleur spécifique est très convenablement représentée par les formules du type Debye. A vrai dire, cette concordance est surtout due au

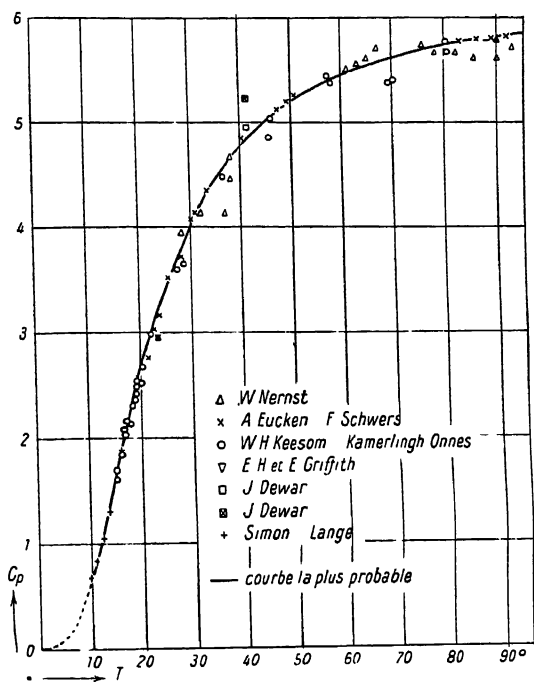


Fig. XII. 18.

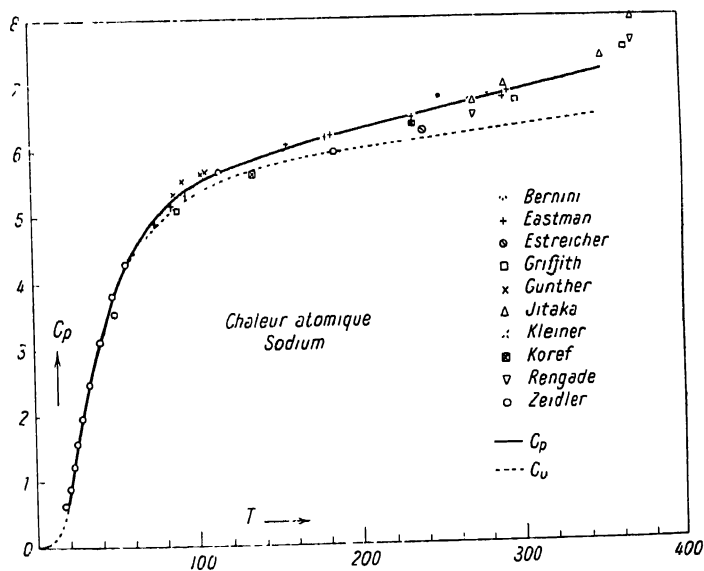


Fig. XII. 19.

fait que la méthode de Debye donne correctement les deux valeurs limites aux hautes et basses températures, et constitue, entre ces extrêmes, une courbe continue raisonnable. A haute température, nous avons vu que la loi de Dulong et Petit se justifiait par un raisonnement direct; et à très basse température, nous avons noté que toutes les théories redonnent la formule (xii. 51) : en effet, à basse température, les vibrations de basses fréquences sont seules en cause, car la formule de Planck (xii. 38) n'attribue plus d'énergie aux hautes fréquences; les basses fréquences sont celles pour lesquelles nous pouvons affirmer l'existence de vitesses de propagation constantes pour les ondes élastiques, ce qui constitue justement une des hypothèses de Debye; la formule (xii. 51) a donc une portée bien plus générale que la formule complète de Debye.

Notons encore que tous ces résultats sont valables pour des solides monoatomiques. Pour les solides constitués de molécules, on devra encore tenir compte des fréquences de rotation et vibration de ces molécules, ce qui conduira à ajouter, à la formule de Debye, un certain nombre de termes de Planck-Einstein (xii. 38), avec des valeurs bien définies de fréquences  $\nu$ , correspondant à ces fréquences propres des molécules.

Les figures (xii. 18 et xii. 19) représentent les chaleurs spécifiques du plomb et du sodium à basse température, d'après Eucken (1).

### IX. — Discussion ; comparaisons avec l'expérience.

Il est intéressant de tracer les spectres des vibrations, pour les différentes hypothèses simplificatrices du type Debye, et de les comparer avec les spectres que donnerait un calcul plus rigoureux. Les formules de base sont (xii. 34). Prenons d'abord l'hypothèse initiale de Debye, avec une seule fréquence limite  $\nu_D$  définie par (xii. 35); dans un intervalle  $d\nu$  on trouvera un nombre de vibrations longitudinales et transversales :

$$dN = nd\nu$$

avec :

$$(xii. 52) \quad n = \frac{dN}{d\nu} = \begin{cases} 4\pi V \nu^2 \left[ \frac{1}{W_l^3} + \frac{2}{W_{tr}^3} \right] & \nu < \nu_D \\ 0 & \nu > \nu_D \end{cases}$$

ce qui donne la courbe pointillée de la figure xii. 20. La formule à deux termes limite  $\nu_{tr}$  et  $\nu_l$  fournit un résultat différent :

$$(xii. 53) \quad n = \begin{cases} 4\pi V \nu^2 \left[ \frac{1}{W_l^3} + \frac{2}{W_{tr}^3} \right] & \nu < \nu_{tr} \\ 4\pi V \nu^2 \frac{1}{W_l^3} & \nu_{tr} < \nu < \nu_l \\ 0 & \nu > \nu_l \end{cases}$$

(1) *Handbuch der exp. Physik*, t. 8, 1, p. 188; la courbe de Debye n'a pas été tracée sur les figures.



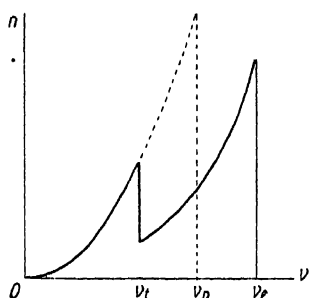
ce qui correspond à la courbe en trait plein de la figure XII 20 ; pour les solides isotropes, la vitesse des ondes longitudinales est supérieure à celle des ondes transversales, de sorte que la limite  $\nu_l$  est plus élevée que  $\nu_{tr}$ .

En fait, les deux courbes de la figure XII. 20 représentent des simplifications assez arbitraires de la courbe donnant le spectre réel. Nous aurons tout d'abord à tenir compte de la dispersion ; la vitesse de propagation  $W$  est une fonction de la fréquence, de sorte que la formule correcte n'est pas du type (XII. 34) mais (XI. 50) ; le facteur  $\frac{1}{W^3}$  est à remplacer par :

$$\frac{1}{U} = \frac{d\left(\frac{\nu}{W}\right)}{d\nu} = \frac{d\alpha}{\alpha\nu} \quad \text{U vitesse de groupe}$$

Au voisinage de la fréquence limite, la vitesse  $W$  est inférieure à la vitesse  $W_\infty$  des ondes de grande longueur d'onde, et la vitesse de groupe  $U$  tend vers zéro ; c'est ce que montre clairement la figure XII. 21 où sont représentées géométriquement ces diverses grandeurs. La loi parabolique en  $\nu^2$  cesse d'être vraie dans cette région.

La correction la plus importante con-



Courbe Debye  
— Courbe à deux limites

Fig. XII. 20.

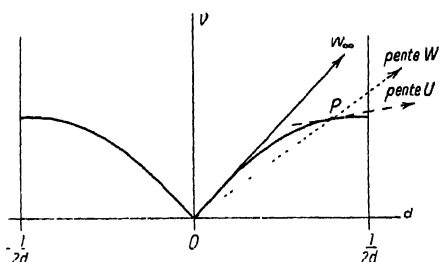


Fig. XII. 21.

siste en ce que, dans un réseau cristallin réel, la surface de la première zone n'est pas sphérique mais polyédrique, comme nous l'avons vu sur les figures XII. 12, 14 et 15. Dans ces conditions, il n'y a pas une fréquence unique ( $\nu_l$  ou  $\nu_{tr}$ ), pour toutes les directions de propagation, mais la fréquence limite dépendra de la direction, et nous obtiendrons un étalement de la limite ; c'est ce que nous avons représenté schématiquement sur la figure XII. 22. On trouvera une discussion plus détaillée dans les travaux de M. Born (1).

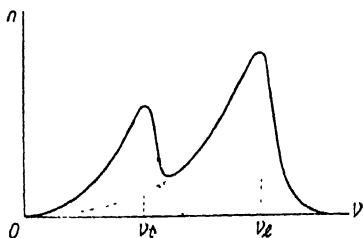


Fig. XII. 22.

(1) M. BORN et GÖPPERT-MAYER. *Handbuch der Physik*, t. 24, 2, p. 623, etc. — Voir aussi M. BLACKMAN *Proc. Roy. Soc. A.* t. 148, 1934, pp. 365 et 384 ; t. 149, 1935, pp. 117 et 126. — R. FEIERLS. *Annales Institut Poincaré*, t. 5, 1935, p. 177.

Pour le calcul des chaleurs spécifiques, ces détails de forme dans la courbe de répartition des fréquences joueraient un certain rôle, mais en fait, elles n'ont pas une grande importance et les formules du type Debye suffisent pour donner une approximation très convenable. Les comparaisons ont été faites sur la formule Debye à un seul terme.

TABLEAU I

SUBSTANCE	$\theta_D$		ÉCART MAXIMUM SUR $C_V$ EN O O	ÉCART MAXIMUM SUR $\theta$ EN O O
	HAUTE TEMPÉRATURE	BASSE TEMPÉRATURE		
Au	180	162	10	5,5
Pb	88	—	4	3,5
Sn	160	127	15	8
Na	159	—	5,5	2
K	99,5	—	5	4
Mo	379	379	1,5	1
Pt	225	—	10	3
Cu	315	321	4,5	1,5
Al	398	385	6	4,5
Ag	215	—	5	4,5
Fe	420	428	6	3,5
Diamant	1 840	2 230	—	—
Zn	235	205	11	6
KCl	217,6	—	8	5,5
NaCl	287	—	8,5	7,5
CaF <sup>2</sup>	474	474	4,5	2
FeS <sup>2</sup>	620	645	12	4
A	85	—	4	

TABLEAU II

*Températures caractéristiques.*

SUBSTANCE	$\theta$ OBSERVE	$\theta_D$ CALCULÉ DEBYE
Pb	88	72
Cd	160	168
Ag	215	212
Pt	225	226
Cu	315-321	299
Al	398-385	390
Fe	420-428	467
KCl	217,6	230
NaCl	287	296
CaF <sup>2</sup>	474	499

Le premier tableau montre avec quelle précision on peut représenter les faits expérimentaux au moyen d'une formule de Debye ; la température caractéristique unique  $\theta_D$ , calculée d'après les mesures faites à haute ou

basse température, ne fournit pas toujours la même valeur. Le tableau II permet la comparaison entre les températures caractéristiques  $\Theta_n$  observées et calculées. L'accord est frappant, si l'on songe à la grossièreté des approximations introduites par Debye, et l'on ne peut manquer d'être convaincu de la valeur du schéma général de la théorie des chaleurs spécifiques.

Nous avons donné la discussion pour le cas d'un corps isotrope, où les vibrations sont toujours exactement longitudinales ou transversales. Dans un cristal, il y a trois directions de vibration qui ne sont pas exactement longitudinales et transversales, comme nous l'avons vu au chapitre XI, § 2. Ces trois vibrations fournissent 3 vitesses de propagation  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$ , qui dépendent encore de la direction de propagation. Lorsqu'on veut appliquer les formules de Debye aux cristaux, on

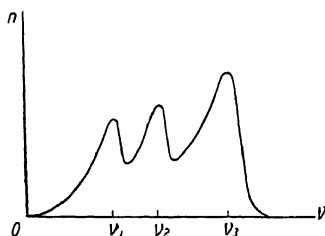


Fig. XII. 23.

est obligé de prendre d'abord les moyennes des termes  $\frac{1}{W^3}$  pour toutes les directions et ensuite on substituera :

$$\left( \frac{1}{W_1^3} \right) + \left( \frac{1}{W_2^3} \right) + \left( \frac{1}{W_3^3} \right) \quad \text{pour} \quad \frac{1}{W_l^3} + \frac{2}{W_{tr}^3}$$

dans la formule (XII. 35). L'approximation sera certainement assez grossière si le cristal est fortement anisotrope.

Pour chacun des types d'onde, le vecteur  $\vec{n}$  est compris à l'intérieur de la première zone; les ondes sont donc limitées aux mêmes longueurs d'onde, mais à des fréquences différentes. La courbe de la figure XII. 22 se trouvera remplacée par une courbe du type XII. 23, avec trois fréquences limites  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_3$ .

### X. — Les pressions de radiation et la dilatation thermique du solide.

Les approximations de Debye reviennent à traiter le corps solide comme un milieu continu, en ajoutant la condition qui fixe la longueur d'onde limite. Pour les raisonnements que nous allons développer maintenant, il est indispensable de prendre une longueur d'onde limite unique (XII. 31), et deux fréquences limites, donc deux températures critiques (XII. 41), de sorte que l'énergie d'agitation thermique  $U$  soit une somme de deux expressions identiques et séparées, se rapportant l'une aux ondes longitudinales et l'autre aux ondes transversales (XII. 42) :

$$U(T) = U_l + 2U_{tr} \quad U_m = RTD \left( \frac{\Theta_m}{T} \right)$$

(XII. 54)

$$\Theta_m = \frac{h}{k} W_m \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad m = l \text{ ou } tr.$$

Nous avons calculé, au chapitre XI, la pression exercée, sur la surface limitant le solide, par des ondes longitudinales ou transversales complètement diffusées; nous aboutissons aux formules (xI. 127) qui peuvent se transcrire ainsi :

$$(xII. 55) \quad p_m = \frac{U_m}{V} \left( \frac{1}{3} - \frac{V}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial V} \right) = - \frac{U_m}{\Theta_m} \frac{\partial \Theta_m}{\partial V} \quad m = l \text{ ou } tr,$$

on voit que la formule générale se simplifie, si l'on y fait apparaître la température caractéristique  $\Theta_l$  ou  $\Theta_{tr}$  correspondant au type d'ondes. Les ondes d'agitation thermique sont complètement diffusées, de sorte que la formule (xII. 55) peut leur être appliquée. Lorsqu'un solide occupe le volume  $V$ , et que ce volume correspond à une dilatation ou compression isotrope homogène, la pression qu'il exerce sur sa surface limite se composera d'un terme  $f(V)$  provenant des efforts élastiques statiques, et des pressions de radiation  $p_l$  et  $p_{tr}$  dues aux ondes d'agitation thermique. La pression totale sera donc :

$$(xII. 56) \quad p = f(V) + p_l + 2p_{tr} = f(V) - \frac{U_l}{\Theta_l} \frac{\partial \Theta_l}{\partial V} - 2 \frac{U_{tr}}{\Theta_{tr}} \frac{\partial \Theta_{tr}}{\partial V}$$

le facteur 2 provenant du facteur analogue introduit par symétrie dans la formule (xII. 54) pour l'énergie  $U$ .

Si le solide est maintenu sous une pression extérieure nulle, la pression résultante  $p$  doit s'annuler; les pressions internes  $p_l$  et  $p_{tr}$  des radiations provoquent une dilatation du corps solide.

Nous avons démontré, au chapitre XI, que les pressions de radiation proviennent essentiellement de l'ensemble des termes du troisième degré, dans le développement de l'énergie potentielle élastique en fonction des dérivées des déplacements (chap. XI, §§ 7 à 17). Ces termes du troisième degré dans l'énergie donnent des groupes de termes du second degré dans l'expression des forces. Les forces ne sont donc pas proportionnelles aux dérivées  $\frac{\partial''}{\partial x}$ ; c'est dire qu'il y a des écarts par rapport à la loi de Hooke. Nous retrouvons exactement le point de vue de Debye, que la dilatation thermique est essentiellement provoquée par les écarts à la loi de Hooke.

Debye avait initialement indiqué un calcul un peu grossier, montrant l'existence de cet effet; Ratnowsky avait aussi trouvé une formule ressemblant à l'expression (xII. 56) mais entachée d'une erreur, provenant de ce que le raisonnement était basé sur l'emploi d'une formule avec une seule température critique  $\Theta_0$ ; pour obtenir l'expression correcte, il faut écrire les deux formules (xII. 55) avec les deux températures  $\Theta_l$  et  $\Theta_{tr}$ .

M. Born donne, dans son exposé du *Handbuch der Physik*, des calculs assez complexes, applicables à des réseaux cristallins tout à fait quelconques <sup>(1)</sup>; il a très bien vu la nécessité de séparer complètement les divers types d'ondes et de distinguer les diverses températures critiques. Le calcul est fait en évaluant les moyennes des forces  $\mathcal{B}$  de Boussinesq, d'une manière analogue à celle que nous avons indiquée au chapitre XI, § 12; rappelons le fait curieux signalé à cet endroit : les composantes  $\mathcal{B}$  de Boussinesq, rappor-

<sup>(1)</sup> *Hdb. der Phys.*, t. 24, 2, p. 689

tées à des éléments de surface en mouvement (entraînées par le solide) ont les mêmes valeurs que les composantes  $\Theta'$  des efforts (et flux de quantité de mouvement) rapportés à des surfaces fictives immobiles. Cette coïncidence assure l'accord des formules de Born avec celles que nous avons établies pour le solide isotrope. Parmi les nombreux travaux consacrés à la théorie de la dilatation thermique, à la suite des premières indications de Debye et Born, il faut signaler un beau mémoire de H. A. Lorentz <sup>(1)</sup>, qui contient pour la première fois l'expression correcte correspondant à notre formule (xii. 56), obtenue par un raisonnement direct fort ingénieusement agencé.

Dans ma thèse <sup>(2)</sup>, j'avais rattaché cette formule aux pressions de radiation des ondes élastiques, mais le raisonnement comportait encore quelques erreurs; les expressions des pressions de radiation pour des ondes complètement diffusées étaient correctes, mais les formules relatives à des ondes isolées étaient erronées. Les calculs présentés au chapitre XI résolvent le problème dans son ensemble.

### XI. — Comparaison avec l'expérience; dilatation thermique.

Il est assez difficile d'évaluer les différents termes de la formule (xii. 56) et d'en tirer la valeur numérique de la dilatation thermique. Les pressions de radiation ne peuvent se calculer que si on connaît tous les termes d'ordre supérieur dans l'énergie potentielle élastique; or, nous avons vu, au chapitre XI, qu'il y a trois coefficients A, B, C à déterminer, et que les données expérimentales actuellement connues ne permettent de trouver que deux de ces coefficients. Lorentz a fait la discussion en admettant, à titre d'hypothèse gratuite, l'égalité des deux dérivées :

$$(xii. 57) \quad \frac{1}{\Theta_l} \frac{\partial \Theta_l}{\partial V} = \frac{1}{\Theta_{lr}} \frac{\partial \Theta_{lr}}{\partial V}$$

ce qui conduit à prévoir une pression de radiation proportionnelle à l'énergie totale :

$$U = U_l + 2U_{lr}$$

d'agitation thermique du solide. Les calculs, ainsi simplifiés arbitrairement, conduisent aux résultats suivants, que je cite d'après Lorentz :

	CALCULÉ	OBSERVÉ
Pb . . .	0,00022	0,00008
Sn . . .	0,00027	0,00006
Acier I . .	0,000032	} 0,000033
Acier II . .	0,000036	
Cu . . .	0,000028	0,000051

Les ordres de grandeur sont très convenables, et c'est tout ce que l'on peut attendre, dans l'incertitude que comportent les nombres calculés. Grüneisen

<sup>(1)</sup> *Proceedings Amsterdam*, 1917, t. 19, 2, p. 1324.

<sup>(2)</sup> *Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 37, 1920, p. 358.

a donné une formule de dilatation basée sur l'emploi d'une seule température caractéristique  $\Theta_D$ , et qui conduit à prévoir une dilatation proportionnelle à l'énergie totale d'agitation thermique. Les hypothèses sous-entendues dans une telle théorie sont aussi arbitraires que l'hypothèse (xii. 57) et la conclusion n'a pas une portée plus générale. Försterling a développé des calculs tout à fait parallèles à ceux que nous avons indiqués.

Inversement, nous pourrions partir des dilatations thermiques, mesurées expérimentalement, et en tirer des renseignements sur les coefficients d'élasticité A, B, C représentant les écarts à la loi de Hooke. *A haute température*, tous les degrés de liberté prennent une énergie  $kT$ , et les pressions de radiation (xii. 55) se simplifient :

$$U_m = RT \quad p_m = - \frac{RT}{\Theta_m} \frac{\partial \Theta_m}{\partial V} \quad m = l, tr, tr.$$

L'agitation thermique se traduit donc par une pression interne :

$$(xii. 58) \quad p_i = \frac{Q}{V} RT \quad Q = - \frac{V}{\Theta_l} \frac{\partial \Theta_l}{\partial V} - 2 \frac{V}{\Theta_{tr}} \frac{\partial \Theta_{tr}}{\partial V}$$

tout se passe comme si nous avions un gaz parfait, de masse moléculaire et volume moléculaire égaux à ceux du solide (gaz très comprimé !) avec une formule de pression interne (xii. 58) comportant un coefficient numérique  $Q$  caractéristique du solide ; les variations de volume restant faibles, on pourra considérer  $Q$  comme constant en pratique.

Lorsque le solide se dilate librement, la pression extérieure  $p$  est nulle ; la pression interne  $p_i$  d'agitation devra être équilibrée par la pression élastique statique  $f(V)$ , dans la formule (xii. 56) ; cette pression statique s'exprime, en première approximation, au moyen de la compressibilité  $\chi_0$  au zéro absolu :

$$f(V) = - \frac{1}{\chi_0} \frac{\Delta V}{V_0} \quad \Delta V = V - V_0$$

et la formule (xii. 56) prend la forme :

$$0 = - \frac{1}{\chi_0} \frac{\Delta V}{V_0} + p.$$

Appelons  $\alpha$  le coefficient linéaire de dilatation thermique ; nous aurons :

$$(xii. 59) \quad \frac{\Delta V}{V} = 3\alpha T \quad 3\alpha = \frac{\chi_0 p_i}{T} = \chi_0 \frac{QR}{V} = \chi_0 QR \frac{\rho}{M}$$

en appelant  $\rho$  la densité ;  $M$ , la masse moléculaire et  $R$  la constante moléculaire des gaz parfaits, soit  $8,3 \cdot 10^7$  C. G. S. La comparaison avec les valeurs empiriques va nous renseigner sur l'ordre de grandeur des coefficients  $Q$ .

Corps	Al	Ag	Cu	Fe	Ni	Au	Pt	Zn
$\alpha \cdot 10^6$	22	18	16	11	12	14	8,9	29
$\chi^{-1} \cdot 10^{-11}$	7	10	12	16	17	16	24	3,5
$\rho$	2,6	10	8,9	7,9	8,7	19,2	21,4	7,1
$M$	27	108	64	56	59	197	195	65
$Q$	5,8	7	5	4,5	5	8,3	7,1	3,4

La pression d'agitation thermique, dans un solide, est donc représentée à haute température, par une formule semblable à celle du gaz parfait, mais affectée d'un facteur numérique  $Q$  voisin de 5.

Que nous donne le calcul théorique ? Nous partons de (xii. 58) et nous remontons la filière des formules (xii. 55) puis (xi. à 120 à 127), qui nous donnent :

$$(xii. 60) \quad Q = \frac{1}{3} - \frac{V}{W_l} \frac{\partial W_l}{\partial V} + \frac{2}{3} - 2 \frac{V}{W_{tr}} \frac{\partial W_{tr}}{\partial V}$$

$$= 1 - \frac{7/6 \lambda + 5/3 \mu + \frac{40}{3} A + 24B + 8C}{\lambda + 2\mu} - 2 \frac{\frac{\lambda}{2} + \mu + 4A + 4C}{\mu}$$

Nous avons essayé, à la page 306, chapitre XI, de nous faire une idée de l'ordre de grandeur des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  qui représentent les écarts à la loi de Hooke ; nous proposons :

$$(xi. 148) \quad A \leq -\frac{\lambda}{8} \quad B \leq \frac{\lambda}{48} \quad C \leq -\frac{\mu}{6}.$$

Pour les solides usuels,  $\mu$  est voisin de  $\frac{1}{2} \lambda$  ; si l'on fait alors le calcul avec les valeurs ci-dessus, on obtient comme résultat :

$$Q \geq 0,5.$$

Notre évaluation des ABC est donc trop faible en valeur absolue. Cherchons à réaliser la valeur 5 pour  $Q$  ; et simplifions le problème en annulant  $B$  ; nous constatons que nous pouvons arriver au résultat avec divers jeux de valeurs de  $A$  et  $C$ , dont voici des exemples :

$$\lambda = \frac{1}{2} \mu \quad Q = 5 \quad B = 0$$

(xii. 61)	$\frac{A}{\lambda}$	— 0,21	— 0,4	0
	$\frac{C}{\lambda}$	— 0,21	0	— 0,45

Cet exemple montre dans quelles limites devront se trouver, en fait, les valeurs de ces coefficients inconnus.

## XII. — Thermodynamique du solide idéal.

Nous sommes arrivés à définir, au moyen des hypothèses simplificatrices des paragraphes 7 et 8, un *corps solide idéal*, qui représente une abstraction, une fiction, mais très proche de la réalité et très commode par les simplifications qu'elle comporte. Nous allons pousser l'analyse un peu plus loin,

étudier la thermodynamique de ce corps fictif, calculer son entropie, et vérifier que nos hypothèses sont en parfait accord avec le principe de Carnot.

Nous nous limiterons aux variations isotropes homogènes de volume, c'est-à-dire aux compressions ou dilatations produites par l'application d'une pression uniforme. Nous avons admis en (xii. 56) une pression élastique statique  $f(V)$ ; il lui correspond une énergie potentielle :

$$F(V) = - \int f(V) dV$$

de sorte que l'énergie totale du solide sera, d'après (xii. 54) :

$$(xii. 62) \quad U = F(V) + U(t) = F(V) + U_l + 2U_{tr} \quad U_m = RTD \left( \frac{\Theta_m}{T} \right).$$

Effectuons maintenant une petite transformation  $dV$ ,  $dT$  sur notre solide idéal, et cherchons les variations d'énergie et d'entropie. Le travail fourni par le solide, et recueilli à l'extérieur sera :

$$d\mathcal{E} = p dV = f(V) dV - \sum_m \frac{U_m}{\Theta_m} \frac{\partial \Theta_m}{\partial V} dV \quad m = l, tr, tr,$$

d'après (xii. 56); la sommation sur l'indice  $m$  doit être comprise ainsi : on comptera une fois l'indice  $l$  relatif aux ondes longitudinales et deux fois l'indice  $tr$  des ondes transversales. La variation d'entropie sera :

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + d\mathcal{E}}{T}$$

$dQ$ , chaleur fournie, de l'extérieur, et absorbée par le solide; nous tirons  $dU$  de (xii. 62) :

$$dU = \frac{\partial F}{\partial V} dV + R \sum_m \left[ D' \frac{\partial \Theta_m}{\partial V} dV + (D - \frac{\Theta_m}{T} D') dT \right].$$

Les termes en  $\frac{\partial F}{\partial V}$  et  $f(V)$  se compensent dans l'expression de  $dS$ , de sorte qu'il ne reste que les contributions des énergies d'agitation thermique. Dans celles-ci, nous remarquons que le volume ne figure que par l'intermédiaire des températures caractéristiques  $\Theta_m$ , et nous pouvons regrouper les termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} dS &= R \sum_m \left[ \frac{D'}{T} - \frac{D}{\Theta_m} \right] (d\Theta_m - \frac{\Theta_m}{T} dT) \quad m = l, tr, tr \\ &= R \sum_m \left[ D - \frac{D}{X_m} \right] dX_m \end{aligned}$$

avec :

$$X_m = \frac{\Theta_m}{T}.$$

La variable  $X_m$  est celle qui figure déjà dans la fonction de Debye  $D$  de (xii. 54). La transformation que nous venons de faire prouve que l'entropie est intégrable, ce qui signifie que notre solide idéal satisfait au



principe de Carnot. Nous allons expliciter maintenant l'expression de l'entropie; les fonctions de Debye  $D$  sont définies ainsi (xii. 40) :

$$D(X) = \frac{3}{X^3} \int_0^X \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} + \frac{3}{8} X$$

ce qui donne, dans la formule précédente :

$$(xii. 63) \quad \frac{\partial S}{\partial X_m} = R \left( D' - \frac{D}{X_m} \right) = \frac{3R}{e^{X_m} - 1} - \frac{12R}{X_m^4} \int_0^{X_m} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Tel est le résultat de notre théorie, basée sur l'application de la thermodynamique classique à un corps solide idéal, dont la pression d'agitation thermique avait été évaluée par le moyen des pressions de radiation.

La même formule peut être obtenue par une autre voie, en partant de l'expression de l'entropie d'un système de résonateurs harmoniques, entropie pour laquelle la théorie quantique donne une valeur bien définie. Considérons un groupe de  $g$  résonateurs harmoniques de fréquence  $\nu$  entre lesquels sont répartis  $n$  quanta  $h\nu$ , de sorte que l'énergie moyenne d'un résonateur soit :

$$u_\nu = \left( \frac{n}{g} + \frac{1}{2} \right) h\nu$$

en tenant compte du demi-quantum résiduel qui représente l'énergie au zéro absolu.

Dans les exemples que nous avons étudiés jusqu'ici,  $g$  est à identifier avec le nombre de vibrateurs de fréquences  $\nu$  (à  $d\nu$  près), pour un certain type d'ondes (indice  $m = l, tr$  ou  $tr$ ) et nous écrivons, d'après (xii. 34 et 41) :

$$(xii. 64) \quad g = \frac{4\pi V}{W_m^3} \nu^2 d\nu = 4\pi V \left( \frac{kT}{hW_m} \right)^3 \xi^2 d\xi = 3N \left( \frac{T}{\Theta_m} \right)^3 \xi^2 d\xi$$

avec :

$$\xi = \frac{h\nu}{kT}.$$

Reportons-nous alors au calcul quantique, nous y trouvons l'expression de la probabilité  $P$  d'une répartition de  $n$  quanta sur  $g$  résonateurs; et nous passons de la probabilité  $P$  à l'entropie  $S$  par la formule de Boltzmann (1) :

$$(xii. 65) \quad S_\nu = k \log P \\ = k g \left[ \left( 1 + \frac{n}{g} \right) \log \left( 1 + \frac{n}{g} \right) - \frac{n}{g} \log \frac{n}{g} \right].$$

La répartition la plus probable est celle pour laquelle le rapport  $\frac{n}{g}$  prend la valeur de Planck :

$$\frac{n}{g} = \frac{1}{e^\xi - 1} \quad 1 + \frac{n}{g} = \frac{e^\xi}{e^\xi - 1}$$

de sorte que l'énergie moyenne  $u_\nu$  du résonateur correspond à la formule

(1) L. BRILLOUIN. *Statistiques quantiques*, Presses Univ. Paris, 1930, p. 165, éq. 14. — G. BRUHAT. *Thermodynamique*, p. 334.

(xii. 38) ; portons les valeurs de  $g$  et  $\frac{n}{g}$  dans l'expression (xii. 65) et nous obtenons l'entropie totale en intégrant pour toutes les fréquences  $\nu$ , de 0 à la fréquence limite  $\nu_m$  :

$$S = 3Nk \left( \frac{T}{\Theta_m} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_m}{T}} \left[ \frac{e^{\xi}}{e^{\xi} - 1} \log \frac{e^{\xi}}{e^{\xi} - 1} - \frac{1}{e^{\xi} - 1} \log \frac{1}{e^{\xi} - 1} \right] \xi^2 d\xi$$

quelques transformations simples permettent de passer à la forme suivante :

$$(xii. 66) \quad S = \frac{3R}{X_m^3} \int_0^{X_m} \left[ \frac{\xi e^{\xi}}{e^{\xi} - 1} - \log(e^{\xi} - 1) \right] \xi^2 d\xi \quad X_m = \frac{\Theta_m}{T}$$

pour nous débarrasser du logarithme, intégrons par parties :

$$- \int_0^{X_m} \log(e^{\xi} - 1) \cdot \xi^3 d\xi = - \frac{X_m^3}{3} \log(e^{X_m} - 1) + \frac{1}{3} \int_0^{X_m} \frac{e^{\xi}}{e^{\xi} - 1} \xi^3 d\xi.$$

d'où :

$$(xii. 67) \quad S = -R \log(e^{X_m} - 1) + \frac{4R}{X_m^3} \int_0^{X_m} \frac{e^{\xi}}{e^{\xi} - 1} \xi^3 d\xi.$$

Nous voulons comparer cette expression avec la formule (xii. 63) obtenue par le raisonnement thermodynamique ; formons donc la dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial X_m} &= -R \frac{e^{X_m}}{e^{X_m} - 1} + 4R \frac{e^{X_m}}{e^{X_m} - 1} - \frac{12R}{X_m^4} \int_0^{X_m} \frac{e^{\xi}}{e^{\xi} - 1} \xi^3 d\xi \\ &= 3R \left[ \frac{1}{e^{X_m} - 1} + 1 \right] - \frac{12R}{X_m^4} \int_0^{X_m} \left( \frac{1}{e^{\xi} - 1} + 1 \right) \xi^3 d\xi. \end{aligned}$$

Une dernière étape élémentaire nous ramène alors à l'expression (xii. 63) et permet d'achever la vérification.

### XIII. — Discussion et rappel des points essentiels.

Le cycle des raisonnements se ferme donc sans difficulté, ce qui nous confirme dans l'heureux choix des hypothèses simplificatrices préconisées au paragraphe 7. Dans les nombreux mémoires consacrés à ce problème du corps solide, on trouve beaucoup de raisonnements analogues à ceux que nous avons présentés, mais ces raisonnements sont rarement concordants, par suite de petites différences dans les hypothèses adoptées par les divers auteurs, ou comme conséquence de légères erreurs de calculs. Les raisonnements sont de deux types principaux : les uns suivent la voie tracée par Debye et Born, et déduisent la dilatation thermique de certaines hypothèses sur les écarts à la loi de Hooke ; d'autres, comme Ratnowsky, partent de l'entropie obtenue par voie quantique (xii. 65-66) et en tirent la pression interne puis la dilatation thermique.

Le raccord ne se fait pas en général exactement, parce que des erreurs ont été commises en l'un ou l'autre des passages délicats que nous allons souligner :

I. Il faut garder, comme nous l'avons fait, la forme la plus générale possible d'écarts à la loi de Hooke, et prendre bien garde au fait que la définition rigoureuse des déformations comporte déjà l'introduction de termes d'ordre supérieur (chap. XI, § 7).

II. On obtient alors l'expression des tensions de radiation pour une onde élastique isolée, en fonction des coefficients d'élasticité  $\lambda$ ,  $\mu$ , A, B, C; il faut faire la moyenne pour des ondes complètement diffusées dans toutes les directions, et reconnaître le fait que cette formule se simplifie et s'écrit :

$$(XI. 127) \quad p_m = \frac{U_m}{V} \left( \frac{1}{3} - \frac{V}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial V} \right);$$

les coefficients d'élasticité des divers ordres n'apparaissent que sous la dérivée de la vitesse  $W_m$  des ondes par rapport au volume  $V$ .

III. Il faut discuter les conditions de limitation des ondes élastiques vers les hautes fréquences et introduire deux fréquences limites pour ondes transversales et longitudinales ( $m = tr$  ou  $l$ ), ces deux fréquences correspondant à une même longueur d'onde limite; on définit ainsi deux températures critiques  $\Theta_r$  et  $\Theta_l$  au lieu d'une seule introduite par Debye (chap. XII, § 7).

Ce point est essentiel; tous les raisonnements basés sur la formule de Debye à une seule température sont inexacts.

IV. On s'aperçoit alors que les pressions de radiation moyennes prennent la forme (XII. 55) :

$$p_m = - \frac{U_m}{\Theta_m} \frac{\partial \Theta_m}{\partial V}$$

et l'on écrit directement l'équation d'état du corps solide (XII. 56).

V. Avec ces définitions, le raccord se fait sans difficulté et le calcul de l'entropie par voie thermodynamique concorde avec celui que l'on base sur la statistique quantique (<sup>1</sup>).

(<sup>1</sup>) Voici quelques références sur les travaux relatifs à ces problèmes : P. DEBYE. *Wolfskehl vorträge*. Göttingen, 1913. — S. RATNOWSKY. *Ann. der Physik*, t. 38, 1912, p. 637; *Verh. d. D. Phys. Ges.*, t. 15, 1913, p. 75. — E. GRUNEISEN. *Ann. der Physik*, t. 39, 1912, p. 257; t. 55, 1918, p. 371; t. 58, 1919, p. 753. — K. FÖRSTERLING. *Ann. der Physik*, t. 47, 1915, p. 1127. — L. S. ORNSTEIN. *Proceedings Amst.*, 1912, p. 983. — *Deuxième Congrès de physique Solvay*, 1913. Bruxelles. G. Villars, éditeur, Paris. — M. BRILLOUIN. *Ann. de Physique*, 1914, pp. 13-433. — V. EVERDINGEN. *Thèse Utrecht*, 1914. — E. SCHRÖDINGER et E. GRUNEISEN. *Ann. der Phys.*, t. 42, 1914, p. 916. — L. S. ORNSTEIN et ZERNIKE. *Proc. Amst.*, 1917, pp. 1289, 1304, 1312. — H. A. LORENTZ. *Proc. Amst.*, 1917, p. 1324. — K. FÖRSTERLING. *Ann. der Phys.*, t. 61, 1920, p. 577. — L. BRILLOUIN. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 37, 1920, p. 357. — M. BORN et M. GÖPPERT-MAYER. *Handbuch der Physik*, Bd. 24, 2. — E. SCHRÖDINGER et E. GRUNEISEN. *Handbuch der Physik*, Bd. 10; — *Handbuch der experimental Physik*, Bd. 7, 2, Bd. 8, 1 et Bd. 8, 2. — N. F. MOTT et H. JONES. *Theory of the properties of metals and alloys*. Oxford Clarendon Press, 1936. — EWALD, PÖSCHL, PRANDTL. *The physics of solids and fluids*. Blackie, Londres, 1930. — MULLER POUILLET. *Lehrbuch der Physik*. Vieweg Braunschweig, 1925, Bd. 3, 1 et 2. — BRIDGMAN. *Physics of high pressures*. Bell, Londres, 1931.

Toutes ces indications se trouvaient dans ma thèse de 1920, mais malgré cela, la plupart des exposés et discussions ultérieures ont encore été basées sur les formules moins correctes proposées par Grüneisen.

La formule (xii. 56), que nous avons baptisée *équation d'état du corps solide* s'applique toutes les fois que la *déformation du solide se réduit à une dilatation homogène*; nous pourrions nous en servir pour calculer la compressibilité du solide à diverses températures. Dans cette formule, nous remarquons un premier terme  $f(v)$  qui fournit la compressibilité  $\chi_0$  au zéro absolu (forces statiques seules, sans agitation thermique) mais à côté de ce terme figurent des expressions provenant des pressions de radiation  $p_l$  et  $p_{tr}$ , lesquelles dépendent du volume, car  $\Theta_l$  et  $\Theta_{tr}$  sont des fonctions du volume. Grüneisen a discuté ce problème sur une formule analogue à (xii. 56), mais moins correcte, car elle ne contenait qu'une seule température caractéristique  $\Theta_D$  au lieu des deux qui doivent y figurer.

Nous obtenons la compressibilité  $\chi$  par la formule :

$$(xii. 68) \quad \frac{1}{\chi} = -V \frac{\partial n}{\partial V} = \frac{1}{\chi_0} - VU_l \frac{\partial^2 \log \Theta_l}{\partial V^2} - 2VU_{tr} \frac{\partial^2 \log \Theta_{tr}}{\partial V^2}.$$

Le second et le troisième terme montrent le rôle joué par les ondes longitudinales et transversales; les dérivées secondes sont positives de sorte que la compressibilité  $\chi$  augmente lorsqu'on élève la température. Nous pouvons donc obtenir des renseignements sur la compressibilité, comme fonction de la température, mais nous ne pouvons rien dire sur la variation des coefficients d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$ , car ceux-ci correspondent à des déformations non réductibles à une dilatation uniforme. La connaissance de  $\chi$  nous fournit une relation (Chap. X, § 3).

$$\frac{1}{\chi} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.$$

Nous n'avons utilisé, jusqu'à présent, qu'une étude des ondes d'agitation thermique *limitée au cas d'un corps isotrope initialement*. Si nous déformons un corps solide au moyen d'un glissement, nous le rendons anisotrope, et notre analyse des ondes élastiques ne s'applique plus à ce cas, de sorte que nous ne pouvons rien dire sur l'agitation thermique du corps déformé. Grüneisen donne, à ce sujet, un raisonnement inexact <sup>(1)</sup> : il prend l'expression du potentiel thermodynamique, calculée pour un corps initialement isotrope, avec les termes contenant les fonctions de Debye, et utilise ce potentiel pour calculer l'influence de la température sur les divers coefficients d'élasticité. Une telle méthode n'est pas correcte. En dehors de la compressibilité, on ne peut tirer aucun renseignement sur les coefficients d'élasticité considérés isolément.

Pour obtenir  $\lambda$  et  $\mu$  isolément, il faudrait étudier complètement un exemple avec glissement; on prendrait un corps solide isotrope <sup>(2)</sup>, on lui ferait subir

<sup>(1)</sup> *Handbuch der Physik*, t. 10, p. 23.

<sup>(2)</sup> Nous avons indiqué un calcul de ce genre au chapitre X, § 12, et l'on trouverait un exemple plus détaillé dans mon article des *Ann. de Physique*, t. 4, 1925, p. 528 déjà cité. Je donne un calcul détaillé et rigoureux de ce problème au *Journal de Physique*, t. 9 (1938).

Pour un exposé de la théorie des solides, du point de vue atomique, voir : BRILLOUIN, *La structure des corps solides dans la physique moderne*. Actualités Scient. ind., Hermann, Paris, 1932.

des dilatations  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  différentes suivant les trois axes ; on établirait alors les formules d'élasticité à partir de ce nouvel état initial ; on calculerait la propagation des ondes élastiques, dans ce *milieu anisotrope*, de sorte qu'on trouverait des vitesses de propagation différentes dans les trois directions des axes, et que les ondes ne seraient plus exactement transversales ni longitudinales. La surface limite de la première zone n'aurait pas une forme symétrique mais présenterait trois axes inégaux, de sorte qu'en passant à l'approximation de Debye, on devrait introduire une surface limite en forme d'ellipsoïde et non plus une sphère. Tous ces calculs, ainsi repris pour le corps déformé, permettraient de calculer l'énergie thermique  $U(T, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  comme fonction de la température  $T$  et des trois dilatations principales  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ; on calculerait aussi l'entropie  $S$ , comme fonction des mêmes variables, la voie la plus directe étant de partir de l'expression quantique (xii. 65), dans laquelle il n'y aurait qu'à remplacer  $g$  par l'expression qu'aurait fournie la discussion précédente, au lieu d'employer (xii. 64).

On obtiendrait donc  $U$  et  $S$  comme fonctions de déformations arbitraires, et l'on pourrait en déduire les coefficients d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  isothermes ou adiabatiques. Ce calcul détaillé n'a pas été fait, jusqu'à présent, d'une manière correcte et complète.

Une autre question se pose, c'est de savoir quels coefficients d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  doivent être employés, pour calculer les vitesses  $W_l$  et  $W_{tr}$  des ondes longitudinales ou transversales d'agitation thermique. Pour les ondes de grandes longueurs d'onde, on utilisera les coefficients adiabatiques, comme cela se fait toujours ; mais le mécanisme adiabatique exige encore un certain temps, car il comporte une transformation d'énergie mécanique en chaleur, à l'intérieur du solide ; il semble douteux que cela puisse se produire aux fréquences très élevées qui constituent l'agitation thermique, et l'on penserait plutôt que les vitesses  $W_l$  et  $W_{tr}$  de ces ondes de très hautes fréquences devraient être calculées uniquement à partir de l'énergie des forces interatomiques ( $F(r)$  dans la formule (xii. 58)) sans qu'on y fasse intervenir aucune correction dépendant de la température.

Comment tiendra-t-on compte, dans ce cas, des termes d'ordre supérieur dans l'énergie potentielle ? Ces termes sont caractérisés pour le solide isotrope par les expressions que nous avons explicitées au chapitre XI, §§ 7 et 8 ; ils provoquent deux effets distincts : d'une part, les pressions de radiation, et d'autre part des déformations et des interactions entre les ondes élastiques. Les pressions de radiation, qui constituent un effet statique, sont correctement évaluées par les méthodes de la mécanique classique ; la mécanique quantique n'y apporterait guère de corrections.

Les déformations d'ondes et leurs interactions ne peuvent être évaluées par la mécanique classique, car celle-ci conduit automatiquement à l'équipartition de l'énergie cinétique et à la loi de Dulong et Petit ; or nous savons que les conditions correspondantes ne sont remplies qu'à température élevée. Les déformations et interactions doivent donc être étudiées par les méthodes de la mécanique quantique, les seules qui puissent conduire à la loi de Planck et justifier l'exactitude des formules que nous avons admises dans ce chapitre. Ce calcul a été développé méthodiquement par Peierls <sup>(1)</sup>, qui a évalué très

(1) *Ann. der Physik*, t. 3, 1929, p. 1055. — *Ann. Institut Poincaré*, t. 5, 1935, p. 188.

complètement les échanges d'énergie entre les diverses ondes. Les échanges d'énergie une fois connus, on peut calculer le libre parcours moyen des ondes, et évaluer la vitesse d'égalisation des températures, dans un corps initialement échauffé inégalement; on obtient donc une théorie de la *conductibilité calorifique*; si l'on calculait le transport de quantité de mouvement par les ondes élastiques, on pourrait aussi calculer la viscosité du solide; mais il semble que, dans ce cas, d'autres phénomènes entrent en jeu. En tous cas, la conductibilité calorifique se rattache à tout l'ensemble des termes du 3<sup>e</sup> degré dans l'énergie potentielle, et devrait par conséquent montrer une corrélation avec la dilatation thermique; les théories développées jusqu'à présent ne permettent pas de distinguer cette relation, pourtant inévitable.

Nous avons raisonné, dans toutes nos études d'élasticité sur un corps isotrope homogène; les résultats pourraient s'étendre aux cristaux; et les relations déjà obtenues dans le cas isotrope représentent des moyennes applicables aux cristaux, en vertu des remarques de W. Voigt appelées chapitre X, à la page 237.

#### XIV. — *Essai d'extension de la théorie au cas des liquides.*

Toute une série d'expériences récentes ont ramené l'attention sur la constitution des liquides, problème fort difficile et mal résolu. On s'était pendant longtemps laissé guider par la continuité des états liquide et gazeux, et de très nombreux auteurs ont étudié les propriétés des liquides par une extension de la théorie cinétique des gaz. Ces méthodes ne donnent des résultats utiles que pour les liquides au voisinage du point critique. Lorsqu'on s'intéresse aux liquides à basse température, auprès du point de fusion, il faut raisonner autrement, et se représenter le liquide comme une sorte d'entassement de microcristaux (<sup>1</sup>).

Une autre conception, développée surtout par Bernal et Bethe, consiste à imaginer qu'autour de chaque atome règne une structure presque aussi ordonnée que dans un cristal, mais que cette structure se brouille peu à peu à grande distance, de sorte qu'il n'y a pas de relation précise de positions entre des atomes éloignés.

Nous avons déjà, dans cet exposé, utilisé à plusieurs reprises un procédé de calcul, qui permet de passer du problème relatif au solide à celui du liquide; nous faisons tendre la rigidité  $\mu$  vers zéro, et nous examinons ce que devenaient les formules dans ce cas limite. Il n'est pas impossible que ce passage à la limite corresponde à peu près à ce qui se produit au moment de la fusion. Le fait caractéristique de la fusion serait l'annulation de la rigidité.

Cette hypothèse est suggérée par le fait qu'un solide fond toujours à une température bien définie, en l'absence de tout germe liquide. Un retard à la

(<sup>1</sup>) On se reportera, à ce sujet, aux traités classiques récents, et aux articles suivants: M. MAGAT. *Annales de Physique*, 1936. — Rapports du Congrès d'Edimbourg, à la *Faraday Society* (janvier 1937). — L. BRILLOUIN. *Journ. de Physique*, t. 7, 1936, p. 153.

fusion est tout à fait exceptionnel ; au contraire, un retard à la solidification (une surfusion) est un fait courant. D'autre part, la rigidité des solides diminue toujours lorsque la température s'élève, certaines formules empiriques conduisent à prévoir  $\mu = 0$  à la température de fusion.

La fusion peut prendre des caractères très différents, suivant la nature de l'instabilité du solide. Considérons un cristal, ayant une direction de clivage nette (mica) ; si la résistance au clivage s'annule, nous obtenons un corps liquide très particulier, avec structure en couches rigides glissant les unes sur les autres ; c'est ce que l'on peut considérer comme structure du lubrifiant idéal ; les huiles de graissage ont, en effet, cette constitution laminaire, en couches planes capables de glisser l'une sur l'autre.

Passons à un autre cas extrême, le solide isotrope ; il se caractérise par deux coefficients d'élasticité de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  ; si  $\mu$  s'annule, le solide isotrope se transforme en un liquide parfait, puisque le corps n'offre plus aucune résistance aux glissements ; il ne peut plus propager aucune onde transversale, mais garde une compressibilité finie, définie par  $\lambda$ . Supposons que le coefficient  $\mu$  tende progressivement vers zéro, lorsque  $T$  augmente, et nous aurons la fusion pâteuse ; la fusion nette, observée sur les corps purs, exigerait qu'à une certaine température, le coefficient  $\mu$  tombe brutalement à zéro. Nous allons voir, à titre de curiosité, ce que l'on peut dire au sujet d'un liquide monoatomique idéal, construit en partant du solide isotrope et posant  $\mu = 0$ .

En fait, nous verrons que cette conception d'un liquide idéal ne correspond pas aux faits d'expérience, notamment aux valeurs des chaleurs spécifiques des liquides monoatomiques. On est donc contraint d'admettre un point de vue intermédiaire : un liquide, à basse température, serait un réseau cristallin défini, mais présentant une ou plusieurs directions de plans de clivage infiniment facile. La distinction, par rapport au liquide idéal précédent, est essentielle : nous aurons, dans de très petits domaines, des structures cristallines ; ces cristaux résistent à un effort tangentiel, si celui-ci s'exerce dans une direction autre que celles de clivage infiniment facile.

Reportons-nous à l'étude des vibrations stationnaires capables de se produire dans une enceinte à parois rigides (chap. XI, § 6). Nous avons trouvé que ces ondes stationnaires se divisaient en deux groupes : vibrations longitudinales et vibrations transversales. D'autre part, toute la discussion de ce chapitre (§§ 6 et 7) nous a montré que, pour un corps composé de  $N$  particules, il y avait toujours  $N$  ondes stationnaires du type longitudinal et  $2N$  du type transversal. Nous avons insisté sur le fait que les longueurs d'onde limites étaient les mêmes, tandis que les fréquences limites pouvaient différer fortement, et ces discussions nous ont montré la nécessité d'introduire deux températures caractéristiques  $\Theta_l$  et  $\Theta_{tr}$ , distinctes.

Supposons maintenant que le coefficient de rigidité  $\mu$  s'annule ; la vitesse  $W_{tr}$  des ondes transversales s'annule aussi, et la température  $\Theta_{tr}$  en fait autant. Que se passe-t-il alors ? Aucune force élastique ne s'oppose aux mouvements transversaux, qui deviennent libres ; ces mouvements provoquent, dans le liquide, des systèmes réguliers de tourbillons, que l'on peut voir sur les figures xi. 12 et 13.

Les *mouvements transversaux* deviennent *libres*. A haute température, chacun de ces mouvements prend une énergie cinétique moyenne  $\frac{1}{2} kT$  ; les

vibrations longitudinales ont en plus une énergie potentielle moyenne  $\frac{1}{2} kT$  ;  
au total :

$$U = N \cdot kT + 2N \cdot \left( \frac{1}{2} kT \right) = 2RT$$

et nous devons prévoir une chaleur spécifique à volume constant :

(xn. 69)

$$c_v = 2R = 4 \text{ calories}$$

au lieu de  $c_v = 3R = 6$  calories pour le solide.

Cette conception se distingue essentiellement des hypothèses adoptées antérieurement par de nombreux auteurs (et moi-même), lorsqu'ils ont voulu étendre aux liquides la théorie des chaleurs spécifiques de Debye <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>. On partait de la formule de Debye avec une seule température critique  $\Theta_D$  et une seule fréquence  $\nu_D$  définie par (xii. 35) ; lorsque la vitesse  $W_{tr}$  des ondes transversales tendait vers zéro, on se trouvait ainsi conduit à attribuer les  $3N$  degrés de liberté aux seules vibrations longitudinales, sans rien garder pour des mouvements de rotation, tels que ceux capables d'échanger les molécules à l'intérieur du liquide. En d'autres termes, dans un fluide, on veut conserver  $3N$  degrés de liberté ; or, il n'y a plus que des ondes longitudinales ; on attribuait donc les  $3N$  degrés de liberté à ces ondes, au lieu de  $N$  qui leur reviennent naturellement ; cela conduisait à admettre une longueur

d'onde limite  $\left( \frac{4\pi V}{\rho N} \right)^{\frac{1}{3}}$  plus courte que dans les solides, où l'on a  $\left( \frac{4\pi V}{3N} \right)^{\frac{1}{3}}$

Il était fort gênant d'être obligé de supposer que, dans le désordre d'un liquide, il pourrait se propager des ondes plus courtes que dans un solide régulièrement ordonné. Ce raisonnement ancien conservait la loi de Dulong et Petit, et prévoyait pour les liquides une chaleur spécifique (à haute température) :

$$c_v = 3R = 6 \text{ calories}$$

comme pour les solides ; le raisonnement plus correct, que nous avons précisé, conduit à une valeur plus faible, soit  $2R$  à haute température, et certainement moins de  $2R$  à basse température, car il faudrait tenir compte des conditions de quanta sur les vibrations élastiques longitudinales et sur les mouvements de rotation.

Les liquides monoatomiques réels suivent une tout autre loi : M. Magat et Bauer ont discuté quelques exemples ; He, A, Ne, Hg, Cs. Leurs résultats sont rassemblés sur la figure xii. 24. La chaleur spécifique part, *grosso modo* de  $3R$  au point de fusion pour descendre à  $2R$ , au point critique. La figure donne les valeurs en fonction d'une température réduite  $\theta$  ;  $\theta = 0$  correspond au point de fusion et  $\theta = 1$  au point critique. Les points expérimentaux relatifs à A, Ne, Hg, Cs se groupent très convenablement autour d'une même courbe ; pour l'hélium, on est à très basse température, la chaleur spécifique

<sup>(1)</sup> L. BRILLOUIN. Thèse, 1920, *loc. cit.* ; *J. de Physique*, 1922, t. 3, pp 326-362 ; *J. Physique*, 1935, t. 6, p. 337 ; *Scientia*, 1932, p. 206.

<sup>(2)</sup> A. SOMMERFELD. *Probleme der freien Weglänge, Vorträge über die kinetische Theorie*. Göttingen, 1913, Teubner, 1914, p. 126.



est beaucoup plus faible (échelle de droite) et monte peu à peu. Toute théorie quantique donnera une chaleur spécifique croissante de ce genre.

Puisque les liquides réels fournissent une chaleur spécifique  $3R$  auprès du point de fusion, c'est qu'à ces températures ils se comportent encore presque comme des solides ; les tourbillons ne peuvent se produire librement ; il y a des ondes transversales, au moins lorsque la longueur d'onde est très courte, à peine supérieure à la longueur d'onde limite, c'est-à-dire à 2 fois la distance de deux atomes voisins.

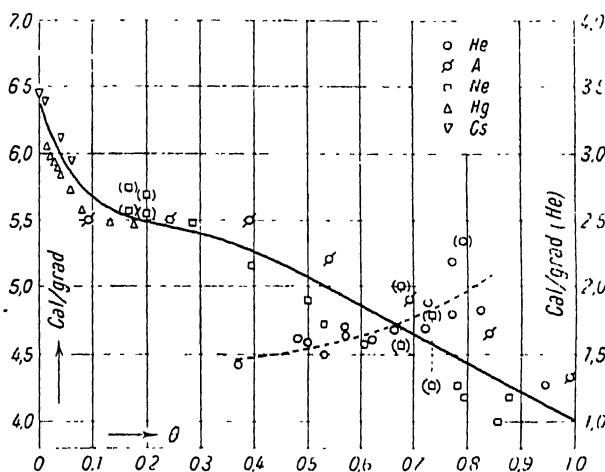


Fig. XII. 24.

Rappelons la discussion donnée à la fin du paragraphe précédent : à température  $T$  élevée, les coefficients d'élasticité  $\lambda_1$  et  $\mu_1$  qui correspondent à une déformation très lente (macroscopique) peuvent différer beaucoup des coefficients  $\lambda_2, \mu_2$  relatifs aux ondes de fréquences élevées qui constituent l'agitation thermique ; nous devons, dans un liquide, supposer que  $\mu_1$  (macroscopique) est nul, mais rien ne nous dit ce que devient  $\mu_2$  (microscopique), de sorte que les ondes transversales de très hautes fréquences peuvent parfaitement se propager. L'essai que nous venons de faire confirme la complexité de structure des liquides, et l'existence d'une régularité presque cristalline dans des volumes de petites dimensions.

Nous avons raisonné sur un fluide sans viscosité ; les choses changent un peu d'aspect, lorsqu'on tient compte de la viscosité, car des mouvements transversaux peuvent alors se propager, avec un gros coefficient d'affaiblissement ; R. Lucas a signalé le rôle que ces ondes de viscosité pourraient jouer dans l'agitation thermique des liquides <sup>(1)</sup> et la question mérite une étude détaillée ; en outre, les hétérogénéités de structure des liquides semblent jouer un rôle important dans l'absorption de la diffusion des ultra-sons.

<sup>(1)</sup> *O. R. Ac. Sc.*, t. 203, 1936, p. 611 ; p. 773 ; *Journ. Phys.*, t. 8, 1937, p. 41.



# TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

## A

Accélération (forces d'), 138, 238.  
 Accélération absolue véritable, 85.  
 Accroissement vrai ou absolu, 79.  
 Action de Lagrange, 160.  
 Agitation thermique, 244, 308.  
 Agitation thermique (Energie d'), 340.  
 Agitation thermique (Pression interne d'), 245.  
 Agitation thermique du corps déformé, 344.  
 Agitation thermique des solides, 308.  
 ALEMBERT (d'), 138.  
 Amplitude de l'onde, 195 (voir : onde).  
 Amplitude des oscillations, 310.  
 Analyse vectorielle, 113.  
 Angle imaginaire, 103.  
 Angles  $\theta_{ik}$  imaginaires, 101.  
 Angle de deux vecteurs, 103, 122.  
 Antisymétrie, 13, 39, 40, 58, 131.  
 Antisymétriques, 68, 73, 215.  
 Antisymétrique (tenseur), 67.  
 APPELL-THIRY, 131.  
 ASBACH, 270.  
 Atomes, 313, 323.  
 Atomes (énergie d'interaction entre les), 315.  
 Atomes (modèles d'), 188.  
 Atome d'hydrogène, 175.  
 Atomes immédiatement voisins, 317.  
 Attraction universelle, 137.  
 Axes (changement), 108.  
 Axes (sens de rotation), 8, 214.  
 Axes cartésiens, 6, 219, 237.  
 Axes cartésiens (changement), 11.  
 Axes cartésiens orthogonaux, 227, 233, 242.  
 Axes curvilignes, 37, 75, 116, 221, 240.  
 Axes curvilignes  $X^i$ , 239.  
 Axes à droite, 8, 46.  
 Axes d'Euclide, 247.  
 Axes euclidiens orthogonaux, 103, 292.  
 Axes à gauche, 8, 46.  
 Axes originaux euclidiens, 239.  
 Axes orthogonaux, 54, 237.

Axes orthogonaux en rotation, 156.  
 Axes rectangulaires, 247.  
 Axes rectilignes, 202, 219.  
 Axes rectilignes (changements d'), 23.  
 Axes rectilignes orthogonaux, 213.  
 Axes de référence (changement d'), 76, 96.

## B

BACHEM, 270.  
 Barre, 305.  
 Battements, 203.  
 Battements orientés obliquement, 207.  
 BAUER, 348.  
 BECQUEREL, 131.  
 BERNOULLI (nombres de), 329.  
 BIANCHI, 131, 133.  
 Bilan énergétique, 151, 154, 190.  
 BOHR (Conditions de), 188, 189.  
 BOLTZMANN, 176, 179, 181, 183, 327, 341.  
 BOLTZMANN-EHRENFEST, 288, 295, 299.  
 BORN, 189, 249, 255, 290, 308, 312, 315, 322, 324, 327, 333, 336, 342.  
 BORN (Comparaison des définitions d'élasticité suivant), 249.  
 BOUSSINESQ, 246, 251, 264, 279, 280, 284, 289, 290, 291, 336.  
 BOUSSINESQ (Comparaison des définitions d'élasticité suivant), 249.  
 BRAVAIS (réseaux de), 306.  
 BRIDGMAN, 244.  
 BRILLOUIN (Zones de), 324.  
 BROGLIE (L. de), 167, 192, 197, 199, 210.

## C

Calcul sensoriel (exemples de), 292.  
 Calcul vectoriel, 6.  
 Capacité, 55.  
 Capacités (Méthode de formation), 56.  
 Capacité (transport en circuit fermé d'une), 90.  
 Capacité covariante antisymétrique, 68.  
 Capacités scalaires, 47, 49, 109, 120, 132, 214.

- Capacité scalaire (dérivée covariante), 83.  
 Capacités tensorielles, 45, 48, 57, 109, 244, 245.  
 Capacité tensorielle (dérivée covariante), 83.  
 Capacité tensorielle (identification d'une), 110.  
 Capacité tensorielle covariante, 53.  
 CARNOT (principe de), 228, 340.  
 CARTAN, 77, 79, 131, 136.  
 Cartésien (système), 6.  
 CAUCHY (relations de), 232, 234, 246, 306.  
 Chaleur, 59, 179.  
 Chaleur fournie, 228.  
 Champ électromagnétique, 58, 74.  
 Champ de vecteur, 60.  
 Charge électrique spécifique, 110.  
 CHRISTOFFEL (symboles de), 118, 119, 120, 123, 126, 131, 225.  
 Clivage, 347.  
 CLAUSIUS, 179.  
 Coefficients d'élasticité, 232, 309.  
 Coefficients d'élasticité (variations des), 344.  
 Coefficients d'élasticité A. B. C. de la seconde approximation, 305.  
 Coefficients A. B. C. (Évaluation des), 307.  
 Coefficients d'élasticité adiabatiques, 345.  
 Coefficients d'élasticité apparents, 244, 254, 258, 274, 276, 278, 289.  
 Coefficients  $g_{ik}$  (signification géométrique des), 100.  
 Coefficients d'inertie, 142, 143, 155.  
 Coefficient de Poisson, 235.  
 Coefficients de Voigt, 232.  
 Combinaisons invariantes, 226, 234.  
 Commutation (règles de), 201, 202.  
 Comparaison des définitions d'élasticité, 249.  
 Comparaison des unités de longueur de différentes orientations, 95.  
 Comparaison des unités de longueur en divers points, 95.  
 Composantes contravariantes d'un vecteur, 102.  
 Composantes covariantes d'un vecteur, 102.  
 Composante covariante de la vitesse, 143.  
 Composante longitudinale dans une onde élastique stationnaire, 274.  
 Composante transversale dans une onde élastique stationnaire, 274.  
 Composantes d'un vecteur suivant le contour des axes, 104.  
 Compressibilité, 235.  
 Compressibilité adiabatique, 21.  
 Compressibilité isotherme, 21.  
 Compressibilité du solide, 344.  
 Conditions cycliques, 255, 261, 266, 276, 290, 322.  
 Conditions aux limites, 261, 263.  
 Condition de minimum, 166.  
 Conditions de quanta, 188, 348.  
 Conditions de Voigt, 236.  
 Conductibilité calorifique, 346.  
 Conductibilité électrique, 344.  
 Connexion affine, 75.  
 Conservation de l'énergie, 152.  
 Conservation de l'énergie totale, 162.  
 Conservation de la masse, 241.  
 Conservation de la quantité de mouvement, 260.  
 Constance de l'énergie totale, 145.  
 Constante  $h$  de Planck, 188.  
 Contenu volumétrique (densité de), 110.  
 Contraction, 33.  
 Contravariance, 23.  
 Contravariante antisymétrique (densité), 58.  
 Coordonnées (changement de), 37, 46.  
 Coordonnées cachées, 176.  
 Coordonnées cartésiennes, 7.  
 Coordonnées circulaires, 213.  
 Coordonnées curvilignes, 37, 75, 95, 99, 104, 200, 202, 213, 219, 221, 237.  
 Coordonnées curvilignes entraînées dans la déformation, 237.  
 Coordonnées curvilignes dans l'espace euclidien, 97.  
 Coordonnées curvilignes orthogonales, 98, 113.  
 Coordonnées cylindriques, 98, 110, 113, 115.  
 Coordonnées elliptiques, 99.  
 Coordonnées elliptiques cylindriques, 99.  
 Coordonnées elliptiques planes, 99.  
 Coordonnées euclidiennes, 7, 246.  
 Coordonnées euclidiennes (axes rectangulaires), 247.  
 Coordonnées d'Euler, 240, 290.  
 Coordonnées géodésiques, 75, 77, 122, 134.  
 Coordonnées de Lagrange (Équations de mouvement en), 246.  
 Coordonnées macroscopiques, 180.  
 Coordonnées microscopiques, 180.  
 Coordonnées normales de Riemann, 134.  
 Coordonnées obliques, 115.  
 Coordonnées obliques dans un plan, 97.  
 Coordonnées orthogonales, 100, 114, 125.  
 Coordonnées paraboliques, 99.  
 Coordonnée  $q^i$  (Moment conjugué à la), 141, 143.  
 Coordonnées sphériques, 98, 110, 114, 115, 126, 213.  
 Corde vibrante, 184, 312.  
 CORIOLIS (forces de), 155.  
 Corps cristallisés, 232, 266, 321.  
 Corps cristallisé homogène, 237.  
 Corps déformé (agitation thermique du), 341.  
 Corps isotrope, 226, 322, 335.  
 Corps isotrope initialement, 289.

- Corps mono-atomique, 289, 321.  
 Corps noir, 329.  
 Corps solides (chaleur spécifique des), 308.  
 Corps solides (Equation d'état des), 309, 343.  
 Corps solide (État initial), 229.  
 Corps solide (fréquence limite du), 332.  
 Corps solides (propriétés thermiques des), 308.  
 Corps solide (spectre des vibrations d'un), 332.  
 Corps solides (Théories modernes des), 285, 318.  
 Corps solide idéal, 339.  
 Corps solide idéal (application de la thermodynamique classique à un), 341.  
 Corps solide initialement déformé, 242.  
 Corps solide rendu anisotrope par une traction latérale, 289.  
 COULOMB, 173, 193.  
 Courbe géodésique (longueur de la), 125.  
 Courbes de niveau, 21.  
 Courbes de niveau barométriques, 22.  
 Courbure (invariant de), 132.  
 Courbure de l'espace, 91, 108.  
 Courbure d'un espace de Riemann, 129.  
 Courbure de l'espace-temps, 187.  
 Courbure moyenne de Ricci, 136.  
 Courbure riemannienne, 136.  
 Courbure de la surface, 22.  
 Courbure totale non nulle, 127.  
 Courbure d'univers, 118.  
 Covariance, 23.  
 Cristal, 213, 281, 290, 306, 311, 322, 335, 346.  
 Cristal cubique, 234.  
 Cristal en équilibre naturel, 236.  
 Cristal mono-atomique, 323.  
 Cristal oblique, 234.  
 Cristal soumis à des efforts extérieurs, 236.  
 Cristal soumis à la pression uniforme, 236.  
 Cristaux (Électrostatique des), 60.  
 Curl, 9.
- D**
- DEBYE (P.), 267, 308, 312, 324, 325, 327, 328, 332, 336, 342.  
 Décomposition en ondes planes, 256.  
 Définition des tenseurs, 23.  
 Déformation, 220, 221, 222, 224, 228, 242, 280, 281.  
 Déformations (définition générale), 223.  
 Déformations (définition rigoureuse des), 220, 343.  
 Déformation (développement du tenseur de la), 220, 225.  
 Déformations (énergie potentielle élastique développée par rapport aux), 228, 278.  
 Déformations (étude des), 219.  
 Déformation (invariants de la), 226.  
 Déformations (liaison entre les répartitions possibles des), 223.  
 Déformation (tenseur de la), 224, 233, 237.  
 Déformation élastique (limites de), 244.  
 Déformations progressives des ondes élastiques, 278, 345.  
 Déformations permanentes, 305.  
 Déformations de torsion, 305.  
 Dégénérescence, 13, 289, 276.  
 Densité, 55, 215.  
 Densité (identification d'une), 110.  
 Densités (Méthode de formation), 56.  
 Densité (transport en circuit fermé d'une), 90.  
 Densité de contenu volumétrique, 110.  
 Densité contravariante antisymétrique, 68.  
 Densité d'électricité, 110.  
 Densité d'énergie, 240.  
 Densité d'énergie cinétique, 234.  
 Densité d'énergie interne élastique, 230.  
 Densité d'énergie moyenne des oscillations élastiques, 283.  
 Densité d'énergie potentielle, 254.  
 Densité d'énergie potentielle pour un solide déformé, 228.  
 Densité de forces, 219.  
 Densité de masse, 110.  
 Densité de quantité de mouvement, 241, 290.  
 Densités scalaires, 47, 61, 69, 70, 109, 120, 132.  
 Densité scalaire (dérivée covariante d'une), 82.  
 Densités tensorielles, 45, 48, 57, 67, 69, 82, 109, 111, 121, 216, 230, 247.  
 Densité tensorielle (dérivée d'une), 82.  
 Densités tensorielles (divergence appliquée à des), 72, 84, 219.  
 Densités tensorielles (méthode de formation), 54.  
 Densité tensorielle (le rotationnel comme), 67.  
 Densité tensorielle contravariante, 52.  
 Densité tensorielle des efforts, 239.  
 Densité vectorielle, 61.  
 Déplacements, 261, 312.  
 Déplacements d'indices, 101, 120.  
 Déplacement moyen, 310.  
 Déplacement  $u'$ , 220, 224.  
 Déplacements virtuels, 139, 248.  
 Dérivation des déterminants, 72, 83, 121.  
 Dérivée absolue, 85, 144, 240.  
 Dérivée absolue d'un vecteur, 85.  
 Dérivée covariante, 59, 63, 73, 111, 200, 201, 218, 219.  
 Dérivée covariante d'une capacité scalaire, 83.

Dérivée covariante d'une capacité tensorielle, 83.  
 Dérivée covariante d'une densité scalaire, 82.  
 Dérivées covariantes en géométrie métrique, 118.  
 Dérivées covariantes des  $g$ , 120.  
 Dérivées covariantes nulles, 120.  
 Dérivées covariantes des pseudo-tenseurs, 82.  
 Dérivées covariantes secondes de tenseurs, 89.  
 Dérivées covariantes secondes de vecteurs, 89.  
 Dérivée covariante d'un tenseur, 80.  
 Dérivée covariante d'un vecteur contravariant, 78.  
 Dérivée covariante d'un vecteur covariant, 79.  
 Dérivée d'une densité tensorielle, 82.  
 Dérivées des déplacements (développement de l'énergie potentielle élastique en fonction des), 251, 278, 336.  
 Dérivée d'un déterminant, 72, 83, 121.  
 Dérivée du déterminant  $g$ , 121.  
 Dérivées partielles (développement par rapport aux), 251.  
 Dérivées partielles (énergie potentielle élastique développée par rapport aux), 278, 336.  
 Dérivée vraie ou absolue, 85, 144, 240.  
 DESCARTES, 6.  
 Déterminants (dérivation des), 72.  
 Déterminants (dérivée du), 83, 121.  
 Déterminants (Multiplication des), 108.  
 Déterminant  $g$ , 96, 108, 120.  
 Développement de l'énergie potentielle élastique en fonction des dérivées des déplacements, 251, 278, 336.  
 Diagrammes thermo-dynamiques, 19.  
 Diffusion de la lumière, 197, 311.  
 Dilatation, 220, 222, 235.  
 Dilatation isotrope, 243, 296.  
 Dilatation isotrope du solide, 295.  
 Dilatation du solide, 244.  
 Dilatation thermique, 309, 337, 342.  
 Dilatation thermique des solides, 245, 290, 309, 335.  
 Dimensions (nombre de), 24.  
 DIRAC, 189.  
 Directions de longueur nulle, 101.  
 Direction de vibration, 252, 253, 322.  
 Dispersion, 194, 203, 324, 333.  
 Distance de deux molécules voisines, 309.  
 Distance de deux points, 94.  
 Distorsion non linéaire, 280.  
 Divergence, 58, 59, 60, 69, 82, 111, 115, 240.  
 Divergences (Exemples de), 73.  
 Divergence appliquée à des densités tensorielles, 72.

Divergences de densités tensorielles, 84, 219.  
 Divergence scalaire, 113.  
 DULONG, 327, 328, 332.

## E

Eau (rides à la surface de l'), 205.  
 Écart moyen (augmentation de l'... entre les particules), 310.  
 EDDINGTON, 131.  
 Effets secondaires sur des ondes libres, 280.  
 Efforts, 212.  
 Efforts (système des), 215.  
 Efforts de Boussinesq, 289, 290.  
 Efforts de Boussinesq (valeurs moyennes dans une onde plane libre), 291.  
 Efforts élastiques statiques, 241.  
 Efforts exercés par des radiations complètement diffusées et non polarisées, 298.  
 Efforts moyens exercés par les ondes, 294.  
 Effort moyen exercé par les vibrations élastiques, 284.  
 Effort de traction, 10.  
 EHRENFEST, 179, 183.  
 EINSTEIN, 90, 136, 157, 241, 327.  
 EINSTEIN (Mécanique relativiste d'), 149.  
 Élasticité, 9, 59, 75, 212, 311.  
 Élasticité (coefficients d'), 232, 244, 254, 258, 309.  
 Élasticité (Comparaison des définitions d'), 249.  
 Élasticité (forces d'), 250.  
 Élasticité (principe de minimum en), 250.  
 Élasticité (tenseurs en), 212.  
 Électricité, 59.  
 Electromagnétisme, 59.  
 Electromagnétisme relativiste, 58.  
 Electrons (faisceaux d'), 192.  
 Electrons libres (pression des), 245.  
 Electrons libres dans les métaux, 245, 324.  
 Electron optique, 193.  
 Électron de valence, 193.  
 Electrostatique des cristaux, 60.  
 Élément de surface, 53, 67, 213.  
 Élément de volume, 49, 109, 218.  
 Enceinte parallélépipédique rectangle à parois rigides lisses, 273.  
 Enceinte rigide lisse, 288.  
 Énergie, 189.  
 Énergie (Conservation de l'), 152.  
 Énergie (niveaux d'), 188.  
 Énergie d'agitation thermique, 340.  
 Énergie d'agitation thermique d'un solide, 327.  
 Énergie cinétique, 190, 254.  
 Énergie cinétique (équipartition de l'), 327.

Énergie élastique interne, 248.  
 Énergie d'interaction entre les atomes, 315.  
 Énergie interne, 190.  
 Énergie interne élastique (densité  $d'$ ), 230.  
 Énergie potentielle, 141, 229.  
 Énergie potentielle (densité  $d'$ ), 254.  
 Énergie potentielle (densité pour un solide déformé), 228.  
 Énergie potentielle (termes d'ordre supérieur dans  $l'$ ), 345.  
 Énergie potentielle élastique développée par rapport aux déformations, 278.  
 Énergie potentielle élastique développée par rapport aux dérivées partielles, 278.  
 Énergie potentielle élastique en fonction des dérivées des déplacements (développement de  $l'$ ), 336.  
 Énergie potentielle totale minima, 250.  
 Énergie totale, 176.  
 Énergie totale (conservation de  $l'$ ), 162.  
 Énergie totale (constance de  $l'$ ), 145.  
 Énergie vibratoire, 308.  
 Énergie au zéro absolu, 341.  
 Entropie, 228, 340, 342.  
 Entropie (calcul de  $l'$ ), 343.  
 Entropie d'un système de résonateurs harmoniques, 341.  
 Équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi, 169, 172, 197, 200.  
 Équations de dimension, 5.  
 Équation d'état des corps solides, 309, 343.  
 Équation d'une géodésique, 124.  
 Équations de Hamilton, 167, 170.  
 Équations de Lagrange, 140, 142, 160.  
 Équations de Lagrange (Interprétation géométrique des), 143.  
 Équations de mouvement en coordonnées de Lagrange, 246.  
 Équation d'onde, 199.  
 Équation de Poisson, 62.  
 Équation réduite de Hamilton-Jacobi, 197.  
 Équation de Schrödinger, 199.  
 Equipartition de l'énergie cinétique, 327.  
 Espaces affines, 73, 91, 118, 129.  
 Espace de Cartan avec torsion, 77.  
 Espaces courbes, 123.  
 Espace à courbure nulle, 92, 134.  
 Espace dualistique, 30.  
 Espace euclidien, 7, 54, 94, 123, 134, 143, 144, 202.  
 Espace euclidien (coordonnées curvilignes dans  $l'$ ), 97.  
 Espace euclidien tangent, 106.  
 Espace euclidien tridimensionnel, 7, 54, 137.  
 Espace linéaire, 92.  
 Espace métrique, 16, 111.  
 Espaces mixtes, 22.

Espace plan linéaire, 92.  
 Espace de Riemann, 94, 108, 118, 200.  
 Espace de Riemann (Courbure d'un), 129.  
 Espace de Riemann à courbure, 144.  
 Espace-temps, 146, 157.  
 Espace-temps (courbure de  $l'$ ), 157.  
 Espace-temps (géodésiques dans  $l'$ ), 148.  
 Espace-temps (géodésique de  $l'$ ), 162.  
 Espace-temps à  $r + 1$  dimensions, 152, 162, 165.  
 Espace tridimensionnel, 50.  
 Espace vectoriel affine, 16.  
 Espace vectoriel à trois dimensions, 46.  
 Étalons de longueur (transport des), 116.  
 Étalons de longueur orientable, 116.  
 État gazeux (continuité de  $l'$ ), 346.  
 État initial, 311.  
 État initial (stabilité de  $l'$ ), 231.  
 État initial isotrope, 234.  
 État liquide (continuité de  $l'$ ), 346.  
 EUCKEN, 332.  
 EUCLIDE (axes  $d'$ ), 247.  
 EULER (Comparaison des définitions d'élasticité suivant), 249.  
 EULER (Coordonnées  $d'$ ), 240, 290.  
 Évaluation des A. B. C., 305, 339.  
 Exponentielles imaginaires, 194.  
 Extension en configuration, 137, 143, 144, 146, 172, 191, 197, 200, 210.  
 Extension en configuration (Métrique de  $l'$ ), 143.  
 Extension en configuration (vitesse du mobile dans  $l'$ ), 145.  
 Extension en configuration non euclidienne, 140.

## F

FERMAT (principe de), 166, 174, 193, 196.  
 FERMI (Gaz dégénéré de), 245.  
 File d'atomes, 315.  
 File d'atomes (vibrations d'une), 315.  
 Fluide, 277.  
 Fluide (ondes élastiques dans un), 298, 300.  
 Fluides (pressions de radiation dans les), 298.  
 Flux de quantité de mouvement, 241, 290, 291.  
 Focales, 195.  
 Fonction de Debye, 328.  
 Fonction de Hamilton, 161, 163, 167, 172.  
 Fonction de Lagrange, 142, 159, 163, 167, 172.  
 Fonction de Lagrange complète, 177.  
 Force, 36, 141, 214.  
 Forces (densité de), 219.  
 Force (moment d'une), 215.  
 Forces d'accélération, 238.  
 Forces assurant les liaisons, 177.  
 Forces de Boussinesq, 336.

Forces centrales, 234, 306.  
 Forces centrifuges, 155.  
 Forces de Coriolis, 155.  
 Forces d'élasticité, 215, 250.  
 Forces élastiques (Travail virtuel des), 249.  
 Forces extérieures, 238.  
 Forces extérieures (système des), 311.  
 Forces extérieures (travail des), 228.  
 Forces extérieures accidentelles, 230.  
 Forces extérieures continues, 230.  
 Forces d'inertie, 138.  
 Force résultante sur un élément de volume, 218.  
 Forme linéaire, 30.  
 Formules (homogénéité des), 15.  
 Formule de Boltzmann, 181, 183.  
 Formule de Boltzmann-Ehrenfest, 183, 288, 293, 299.  
 Formules de Boussinesq, 246.  
 Formules de commutation, 202.  
 Formule de Planck, 327, 332.  
 FÖRSTERLING, 338.  
 Foyer, 195.  
 Franges d'interférences mobiles, 269, 272.  
 Franges noires, 270, 272.  
 Fréquence, 189.  
 Fréquences de combinaison, 281.  
 Fréquence limite, 312, 317, 322, 323, 328, 343, 347.  
 Fréquence limite du corps solide, 332.  
 Fréquence limite de Debye, 325, 332.  
 Fréquence maxima, 312, 314.  
 Fusion, 347.  
 Fusion pâteuse, 347.

## G

GALBRUN, 131.  
 Gaz (théorie des), 308.  
 Gaz (théorie cinétique des), 179, 245, 346.  
 Gaz dégénéré de Fermi, 245.  
 Géodésique, 85, 123, 144, 147, 159, 166, 196.  
 Géodésiques (Propriétés des), 123.  
 Géodésique de l'espace-temps, 162.  
 Géodésiques dans l'espace-temps, 148.  
 Géométrie affine, 19, 75, 101, 103, 111.  
 Géométrie métrique, 75, 94, 111, 129.  
 Géométrie métrique (dérivées covariantes en), 118.  
 Géométrie de Riemann, 95, 137.  
 Géométrie usuelle, 92, 94.  
 Géométrie vectorielle, 23.  
 Glissement, 220, 222, 235.  
 Gradient, 59, 60, 63, 68, 111, 115.  
 Gradient (rotationnel d'un), 60, 69.  
 Gravitation, 132.  
 Groupe (vitesse de), 203, 210.  
 Groupes d'ondes, 209.  
 Groupe d'ondes (propagation d'un), 203.

Groupe d'ondes dans l'espace, 206.  
 Groupes d'ondes en mécanique ondulatoire, 209.  
 GRÜNEISEN, 337, 344.

## H

HAMILTON, 161, 167, 197.  
 HAMILTON (équations de), 167, 170.  
 HAMILTON (fonction de), 161, 163, 167, 172.  
 HAMILTON (Onde de), 190, 210.  
 HAMILTON (vitesse de l'onde de), 174.  
 HAMILTONIEN, 200.  
 HAMILTON-JACOBI (équations aux dérivées partielles de), 169, 172, 197, 200.  
 HAMILTON-JACOBI (Equation réduite de), 197.  
 HEISENBERG, 189.  
 HENRIOT (E.), 217.  
 HIEDEMANN, 270.  
 HOOKE (Loi de), 232, 305, 336, 338.  
 HOOKE (écarts à la loi de), 280, 310, 342, 343.  
 HOOKE (écarts réversibles à la loi de), 305.  
 HOPWOOD, 270.  
 HUYGENS, 173.  
 Hydrodynamique, 59.  
 Hydrogène (atome d'), 175.  
 Hyperplan, 31.  
 Hypersurface, 137.  
 Hypothèse de Levi-Civita, 77.

## I

Identités de Bianchi, 133.  
 Identité des valeurs moyennes des efforts de Boussinesq et des tensions dans une onde plane libre, 291.  
 Indices muets, 29, 34, 124.  
 Inertie (coefficients d'), 142, 143, 155.  
 Inertie (termes d'), 155.  
 Intégrabilité, 87, 116.  
 Intégrabilité (conditions d'), 86.  
 Intégrale d'action, 160.  
 Interaction, 213, 317.  
 Interactions entre les ondes élastiques, 278, 345.  
 Interférence, 268.  
 Interférences mobiles (franges d'), 269, 272.  
 Invariants adiabatiques de Boltzmann-Ehrenfest, 183, 288, 295, 299.  
 Invariant de courbure, 132, 134.  
 Invariants de la déformation, 226.  
 Ionisation (potentiels), 193.

## J

Jauge (invariance de), 116, 120, 129, 132.  
 Jauge (transport de la), 117.



JEANS (J. H.), 267.

JONES, 324

JUVET, 131.

## L

LAGRANGE, 140, 142, 143, 159, 160, 161, 163, 166, 167, 172, 177, 188, 246, 251.

LAGRANGE (action de), 166.

LAGRANGE (Comparaison des définitions d'élasticité suivant), 249.

LAGRANGE (Équations de), 140, 142, 143, 160.

LAGRANGE (fonction de), 142, 159, 163, 167, 172, 177.

LAGRANGE (principe de moindre action de), 159, 161.

LAMÉ (notations de), 232

LANGEVIN (P.), 1, 45, 59, 60.

LAPLACIEN, 59, 60, 111, 112, 113, 115, 121.

LAUE (M. v.), 223.

LEVI-CIVITA (hypothèse de), 77.

Liaisons, 137, 138, 180.

Liaisons (forces assurant les), 177.

Liaisons (variation des), 177.

Liaisons holonomes, 137.

Liaisons holonomes dépendant du temps, 150.

Liaisons holonomes indépendantes du temps, 176.

Liaisons indépendantes du temps, 141.

Liaisons indépendantes du temps avec énergie potentielle, 146.

Lignes coordonnées orthogonales, 100.

Lignes géodésiques, 85, 123.

Lignes de plus grande pente, 21.

Limitation des longueurs d'onde, 266, 309.

Limitation des ondes, 309.

Limitation des ondes élastiques (conditions de), 343.

Limites de déformation élastique, 244

Liquides, 298, 346.

Liquides (constitution des), 346.

Liquides (structure des), 349.

Liquide considéré comme cas particulier des solides, 298.

Liquides mono-atomiques (chaleurs spécifiques des), 347.

Liquide mono-atomique idéal, 347

Liquide parfait, 347.

Lois d'action entre les molécules, 309

Lois de Coulomb, 193.

Loi de Dulong et Petit, 327, 328, 332.

Loi de Hooke, 232, 305.

Loi de Hooke (écarts à la), 280, 310, 336, 338, 342, 343.

Loi de Hooke (écarts réversibles à la), 305.

Lois d'interaction, 213.

Loi de Planck, 345.

Loi de réfraction, 262.

Loi des sinus, 262.

Longueur (unité de), 54.

Longueur minima, 123.

Longueur d'onde, 190, 192, 198, 313.

Longueur d'onde (limitation de la), 266, 309.

Longueurs d'onde limites, 314, 322, 325, 333, 343, 347.

Longueurs d'onde limites de Debye, 325.

Longueur d'onde minima, 312, 324.

Longueur stationnaire, 123, 124.

LORENTZ, 311, 337.

Lubrifiant, 347

LUCAS (R.), 349.

Lumière (diffusion de la), 197, 311.

## M

MAGAT, 348.

Magnétisme, 59.

Maille de longueur  $d$ , 315.

Masse, 189.

Masse (conservation de la), 241

Masse spécifique, 110.

Matrices  $\delta$ , 15, 36, 38, 189.

MAUPERTUIS, 159, 165, 166, 188.

MAUPERTUIS (principe de), 165, 166.

Mécanique classique, 137.

Mécanique géométrique, 191, 210.

Mécanique ondulatoire, 137, 167, 188, 189, 191.

Mécanique ondulatoire (groupes d'ondes en), 209.

Mécanique quantifiée, 176, 188.

Mécanique quantique, 5, 179, 189, 260, 345.

Mécanique rationnelle, 137.

Mécanique relativiste, 148, 167, 199.

Mécanique relativiste d'Einstein, 149.

Mécanique de Schrödinger, 199.

Mécanique des systèmes, 60.

Mesures d'intensité des sons ou des ultrasons, 304.

Mètre (transport du), 117.

Mètre orientable, 95, 118.

Mètre transportable, 95, 118.

Métrique, 73, 94, 116, 200, 215.

Métrique de l'extension en configuration, 143.

Milieu continu, 335.

Milieu cristallisé anisotrope, 252, 263.

Milieu dispersif, 203.

Milieu élastique continu, 322.

Milieu fluide, 298, 306, 346.

Milieu hétérogène, 203.

Milieu homogène, 203.

Milieu isotrope, 324.

Milieu solide isotrope, 263, 296.

Milieu solide en mouvement, 240.

Milieux troubles (théorie des), 197.

Mirage, 176.  
 Miroir (pression de radiation sur un), 188, 283, 293.  
 Miroirs orthogonaux (réflexion sur des), 268.  
 Miroirs plans, 264.  
 Miroir rigide lisse, 263, 284.  
 Mobile (vitesse du), 210.  
 Mobile (vitesse du... dans l'extension en configuration), 145.  
 Modulation, 204.  
 Module de traction de Young, 235.  
 Moindre action (principe de), 174, 176.  
 Moindre action (principe de... de Lagrange), 189, 161.  
 Molécules (fréquences de rotation et de vibration de), 332.  
 Molécules (lois d'action entre les), 309.  
 Molécules voisines (distance de deux), 309.  
 Moment conjugué à la coordonnée  $q^i$ , 141, 143.  
 Moment d'une force, 215.  
 Mort, 324.  
 Mouvement (quantité de), 36, 190, 192, 198.  
 Mouvement (Conservation de la quantité de), 260.  
 Mouvement (densité de quantité de), 241.  
 Mouvement (flux de quantité de), 241.  
 Mouvement d'un point mobile, 88, 148, 210.  
 Mouvements tourbillonnaires, 277.  
 Mouvement uniformément accéléré, 156.  
 Mouvement à vitesse constante, 88.  
 Multiplication contractée, 34, 102.  
 Multiplication des déterminants, 108.  
 Multivecteurs, 42.

## N

Niveaux d'énergie, 188.  
 Nruds, 264.  
 Nombres de Bernouilli, 329.  
 Nombre des degrés de liberté, 320, 322.  
 Nombre de dimensions, 24.  
 Nombre de modes vibratoires, 320.  
 Nombre d'ondes  $\alpha$ , 313.  
 Notations de Lamé, 232.  
 Notations tensorielles, 13, 31, 114.  
 Notations vectorielles usuelles, 114.  
 Notations de Voigt, 221.

## O

Onde (amplitude de l'), 195.  
 Onde (déformation au cours de sa propagation), 280.  
 Ondes (déformation progressive du système de deux), 281.

Ondes (efforts moyens exercés par les), 294.  
 Onde (équation d'), 199.  
 Ondes (groupes d'), 209.  
 Ondes (groupes dans l'espace), 206.  
 Ondes (influence de la pression extérieure sur les vitesses de propagation des), 255.  
 Onde (intensité de l'), 210.  
 Ondes (libre parcours moyen des), 346.  
 Ondes (limitation des), 309.  
 Onde (limitation de la longueur d'), 266, 309.  
 Onde (longueur d'), 190, 192, 197, 312, 313, 314, 322, 324, 325, 335, 343, 347.  
 Ondes (paquet d'), 209, 210.  
 Ondes (perturbations dans la propagation des), 278.  
 Onde (phase de l'), 195.  
 Ondes (pression interne moyenne exercée par les), 298.  
 Ondes (propagation des), 62, 168, 193, 205.  
 Ondes (propagation d'un groupe d'), 203.  
 Ondes (superposition des), 281.  
 Ondes (surfaces d'), 173.  
 Ondes (vitesse de propagation des), 190, 234, 324.  
 Ondes  $\alpha$  (nombre d'), 313.  
 Onde de choc, 168.  
 Ondes complètement diffusées, 343.  
 Ondes complètement diffusées (pression de radiation pour), 295.  
 Ondes en « dents de scie », 281.  
 Ondes élastiques, 308, 310.  
 Ondes élastiques (conditions de limitation des), 343.  
 Ondes élastiques (déformations et interactions entre les), 345.  
 Ondes élastiques (pressions de radiation des), 337.  
 Ondes élastiques (propagation des), 251, 324.  
 Onde élastique (réflexion d'une... sur une paroi plane), 261.  
 Ondes élastiques complètement diffusées, 295.  
 Ondes élastiques dans un fluide, 298.  
 Ondes élastiques longitudinales, 292.  
 Ondes élastiques en milieu fluide, 300.  
 Onde élastique plane, 290.  
 Onde élastique stationnaire (composante longitudinale et composante transversale dans une), 274.  
 Ondes élastiques transversales, 294.  
 Ondes électromagnétiques, 62, 299.  
 Ondes électromagnétiques (pression de radiation pour), 296.  
 Ondes de gravité, 208.  
 Onde de Hamilton, 190, 210.  
 Onde de Hamilton (vitesse de l'), 174.  
 Ondes libres, 261.

Ondes libres (effets secondaires sur des), 280.

Onde longitudinale, 234, 264, 268, 303, 319, 323, 333, 335, 340, 343, 344.

Ondes longitudinales complètement diffusées (pression exercée par des), 336.

Onde lumineuse (propagation de l'), 311.

Onde modulée, 204.

Onde monochromatique, 194.

Onde de phase, 196.

Onde plane, 194, 232, 261.

Ondes planes (décomposition en), 256.

Onde plane libre (valeurs moyennes des efforts de Boussinesq dans une), 291.

Onde porteuse, 201.

Ondes se propageant sans déformation, 236.

Ondes sinusoïdales, 203, 281.

Onde sphérique, 194.

Ondes stationnaires, 208, 239, 261, 263, 263, 282.

Ondes stationnaires (formation des), 268.

Ondes stationnaires (perturbation d'), 282.

Ondes stationnaires (pression de radiation pour), 284.

Ondes stationnaires acoustiques dans une salle, 267.

Ondes stationnaires longitudinales, 276, 282.

Ondes stationnaires longitudinales (pression de radiation des), 286.

Ondes stationnaires transversales, 276.

Ondes stationnaires transversales (pression de radiation des), 287.

Ondes transversales, 234, 264, 268, 303, 323, 333, 335, 340, 343, 344, 347.

Ondes transversales (polarisation des), 260, 276.

Ondes transversales complètement diffusées (pression exercée par des), 336.

Ondes transversales de très hautes fréquences, 349.

Ondes ultra-sonores dans un liquide, 269.

Opérateur différentiel, 199.

Opérateur laplacien, 200.

Opérateur  $p_k$ , 201, 202.

Opérateur  $q^k$ , 202.

Optique (Electron), 193.

Optique géométrique, 166, 168, 173, 191, 193, 195, 196.

Optique physique, 191, 193.

Oscillations, 308.

Oscillations (amplitude des), 310.

Oscillations élastiques (densité d'énergie moyenne des), 283.

Oscillations harmoniques sinusoïdales, 184.

Oscillations sinusoïdales, 260.

Oscillations stationnaires, 265.

Osculateur, 134.

## P

Paquet d'ondes, 209, 210.

Parallélisme à distance, 91.

Paroi rigide lisse, 266, 273.

Particules (augmentation de l'écart moyen entre les), 310.

PERIERIS, 343.

Pendule oscillant, 181.

Permutation, 56, 58, 67, 74.

Permutations circulaires, 40.

Permutation impaire, 40, 41, 47.

Permutations paires, 40, 41, 47, 51, 52.

Pesanteur, 187.

PETIT, 327, 328, 332.

Phase (onde de), 196.

Phase (vitesse de), 196, 203, 210.

Phase de l'onde, 195.

Physique cristalline, 212.

Physique du globe, 233.

Plans nodaux, 263.

Plan réflecteur rigide, 262.

PLANCK, 188, 327, 332, 341, 345.

PLANCK-EINSTEIN (termes de), 332.

Plasticité, 244.

POINCARÉ (H.), 229, 242, 244.

Point critique, 346.

Point de fusion, 346.

Poisson (Coefficient de), 235.

Poisson (Equation de), 62.

Polarisation, 290.

Polarisation des ondes transversales, 260, 276.

Postulats de transport parallèle, 75, 117.

Potentiels d'ionisation, 193.

Potentiel thermodynamique, 229.

POYNTING, 303.

Première zone, 321, 322, 323, 324, 333, 335, 343.

Première zone sphérique, 324.

Pression d'un gaz, 308.

Pression des électrons libres, 245.

Pression hydrostatique uniforme  $p$ , 230.

Pression initiale, 242.

Pressions internes, 244, 311, 342.

Pression interne d'agitation thermique, 245.

Pression interne moyenne exercée par les ondes, 298.

Pression locale, 301.

Pression sur une palette immergée, 302.

Pressions de radiation, 183, 233, 230, 281, 283, 288, 289, 294, 298, 303, 310, 333, 341, 343.

Pressions de radiation (conditions de mesure des), 302.

Pressions de radiation des ondes élastiques, 337.

Pression de radiation exercée par des ondes réfléchies sous l'incidence arbitraire, 285.

- Pressions de radiation dans les fluides, 298.  
 Pression de radiation sur un miroir, 283, 293.  
 Pression de radiation pour ondes complètement diffusées, 295.  
 Pression de radiation pour ondes électromagnétiques en milieu solide isotrope, ou liquide, ou gazeux, 296.  
 Pression de radiation pour les ondes stationnaires, 284.  
 Pression de radiation des ondes stationnaires longitudinales, 286.  
 Pression de radiation des ondes stationnaires transversales, 287.  
 Pression thermique, 245.  
 Principe de d'Alembert, 138.  
 Principe de Carnot, 229, 340.  
 Principe de Fermat, 166, 174, 193, 196.  
 Principe de Maupertuis, 165, 166.  
 Principe de minimum en élasticité, 250.  
 Principe de moindre action, 174, 176.  
 Principe de moindre action de Lagrange, 159, 161.  
 Principe des travaux virtuels, 139, 238, 248, 250.  
 Probabilité, 210, 311.  
 Problème acoustique, 267.  
 Produit contracté, 31, 79.  
 Produits extérieurs, 41.  
 Produit scalaire de deux vecteurs, 35, 101, 103.  
 Produit vectoriel, 8, 40, 42.  
 Propagation d'un groupe d'ondes, 203.  
 Propagation des ondes, 62, 168, 193, 205, 254, 316.  
 Propagation des ondes (déformation au cours de la), 280.  
 Propagation des ondes (influence de la pression extérieure sur les vitesses de), 255.  
 Propagation des ondes (perturbations dans la), 278.  
 Propagation des ondes élastiques, 251, 321.  
 Propagation de l'onde lumineuse, 311.  
 Propagation non perturbée, 282.  
 Propagation du son, 59.  
 Propriétés élastiques, 212, 242.  
 Propriétés élastiques (variations des), 309, 345.  
 Pseudo-scalaire, 45, 47.  
 Pseudo-tenseurs, 45, 49, 55, 215, 217.  
 Pseudo-tenseurs (dérivées covariantes des), 82.  
 Pseudo-tenseurs (transport en circuit fermé), 132.
- Quanta, 188, 308, 327.  
 Quanta (conditions de), 348.
- Quantité de mouvement, 140, 190, 192, 197.  
 Quantité de mouvement (conservation de la), 260.  
 Quantité de mouvement (densité de), 241, 290.  
 Quantité de mouvement (flux de), 241, 290.  
 Quantité de mouvement (transport de), 346.
- ### R
- Radiation, 190.  
 Radiation (pressions de), 185, 255, 298.  
 Radiations complètement diffusées et non polarisées (efforts exercés par des), 298.  
 RATOWSKI, 336, 342.  
 RAYLEIGH, 197, 291, 311.  
 Rayons X, 192, 193, 213.  
 Rayonnement naturel « non polarisé », 297.  
 Réduction du tableau des  $g_{ik}$  à la forme diagonale, 106.  
 Référence (système de), 6.  
 Réflexion sur des miroirs orthogonaux, 268.  
 Réflexions multiples, 263.  
 Réflexion sur une surface libre, 263.  
 Réfraction (lois de), 262.  
 Règles de transport parallèle (signification des), 122.  
 Relations de Cauchy, 232, 234, 246, 306.  
 Relation entre les forces et les déformations, 237.  
 Relativité, 13, 58, 74, 90, 101, 117, 189.  
 Relativité généralisée d'Einstein, 73, 132, 133, 136, 241.  
 Réseaux de Bravais, 305.  
 Réseau cristallin, 234, 323.  
 Réseaux cristallins (structure des), 192.  
 Réseaux cristallins (vibrations des), 315.  
 Réseau cristallin limité (vibrations d'un), 322.  
 Réseaux à deux et trois dimensions, 315, 318, 319, 321.  
 Réseau limité, 321.  
 Réseaux obliques, 323.  
 Résonateurs harmoniques (entropie d'un système de), 341.  
 RICCI (Courbure moyenne de), 136.  
 RICCI et EINSTEIN (tenseur de courbure contracté), 90, 132.  
 Rides capillaires, 205.  
 Rides à la surface de l'eau, 205.  
 RIEMANN (Coordonnées normales de), 134.  
 RIEMANN (Espace de), 94, 108, 118, 129, 200.  
 RIEMANN (espace de... à courbure), 144.  
 RIEMANN (Géométries de), 137.

RIEMANN-CHRISTOFFEL (Tenseur de), 129.  
 Rigidité, 277, 346.  
 Rotation à gauche, 7, 50.  
 Rotation (sens de), 53.  
 Rotationnel, 9, 59, 60, 63, 111, 115.  
 Rotationnel (sens géométrique du... pour trois dimensions), 66.  
 Rotationnel comme densité tensorielle, 67.  
 Rotationnel d'un gradient, 60, 69.  
 Rotationnel d'un tenseur, 69.  
 Rotationnel comme tenseur antisymétrique, 65, 68.

## S

Scalaire, 6, 7.  
 Scalaire (produit), 35.  
 Scalaire (transport d'un), 87.  
 SCHRÖDINGER, 2, 60, 167, 199, 210.  
 Sens géométrique du rotationnel pour trois dimensions, 66.  
 Sens de rotation, 7, 55.  
 Sens de rotation des axes, 214.  
 Sexti-vecteur, 14.  
 Signification géométrique des coefficients  $g_{ik}$ , 100.  
 Sinus (loi des), 262.  
 Solide, 212, 306.  
 Solides (agitation thermique des), 308.  
 Solide (compressibilité du), 236, 344.  
 Solide (déformations du), 213.  
 Solide (dilatation du), 244.  
 Solide (dilatation isotrope du), 295.  
 Solides (dilatation thermique des), 245, 290, 309, 335, 337.  
 Solide (énergie d'agitation thermique d'un), 327.  
 Solide (modes de vibration propres d'un), 251.  
 Solide (spectre des vibrations dans le), 309, 332.  
 Solides (structure des), 213.  
 Solide (températures caractéristiques du), 328.  
 Solides (théorie des), 308.  
 Solide (vibrations propres d'un), 273.  
 Solide (viscosité du), 346.  
 Solides anisotropes, 230, 290.  
 Solides constitués de molécules, 332.  
 Solide cristallin anisotrope, 266.  
 Solides cristallisés, 309.  
 Solide déformé, 219.  
 Solide déformé (densité d'énergie potentielle pour un), 228.  
 Solide déformé (système des efforts dans un), 215.  
 Solide déformé (tensions dans un), 213.  
 Solide élastique, 212.  
 Solide idéal (thermo-dynamique du), 339.  
 Solide isotrope, 254, 264, 305, 324, 333, 347.  
 Solide isotrope fictif de Voigt, 237, 346.

Solide isotrope homogène, 237, 254, 264, 266.  
 Solide isotrope soumis initialement à une pression extérieure, 244.  
 Solides mono-atomiques, 332.  
 Solide parfait, 309.  
 Solide réel, 259.  
 Solidification, 347.  
 Sommations, 29, 220.  
 Somme diagonale, 31.  
 Somme diagonale du tenseur métrique, 104.  
 Sons (mesure d'intensité des), 304.  
 Son (propagation), 59.  
 Sous-espace courbe, 138.  
 Spectre des vibrations d'un corps solide, 332.  
 Spectre des vibrations dans le solide, 309, 332.  
 Sphère de rayon  $\lambda$ , 127.  
 Stabilité de l'état initial, 231.  
 Statistiques quantiques, 329, 343.  
 Structure discontinue à une seule dimension, 315.  
 Superposition des ondes, 281.  
 Surface (élément de), 8, 53, 67, 213.  
 Surface libre (réflexion sur une), 263.  
 Surfaces d'ondes, 173.  
 Surfusion, 347.  
 Symboles de Christoffel, 118, 119, 120, 123, 126.  
 Symétrie, 13, 39, 40, 43, 76, 131, 216.  
 Symétrie du système des tensions, 216.  
 Symétrique, 220.  
 Symétrique gauche, 39, 215.  
 Systèmes (mécanique des), 60.  
 Système cartésien, 6.  
 Système conservatif, 142, 147, 166, 170, 172, 176, 199.  
 Systèmes conservatifs à liaisons holonomes indépendantes du temps, 162.  
 Système de deux ondes (déformation progressive du), 281.  
 Système des efforts dans un solide déformé, 215.  
 Système de forces extérieures, 232, 311.  
 Systèmes à liaisons variables, 152.  
 Systèmes d'ondes stationnaires, 265.  
 Systèmes de référence, 6.  
 Systèmes de référence en mouvement, 150, 155.  
 Systèmes de tourbillons, 347.  
 SZILY, 179.

## T

Température, 245, 308.  
 Températures (basses), 327, 329.  
 Température (haute), 328.  
 Température (variations des propriétés élastiques en fonction de la), 309, 342.  
 Températures caractéristiques, 335, 347.

- Température caractéristique de Debye, 328.  
 Températures caractéristiques du solide, 328.  
 Températures critiques, 343.  
 Tenseurs, 5, 6, 7, 31.  
 Tenseurs (addition de deux), 33.  
 Tenseurs (axes et valeurs propres des), 212.  
 Tenseurs (définition), 23, 31.  
 Tenseur (dérivée covariante d'un), 80.  
 Tenseurs (dérivées covariantes secondes de), 89.  
 Tenseur (dérivées partielles des composantes du), 63.  
 Tenseurs (modes de formation), 33.  
 Tenseurs (multiplication entre deux), 34.  
 Tenseur (Point d'application d'un), 38, 63, 76, 103.  
 Tenseur (règles pour reconnaître un), 110.  
 Tenseur (rotationnel d'un), 69.  
 Tenseur (transport d'un), 87.  
 Tenseur (transport en circuit fermé), 90.  
 Tenseurs (transport parallèle), 129.  
 Tenseur (variance d'un), 101.  
 Tenseurs antisymétriques, 41, 67, 215.  
 Tenseurs antisymétriques (Réduction), 45.  
 Tenseur antisymétrique (rotationnel comme), 65, 68.  
 Tenseur antisymétrique à deux indices, 50.  
 Tenseur contracté de Ricci et Einstein, 132.  
 Tenseur contravariant antisymétrique, 213.  
 Tenseur de courbure, 135.  
 Tenseur de courbure contracté, 133.  
 Tenseur de courbure contracté de Ricci et Einstein, 90, 132.  
 Tenseur de courbure de l'espace, 88, 129.  
 Tenseur de la déformation, 224, 233, 237.  
 Tenseur de la déformation (développement du), 220, 225, 232.  
 Tenseurs des divers ordres, 32.  
 Tenseur des efforts, 9, 212, 237, 291.  
 Tenseurs en élasticité, 212.  
 Tenseurs glissants, 65.  
 Tenseur métrique, 108, 111.  
 Tenseur métrique (somme diagonale d'un), 104.  
 Tenseur métrique fondamental, 95, 129, 143.  
 Tenseur métrique mixte, 103.  
 Tenseur mixte, 34.  
 Tenseur de Riemann-Christoffel, 129.  
 Tenseur du second ordre, 9.  
 Tenseurs symétriques, 39, 212.  
 Tenseur des tensions de radiation, 290, 292, 293.  
 Tenseur à trois indices complètement antisymétrique, 214.  
 Tensions, 9, 212, 223, 247.  
 Tensions (symétrie du système des), 216.  
 Tensions élastiques, 215.  
 Tensions de radiation (expression des), 343.  
 Tensions de radiation (tenseur des), 290, 292, 293.  
 Tensions dans un solide déformé, 213.  
 Tensoriel (Critérium du caractère), 34, 43.  
 Tensorielles (capacités), 45.  
 Tensorielles (densités), 45.  
 Termes d'inertie, 155.  
 Termes d'ordre supérieur (influence des), 278.  
 Termes d'ordre supérieur dans l'énergie potentielle, 345.  
 Termes de Planck-Einstein, 332.  
 Théorème de Boltzmann, 176.  
 Théorie cinétique, 308.  
 Théorie cinétique des gaz, 179, 245, 346.  
 Théorie des gaz, 308.  
 Théorie mécanique de la thermodynamique, 179.  
 Théorie des milieux troubles, 197.  
 Théorie moderne des corps solides, 255, 318.  
 Théorie quantique, 341.  
 Théories relativistes, 134.  
 Théorie des solides, 308.  
 Théorie statistique de la thermodynamique, 179.  
 Thermodynamique, 20, 179, 228, 343.  
 Thermodynamique (théorie mécanique de la), 179.  
 Thermodynamique (théorie statistique de la), 179.  
 Thermodynamique classique (application de la... à un corps solide idéal), 341.  
 Thermodynamique du solide idéal, 339.  
 Thermostat, 179, 229.  
 Tige, 305.  
 Tourbillons, 277, 347.  
 Tractions, 289.  
 Traction (Effort de), 10.  
 Trajectoires, 210.  
 Trajectoires (famille de), 168.  
 Trajectoires sous forces extérieures nulles, 144.  
 Transformation adiabatique, 183, 229.  
 Transformations isothermes, 229.  
 Transformations radio-actives, 190.  
 Transformation réversible, 228.  
 Transport d'une capacité en circuit fermé, 90.  
 Transport en circuit fermé, 129, 871.  
 Transport d'une densité en circuit fermé, 90, 120.  
 Transport à distance finie, 86.  
 Transport des étalons de longueur, 116.  
 Transport de la jauge, 117.  
 Transport du mètre, 117.  
 Transport parallèle, 75, 130, 218.

Transport parallèle (postulat de), 75, 105.  
 Transport parallèle (signification des règles de), 122.  
 Transport parallèle des tenseurs, 129.  
 Transport parallèle de vecteurs, 78, 118, 126.  
 Transport des pseudo-tenseurs en circuit fermé, 90, 132.  
 Transport de quantité de mouvement, 346.  
 Transport d'un scalaire, 87.  
 Transport d'un tenseur, 87.  
 Transport d'un tenseur en circuit fermé, 90.  
 Transport d'un vecteur, 87.  
 Transport d'un vecteur en circuit fermé, 88.  
 Travail, 214.  
 Travail des forces extérieures, 228.  
 Travail mécanique, 179.  
 Travail virtuel des forces élastiques, 249.  
 Travaux virtuels (principe des), 139, 238, 248, 250.  
 Tuyaux sonores, 264.  
 TYNDALL, 197.

## U

Ultra-sons (absorption de la diffusion des), 349.  
 Ultra-sons (mesures d'intensité des), 304.  
 Unités locales, 116.  
 Unité de longueur, 54, 95.  
 Unités de longueur  $e_k$  imaginaires, 101  
 Univers quadri-dimensionnel, 13.

## V

Valence (Electron de), 193.  
 Variables cachées, 180.  
 Variables généralisées, 277.  
 Variables indépendantes, 258, 277.  
 Variables nouvelles séparées, 256.  
 Variance d'un vecteur ou d'un tenseur, 101.  
 Variation des coefficients d'élasticité, 344.  
 Variation des liaisons, 177.  
 Variation de masse avec la vitesse, 189.  
 Variations des propriétés élastiques en fonction de la température, 345.  
 Variation de volume, 227.  
 Vecteur, 6.  
 Vecteurs (angles de deux), 103, 122.  
 Vecteur (Composantes d'un... suivant le contour des axes), 104.  
 Vecteur (Composantes contravariantes d'un), 102.  
 Vecteur (Composantes covariantes d'un), 102.  
 Vecteur (Conservation de la longueur d'un), 130.

Vecteur (déplacement des indices d'un), 129.  
 Vecteur (dérivée absolue d'un), 85.  
 Vecteurs (dérivées covariantes secondes de), 89.  
 Vecteur (longueur du), 103.  
 Vecteur (point d'application d'un), 105.  
 Vecteur (projections normales d'un), 104.  
 Vecteurs (produit scalaire de deux), 103.  
 Vecteur (transport d'un), 87.  
 Vecteur (transport en circuit fermé), 88.  
 Vecteurs (transport parallèle de), 118, 126.  
 Vecteur (variance d'un), 101.  
 Vecteurs axiaux, 6, 7, 13, 54.  
 Vecteur contravariant (dérivée covariante d'un), 78.  
 Vecteur contravariant (variation vraie), 126.  
 Vecteur contravariant  $u^k$ , 64.  
 Vecteur covariant, 64, 141.  
 Vecteur covariant (dérivée covariante d'un), 79.  
 Vecteur covariant (transport parallèle d'un), 79.  
 Vecteurs glissants, 65.  
 Vecteurs polaires, 6, 7.  
 Vectoriel (produit), 8, 40.  
 Ventre de vibration, 264.  
 Vibrateurs harmoniques, 260.  
 Vibration (direction de), 252, 253, 322.  
 Vibrations (spectre des... dans le solide), 309, 332.  
 Vibration circulaire, 260, 276.  
 Vibrations d'une corde à structure discontinue, 312.  
 Vibrations élastiques (effort moyen exercé par les), 284.  
 Vibrations d'une file d'atomes, 315.  
 Vibration longitudinale, 258, 276, 284, 314, 315, 322, 347.  
 Vibrations d'ordre supérieur, 264.  
 Vibrations propres, 312, 321, 326.  
 Vibrations propres (dénombrement des), 318.  
 Vibrations propres (nombre de), 266, 323.  
 Vibrations propres (Répartition des fréquences des), 324.  
 Vibrations propres d'un solide, 273.  
 Vibrations propres d'un volume de forme quelconque, 267.  
 Vibrations propres d'un volume parallélépipédique rectangle, 255.  
 Vibrations propres d'un volume solide limité (dénombrement des), 264.  
 Vibration rectiligne, 260, 276.  
 Vibrations des réseaux cristallins, 315.  
 Vibrations d'un réseau cristallin limité, 322.  
 Vibration stationnaire, 319.  
 Vibration transversale, 258, 276, 284, 312, 319, 322, 347.

Viscosité du solide, 346.  
 Vitesse, 36, 113, 114, 115.  
 Vitesse (composante covariante de la), 143.  
 Vitesse de groupe, 203, 210, 268.  
 Vitesse du mobile, 210.  
 Vitesse du mobile dans l'extension en configuration, 143.  
 Vitesse de l'onde de Hamilton, 174.  
 Vitesse de phase, 196, 203, 210, 317.  
 Vitesse d'un point, 102.  
 Vitesse du point mobile, 85.  
 Vitesse du point représentant le système, 174.  
 Vitesse de propagation, 166, 173, 252, 258, 276, 313, 317.  
 Vitesse de propagation des ondes, 190, 254, 324.  
 Vitesse  $u^i$ , 125.  
 Voir (W.), 1, 212, 221, 232, 233, 236, 237, 346.  
 Voir (Comparaison des définitions d'élasticité suivant), 249.  
 Volume, 42.  
 Volume (élément de), 49.

Volume (forme résultante sur un élément de), 218.  
 Volume (Mesure du), 110.  
 Volume (variation de), 227.  
 Volume de forme quelconque (vibrations propres d'un), 267.  
 Volume parallélépipédique rectangle (vibrations propres d'un), 255.  
 Volume solide limité (dénombrement des vibrations propres d'un), 264.

## W

W<sub>REL</sub> (H), 75, 117, 120, 131, 267.

## Y

YOUNG (Module de traction de), 235.

## Z

Zones de Brillouin, 324



# DOVER BOOKS ON SCIENCE

**Anschauliche Geometrie** by D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. This outstanding work provides a masterly exposition of carefully selected topics of elementary and higher geometry, stressing the intuitive approach — fascinating, stimulating material for both professional mathematicians and amateurs of mathematics. Text in German, with English translation of Table of Contents and German-English Glossary-Index.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$  x + 314 pages, 330 illustrations. Originally published at \$10.00. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.95**

**Applied Elasticity** by J. Prescott. "The author . . . has undoubtedly produced an excellent and important contribution to the subject, not merely in the old matter which he has presented in new and refreshing form, but also in the many original investigations here published for the first time."—*Nature*. Text in English.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . 666 pages. Originally published at \$9.50. **\$3.95**

**Atomic Spectra and Atomic Structure** by Gerhard Herzberg. This book has long been considered as one of the most satisfactory introductions to the field of atomic spectra and their relations to the structure of atoms. Second revised edition. Text in English.  $5\frac{1}{4} \times 8\frac{1}{4}$ . xiv + 257 pages, 80 illustrations, 21 tables. Originally published at \$5.70. **\$3.00**

**Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis** by G. Pólya and G. Szegő. "There are but few books which could be compared with this one as to the richness and charm of material, and amount of suggestions which an attentive reader is able to get out of it."—*Bulletin of the American Mathematical Society*. Two volume set. Text in German, with English translation of Table of Contents and German-English Glossary-Index.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . Volume I: xxiv + 340 pages. Volume II: xviii + 410 pages. Originally published at \$14.40 for both volumes. **\$3.50**

Each volume — \$3.50, the Set — \$7.00

**Cosmic Radiation**. Edited by W. Heisenberg. Translated from the German by T. H. Johnson. Presenting a general survey of recent accomplishments and as yet unsolved problems in a branch of physics which is attracting many workers, these fifteen articles were written by eminent German physicists during World War II, and are now being made available to American scientists for the first time. Material is well integrated, with numerous cross references and a consistent notation. Text in English. 6 x 9. 192 pages. **\$3.50**

**Cours d'Analyse Infinitésimale** by Ch. J. de la Vallée Poussin. "The handling throughout is clear, elegant and concise; the various topics are illustrated by numerous carefully chosen examples selected with rare pedagogic skill to develop a real understanding of the text . . . it is impossible to point out all the merits of these volumes, so rich in varied topics, so lucid in exposition. . ."—*Bulletin of the American Mathematical Society*. Two volume set. Text in French.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . Volume I: x + 460 pages. Volume II: x + 524 pages. **\$4.00**

Each volume — \$4.00, the Set — \$8.00

**Einführung in die Algebraische Geometrie** by B. L. van der Waerden. ". . . We recommend this book to the attention of every mathematician who is interested in either algebra or geometry. . . . They will find here a clear, systematic exposition of an important new mathematical development. . ."—*Bulletin of the American Mathematical Society*. Text in German.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . vii + 247 pages, 15 illustrations. Originally published at \$7.80. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.95**

**Einleitung in die Mengenlehre** by Adolf Fraenkel. Third revised edition. Text in German.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . viii + 424 pages, 13 illustrations. Originally published at \$9.60. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$4.00**

## DOVER BOOKS ON SCIENCE

**Electromagnetic Theory** by Oliver Heaviside, with an historical introduction by Dr. Ernst Weber. A landmark in its field, this work is once again available. Three volumes bound as one. *Summer 1947.* **\$5.95**

**Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint** by Felix Klein. Volume I: Arithmetic, Algebra, Analysis. Translated from the third German edition by E. R. Hedrick and C. A. Noble. An invaluable study equally useful to the university teacher and to the teacher in the secondary school. There is nothing comparable to this work, either with respect to the skillfully integrated material, or to the fascinating manner in which this material is discussed. Text in English.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . ix + 274 pages, 125 illustrations. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.75**

**Grundzüge der Theoretischen Logik** by D. Hilbert and W. Ackermann. This masterly introduction to the subject has been written by two scholars who have contributed much to the development of the field. "... a first rate book indispensable to the serious student of mathematical logic."—*Mathematical Gazette*. Second revised edition. Text in German.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . viii + 133 pages. Originally published at \$4.50. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.00**

**Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics** by J. W. Mellor. This well-known volume, written by an eminent chemist, offers a short road to a working knowledge of higher mathematics for the student of chemistry or physics. "... recognized as filling a place of its own in our mathematical literature. The theoretical chemist of the rising generation must know his higher mathematics, and we are convinced that many will bless Dr. Mellor for providing them with an eminently readable and thoroughly practical treatise..."—*Nature*. Fourth revised edition. Text in English.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . xxi + 641 pages. Originally published at \$7.00. **\$4.50**

**Hydrodynamics** by Sir Horace Lamb. The singular position of this internationally famous work is best illustrated by the fact that most writers in this field refer their readers to this rather than to other text books for fundamental theorems, equations and methods of solution. "It remains the leading treatise on classical hydrodynamics."—*Mathematical Gazette*. Sixth revised edition. Text in English. 6 x 9. xv + 738 pages. Originally published at \$13.75. **\$4.95**

**Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik** by Johann v. Neumann. A careful and critical study of logical and mathematical difficulties connected with the measurement of physical quantities. Text in German, with German-English Glossary. 6 x 9. vi + 266 pages, 4 illustrations. Originally published at \$7.85. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.95**

**Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers** by Erwin Madelung. An instant reference collection of 4000 advanced equations, formulae, theorems of mathematics and mathematical physics. Third revised edition. Text in German, with German-English Glossary. 6 x 9. xiii + 384 pages, 25 illustrations. Originally published at \$12.00. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.95**

**Matter and Light** by Louis de Broglie. Translated by W. H. Johnston. Twenty-one essays on the following subjects: a survey of present day physics, a discussion of matter and electricity, a discussion of light and radiation, an explanation of wave mechanics a set of philosophical studies on quantum physics and a miscellany of three general philosophical essays. Text in English.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . 300 pages. Originally published at \$3.50. **\$2.75**

**Mengenlehre** by F. Hausdorff. A famous introduction into the theory of sets which is of the greatest interest and practical value to the beginner in the subject, as well as to the mathematician whose main field lies in some other branch of mathematics, but who has occasional opportunity in his work to use the methods and results of the theory of sets. Third revised edition. Text in German.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . 307 pages, 12 illustrations. Originally published at \$10.00. **\$3.95**

## DOVER BOOKS ON SCIENCE

**Ordinary Differential Equations** by E. L. Ince. A lucid, comprehensive exposition of the theory of ordinary differential equations in both the real and the complex domain which gives the modern tools for solving ordinary differential equations. Text in English.  $5\frac{1}{2} \times 9$ . viii + 558 pages, 18 illustrations. Originally published at \$12.00. **\$3.95**

**Partial Differential Equations of Mathematical Physics** by H. Bateman. A truly encyclopedic exposition of the methods of solving boundary value problems of mathematical physics by means of definite analytical expressions. First American edition with corrections. Text in English.  $6 \times 9$ . xxii + 522 pages, 29 illustrations. Originally published at \$10.00. **\$3.95**

**The Phase Rule and Its Applications** by Alexander Findlay. "It has established itself as the standard work on the subject and still remains the best introduction to the phase rule and its application. . . . The book is assured of a continued and well-deserved popularity."—*Nature*. Eighth revised edition. Text in English.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . xv + 326 pages. **\$3.75**

**Polar Molecules** by P. Debye. "This book not only brings together for the first time the accumulated information on electric dipoles, but also points out the gaps which still exist in theory and experiment."—*Nature*. Text in English.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . 172 pages. Originally published at \$8.00. **\$3.50**

**Tables of Functions with Formulae and Curves** (Funktionentafeln) by Eugene Jahnke and Fritz Emde. The world's most comprehensive collection of tables, formulae and curves of the transcendental functions. Includes 76-page section by Emde giving tables and formulae for the elementary functions—omitted from all other available editions. Fourth revised edition, containing 400 corrections of errors. Text in English and German.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . xv + 379 pages, 212 illustrations. Originally published at \$6.00. **\$3.95**

**Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité** by Léon Brillouin. Written by a leading French physicist as an aid to the formulation of physical laws through the systematic use of tensors, this volume provides a comprehensive study of the applications of tensor analysis to mechanics and theoretical physics. Text in French.  $6 \times 9$ . 370 pages. **\$3.95**

**Theorie der Differentialgleichungen** by Ludwig Bieberbach. There is hardly another book on the theory of ordinary and partial differential equations which goes equally far toward introducing the reader to the most important modern problems in this field and at the same time preserves the character of an elementary textbook. Third revised edition. Text in German.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . xiii + 396 pages, 22 illustrations. Originally published at \$10.00. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.95**

**Theory of Functions** by Konrad Knopp. Part I: Elements of the General Theory of Analytic Functions. Translated from the fifth German edition by Frederick Bagemihl. "There is little doubt but that this is the best monograph on functions of a complex variable yet written."—*American Mathematical Monthly*. Text in English.  $4\frac{1}{4} \times 6\frac{1}{2}$ . viii + 146 pages, 4 illustrations. **\$1.50**

**Theory of Functions** by Konrad Knopp. Part II: Applications and Further Development of the General Theory. Translated from the fourth German edition by Frederick Bagemihl. The second part of this renowned text treats various special topics of the theory of functions: *Single-valued Functions*: Meromorphic Functions—Periodic Functions. *Many-valued Functions*: Root and Logarithm—Algebraic Functions. Text in English.  $4\frac{1}{4} \times 6\frac{1}{2}$ . 216 pages. **\$1.50**

## DOVER BOOKS ON SCIENCE

**Time, Knowledge and the Nebulae** by Martin Johnson. An introduction to the meanings of Time in physics, astronomy, and philosophy, and the relativities of Einstein and of Milne. Foreword by Professor E. A. Milne.  $8\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$ . 192 pages. **\$2.75**

**Die Theorie der Gruppen von Endlicher Ordnung** by Andreas Speiser. A successful condensation of all important propositions of the field into less than three hundred pages. "... a very attractive introduction into some of the most modern developments of the theory of groups of finite order, with emphasis on its applications. . . ."—*American Mathematical Monthly*. Third revised edition. Text in German.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . x + 262 pages, 41 illustrations. Originally published at \$9.00. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.95**

**Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation** by Gustav Doetsch. This internationally famous work provides a comprehensive descriptive analysis of the theory and mathematical foundation of the Laplace transformation method, in addition to exhaustive sections showing its applications. Text in German, with German-English Glossary.  $6 \times 9$ . xiii + 439 pages, 18 illustrations, Table of Laplace transformations. Originally published at \$14.50. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.95**

**The Theory of Sound** by Lord Rayleigh. With a Historical Introduction by Robert Bruce Lindsay. Reading Rayleigh is a real process of discovery. . . . It is safe to predict that for a long time to come The Theory of Sound will be a vade mecum for the pure and applied acoustician. Second revised edition. Text in English.  $5\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ . Volume I: xlii + 480 pages. Volume II: xii + 504 pages. Originally published in two volumes at \$8.00. **One Volume Edition \$4.95**

**A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies** by E. T. Whittaker. Written by one of the great figures in contemporary mathematical physics, this world famous work has long been recognized as a classic in the field of analytical dynamics. Fourth revised edition. Text in English.  $6 \times 9$ . xiv + 456 pages. Originally published at \$6.00. **\$3.95**

**A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity** by A. E. H. Love. It would be hard to find a modern paper on elasticity which does not contain at least one reference to Love's famous treatise. Fourth revised edition. Text in English.  $6 \times 9$ . xviii + 643 pages, 76 illustrations. Originally published at \$10.50. **\$4.95**

**Treatise on Thermodynamics** by Max Planck. Translated with the author's sanction by Alexander Ogg. Written by the founder of the quantum theory, this famous treatise is recognized as the most comprehensive and profound treatment of the subject, meeting the needs of both students and research workers in the fields of physics and chemistry. Third revised edition (translated from the seventh German edition). Text in English.  $5\frac{1}{4} \times 8\frac{1}{4}$ . xii + 297 pages, 5 illustrations. Originally published at \$4.80. **\$3.00**

**Vorlesungen über Differentialgeometrie** by Wilhelm Blaschke. Volume I: Elementare Differentialgeometrie. This famous work provides not only a brilliant exposition of differential geometry in a Euclidean space of three dimensions, but also an excellent introduction to original research in this field. Third revised edition. Text in German, with English translation of Table of Contents and German-English Glossary-Index. x + 311 pages, 35 figures. Originally published at \$9.00. "Yellow (Grundlehren) Series." **\$3.95**

*Please send for our free, new catalog which gives full  
descriptions of all Dover Books on Science  
Dover Publications, 1780 Broadway, New York 19, N. Y.*

